Kurvendiskussion

- Eine Anleitung -

Andreas Zacchi

SfE Dreieich-Sprendlingen

Sommersemester 2012

Schule für Erwachsene
Frankfurter Strasse 160-166
63303 Dreieich
Tel.: 06103 - 3131 6840
www.sfe3e.de

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Wozu eine *Anleitung zur Kurvendiskussion*? Im Internet wird man sicherlich genügend hilfreiches Material und Übungsaufgaben zur Kurvendiskussion finden, (z.B.bei http://www.brinkmann-du.de/mathe/aufgabenportal.htm). Auch Bücher gibt es genug. Mein Anliegen ist es jedoch gewesen, den Studierenden des Kurses 86a an der *SfE* unterrichtsbegleitend Notizen und Erklärungen in schriftlicher Form zukommen zu lassen. Zum einen, um lange Suchzeiten (bei evtl. verpasstem Unterrichtsbesuch) nach entsprechendem Material zu ersparen, zum anderen es so zu verschriftlichen, wie ich es auch im Unterricht zu vermitteln versuche. Zudem kommt nichts Überflüssiges oder zu viel an *mathematischer Rigorosität* vor - das Essentielle, auf Studierende an Abendschulen zurechtgeschnittene, *mathematische Handwerkszeug* ist in ausreichendem Maße, hoffentlich verständlich, dargestellt.
Man kann sich also alles *Relevante* erneut ansehen, und sich sicher sein, dass dies auch von Wichtigkeit für ein erfolgreiches Bestehen der *Q1-Phase* sein wird.

1.1 Rückblick E II

Nachdem wir in der *Einführungsphase II* gelernt haben, wie man quadratische Funktionen handhabt; also den Scheitelpunkt, die Nullstellen und

den y-Achsenabschnitt bestimmt, sehen wir uns in der Qualifikationsphase I höherpotente Funktionen an.
Diese sogenannten *Polynomfunktionen* werden auch *ganzrationale Funktionen* genannt.
Im Allgemeinen sind sie von folgender Form:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \tag{1.1}$$

Ein Beispiel wäre:

$$f(x) = \frac{1}{50} x^5 + \frac{2}{5} x^3 - \frac{3}{5} x + 2 \tag{1.2}$$

In Abbildung (1.1) ist die Funktion (1.2) graphisch dargestellt.

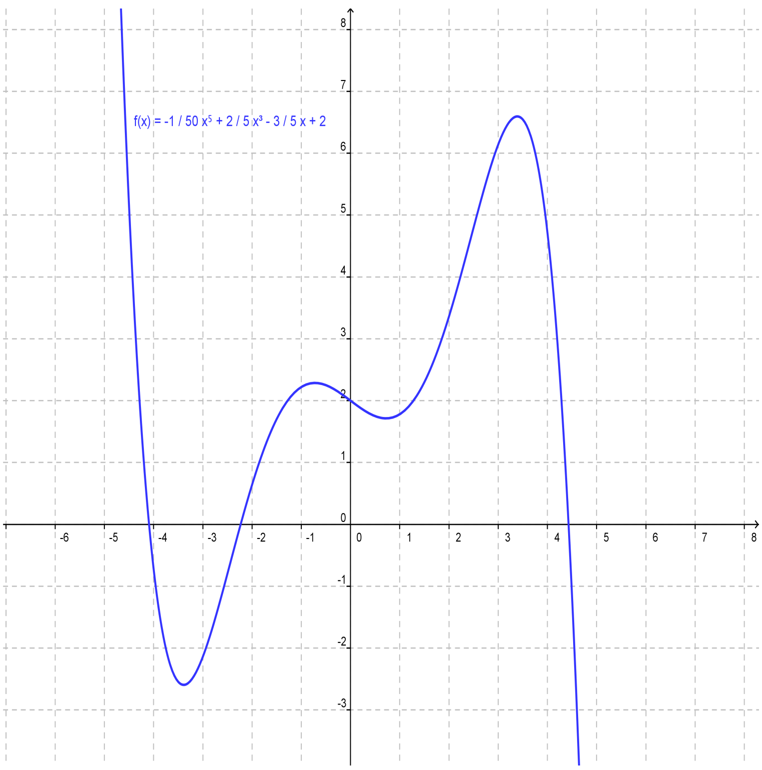

Abbildung 1.1: *Die Funktion* $f(x) = \frac{1}{50} x^5 + \frac{2}{5} x^3 - \frac{3}{5} x + 2$

Analog zu den *linearen* und *quadratischen Funktionen*, nur etwas aufwendiger, führt man bei *Polynomfunktionen* eine sogenannte **Kurvendiskussion** durch. Hat man bei den quadratischen Funktionen die Nullstellen, den y-Achsenabschnitt sowie den Scheitelpunkt bestimmt, so macht man dies auch bei Polynomfunktionen, nur mit anderen Mitteln, die in den folgenden Kapiteln dargestellt und erläutert werden sollen.
Zunächst wird an folgendem Beispiel zur Wiederholung bzw. Verdeutlichung für alles kommende, eine quadratische Funktion nach altem Schema *diskutiert*. Dem Leser bleibt es selbst überlassen, nach (hoffentlich) erfolgreichem Durcharbeiten dieses Schriftstückes, die gleiche Aufgabe mit dem neu gelernten *Handwerkszeug* durchzuführen.

$$f_1(x) = -(x-2)^2 + 1 \tag{1.3}$$

Den **Scheitelpunkt** von (1.3) bestimmt man durch Ablesen an der Scheitelform $\rightarrow$ (2/1).
Den y-Achsenabschnitt durch Ausmultiplizieren:

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= -(x-2)^2 + 1 && (1.4)\\
&= -(x^2 - 4x + 4) + 1 && (1.5)\\
&= -x^2 + 4x - 4 + 1 && (1.6)\\
&= -x^2 + 4x - 3 \qquad | \cdot (-1) && (1.7)\\
&= x^2 - 4x + 3 && (1.8)
\end{aligned}$$

mit (0/-3) als **y-Achsenabschnitt**.
Nullstellen kann man mit der **pq-Formel** nach Gleichung (1.9) bestimmen:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \tag{1.9}$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \tag{1.10}$$

$$x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{2^2 - 3} \tag{1.11}$$

$$x_{1/2} = 2 \pm 1 \tag{1.12}$$

$$\tag{1.13}$$

$$x_1 = 3 \qquad x_2 = 1$$

Die **Nullstellen** sind also:

$$(3/0) \quad (1/0)$$

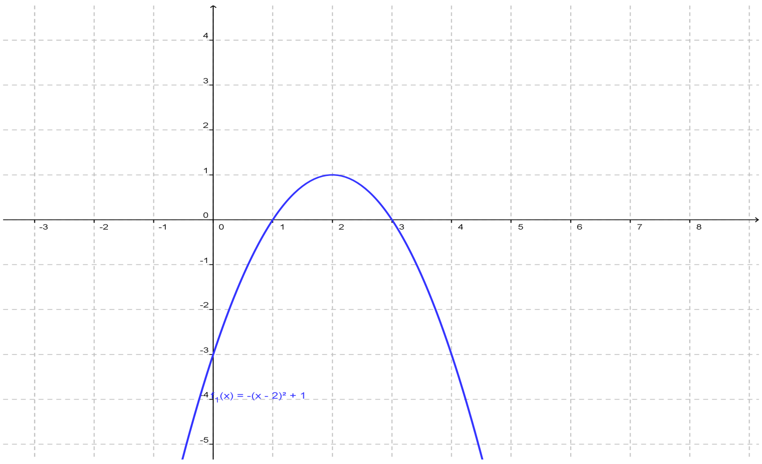

Abbildung 1.2: *Der Graph der Funktion* $f_1(x) = -(x-2)^2 + 1$

Vorwegnehmend darf gesagt werden, dass der *Scheitelpunkt* einem *Extremwert* entspricht. Der Graph verläuft, anschaulich gesprochen, entweder nicht „höher“ oder nicht „tiefer“. Polynomfunktionen haben gegebenenfalls mehrere solcher *Extrema*.

Kapitel 2

Polynomfunktionen

2.1 Symmetrien

Zunächst: Was ist eigentlich *Symmetrie*?
Das Problem, Symmetrien zu definieren, ist interessant. Der vielleicht symmetrischste Gegenstand, den man sich vorstellen kann, ist eine Kugel. Nach Weyl (Hermann Weyl, *1885†1955) liegt *Symmetrie* vor, wenn man einen Gegenstand nach Vollzug einer gewissen Operation, sei es beispielsweise Translation oder Rotation, als genau denselben erachtet. Von wo aus betrachtet ich die Kugel auch ansehe, sie sieht von allen Seiten gleich aus.
Nun kann man gewisse Aussagen über *ganzrationale Funktionen* anhand einfacher Überlegungen treffen. Hat man bespielsweise eine Funktion, deren Exponenten ausschließlich **gerade** sind, liegt

Achsensymmetrie

vor.
Hat man andererseits eine Funktion, deren Exponenten ausschließlich **ungerade** sind, liegt

Punktsymmetrie

vor.
Sieht man sich die Beispiele in Abbildung (2.1) sowie (2.2) an, erkennt man eine *Symmetrie* bezüglich der y-Achse (*Achsensymmetrie* (2.1)) bzw. bezüglich des Ursprunges (*Punktsymmetrie* (2.2)). Sie entsprechen Drehungen um 180°. Warum beide von Bedeutung sein werden und einiges an Rechenarbeit ersparen können, wird sich noch offenbaren. Auch in anderen Naturwissenschaften sucht man zunächst nach *Symmetrien*, um sich die Arbeit zu erleichtern.

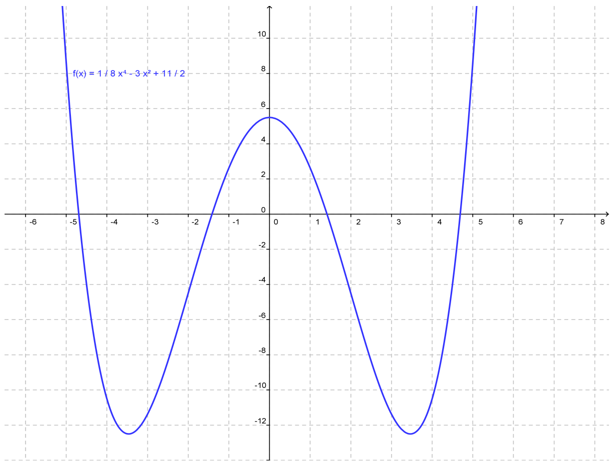

Abbildung 2.1: *Die achsensymmetrische Funktion* $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - 3x^2 + \frac{11}{2}$

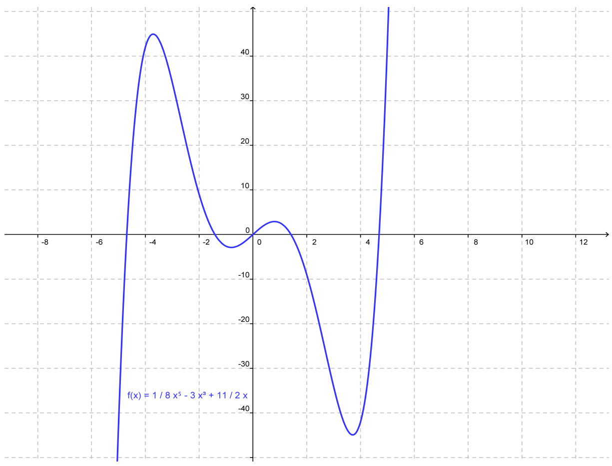

Abbildung 2.2: *Die punktsymmetrische Funktion* $f(x) = \frac{1}{8}x^5 - 3x^3 + \frac{11}{2}x$

Liegt **Achsensymmetrie** vor, ist der *linke Teil*, sprich im zweiten und dritten Quadranten bei den negativen x- und den positiven und negativen y-Werten, identisch dem *rechten Teil*, also dem ersten und vierten Quadranten bei positven x- und positiven sowie negativen y-Werten.

$$\text{Dann ist } f(x) = f(-x).$$

Im Fall von **Punktsymmetrie** ist der Graph sozusagen *positiv/negativ* gespiegelt, bzw., wie bereits erwähnt, um 180° gedreht. Der Verlauf im ersten Quadranten (alle Werte positiv) entspricht dem des dritten Quadranten (alle Werte negativ). Der Verlauf des Graphen im Vierten dann dem Zweiten Quadranten, falls der Graph dort verläuft. Deutlich sollte dies bei Betrachtung von Abbildung (2.2) werden.

$$\text{Hier ist dann: } -f(x) = f(-x).$$

Die Addition einer Konstanten verschiebt in allen Fällen, also nach Gleichung (1.1), wie auch schon bei den linearen Funktionen, den Graph entlang der y-Achse, welche auch *Ordinate* genannt wird. Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass die x-Achse auch *Abszisse* genannt wird. Betrachtet man beispielsweise Abbildung (1.1) etwas genauer, so liegt Punktsymmetrie, bezogen auf den Punkt (0/2) vor.

2.1.1 Nullstellen

Polynomfunktionen haben, abhängig vom Grad der höchsten Potenz, mehrere Nullstellen. So hat beispielsweise die Funktion (1.1) maximal **n** Nullstellen, die Funktion (1.2) maximal fünf. Die Funktion in Abbildung (2.1) hat maximal 4 Nullstellen. Addiere ich eine Konstante, sagen wir $+200 \rightarrow f(x) = \frac{1}{8}x^4 - 3x^2 + 200$, kommt sie nie mit der Abszisse (x-Achse) in Berührung, subtrahiere ich $-200 \rightarrow f(x) = \frac{1}{8}x^4 - 3x^2 - 200$, so hat sie nur noch zwei Nullstellen.

In den hier gerechneten Aufgaben kommt man größtenteils mit der pq-Formel (Gleichung (1.9)) zu einer Lösung. Natürlich sollte man aber auch faktorisieren können.

Das Lösungskonzept der *Substitution* ($x^2 = z$) wird in Kapitel (4) zur Lösung herangezogen. Die *Polynomdivision* wird weitestgehend im Unterricht behandelt.

2.1.2 Extremwerte und Wendepunkte

Hat man bei den *quadratischen Funktionen* einen Scheitelpunkt, so stellt dieser entweder den höchsten oder den niedrigsten Punkt der Funktion dar. Zur Visualisierung schaue man erneut auf Abbildung (1.2).
Polynomfunktionen haben mehrere solcher, so genannter **Extrempunkte**, die entweder ein relatives *Maximum* oder ein relatives *Minimum* darstellen. Setzt man die Ableitung einer Funktion $f(x)$, $f'(x) = 0$, auf die in Kapitel (3) ausführlich eingegangen wird, so bedeutet dies anschaulich, dass die Tangente in jenen Punkten keine Steigung besitzt, demnach *konstant* ist. Die Extrema bestimmt man durch *ableiten* bzw. *differenzieren* der Funktion und anschliessendem Nullsetzen der *Ableitung* $f'(x) = 0$.
Führt man ein erneutes Ableiten durch, setzt die erhaltene Funktion $f''(x) = 0$, erhält man die **Wendestellen**, zunächst jedoch nur die x-Werte. Die y-Werte erhält man durch Einsetzen in die ursprüngliche Funktion $f(x) = y$. Ist die Krümmung $f''(x) = 0$ in einem Punkt gleich Null, so *wendet* sich der Graph. Im Wendepunkt selbst gibt es keine Krümmung, es ändert sich ab dort nur die *Krümmungsrichtung*.
Dies soll in Kapitel (4) an einem Beipspiel verdeutlicht werden.

Kapitel 3

Die Ableitung

Die Ableitung einer Funktion gibt die *Steigung* im betrachteten Punkt wieder. Da Funktionen höheren Grades im Allgemeinen gekrümmt sind, kann man beispielsweise eine Gerade mitsamt Steigungsdreieck (Abbildung (3.3)) durch zwei benachbarte Punkte legen und einen der beiden immer näher auf den anderen zurücken lassen (Abbildung (3.1). Geraden, welche durch zwei Punkte einer anderen Funktion verlaufen, nennt man **Sekanten**. Wenn beide Punkte nahe genug aufeinander zugerückt wurden, verläuft die Gerade nur noch durch einen Punkt der Funktion. Geraden mit dieser Eigenschaft werden als *Tangenten* bezeichnet.
Die *Ableitung* einer Funktion entspricht der **momentanen Änderungsrate**.

3.1 Differenzenquotient

In Abbildung (3.1) möchte ich beispielsweise die Steigung der Funktion $f(x) = x^2$ im Punkt (2/4) wissen. Dazu lege ich durch den Punkt A (2/4) und B (0/0) eine Gerade und bestimme

$$m_{Sekante} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-0}{2-0} = 2 \tag{3.1}$$

was dem *Steigungsdreieck* in Abbildung (3.3) entspricht. Die so berechnete Sekantensteigung nennt man auch **mittlere Änderungsrate** oder **Diffe-**

renzenquotient.

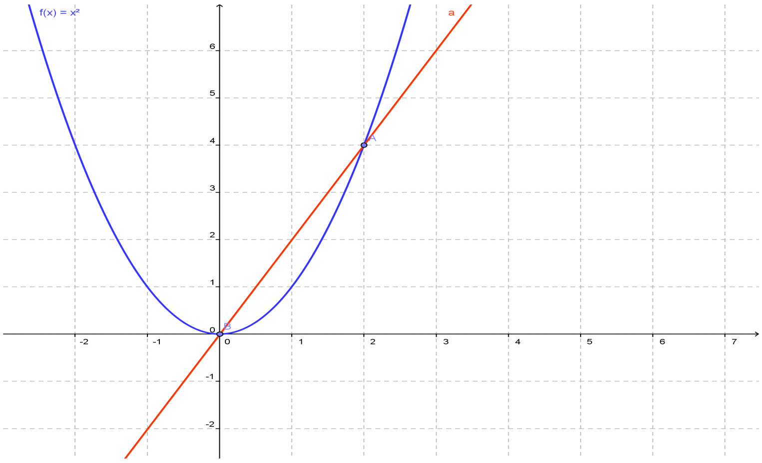

Abbildung 3.1: *Eine Steigungsgerade durch zwei benachbarte Punkte*

Die Steigung $m = 2$ ist jedoch nicht diejenige im gewünschten Punkt (2/4), denn die Gerade verläuft ja durch zwei Punkte. Man stellt sich leicht vor, wenn man statt B einen anderen Punkt zu Hilfe nimmt, dass die Gerade dann auch eine andere Steigung hat. Man lasse also Punkt B auf Punkt A zurücken (vergleiche Abbildung (3.2)).

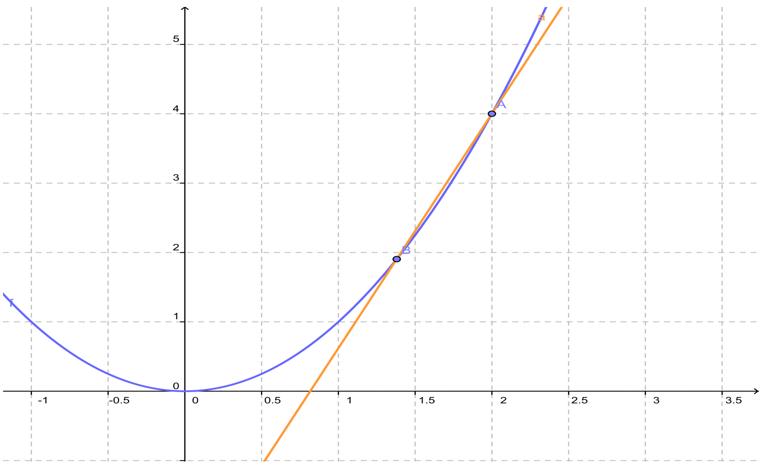

Abbildung 3.2: *Eine (andere) Steigungsgerade durch zwei näher zusammengerückte Punkte*

Je näher die Punkte aufeinander zurücken, umso kleiner wird das *Steigungsdreick*. Vereinigen sich beide Punkte zu einem, hat man gar **kein** Steigungsdreieck mehr. Wie aber soll dann die Steigung in dem Punkt bestimmt werden? Dazu greift man in die *mathematische Trickkiste* und führt eine so genannte *Grenzwertbetrachtung* durch. Man läßt die Werte im sogenannten *limes* gegen Null laufen.

3.2 Differentialquotient

Der y- Wert des Punktes A entspricht $f(x+h)$, der x Wert entspricht $x+h$. Punkt B hat folgende Koordinaten: $y = f(x)$ sowie $x = x$. Vergleiche dazu Abbildung (3.3).
Für die Grenzwertbetrachtung läßt man $h \to 0$ laufen. In mathematischer Sprache:

$$m_{Tangente} \equiv f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{x + h - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{3.2}$$

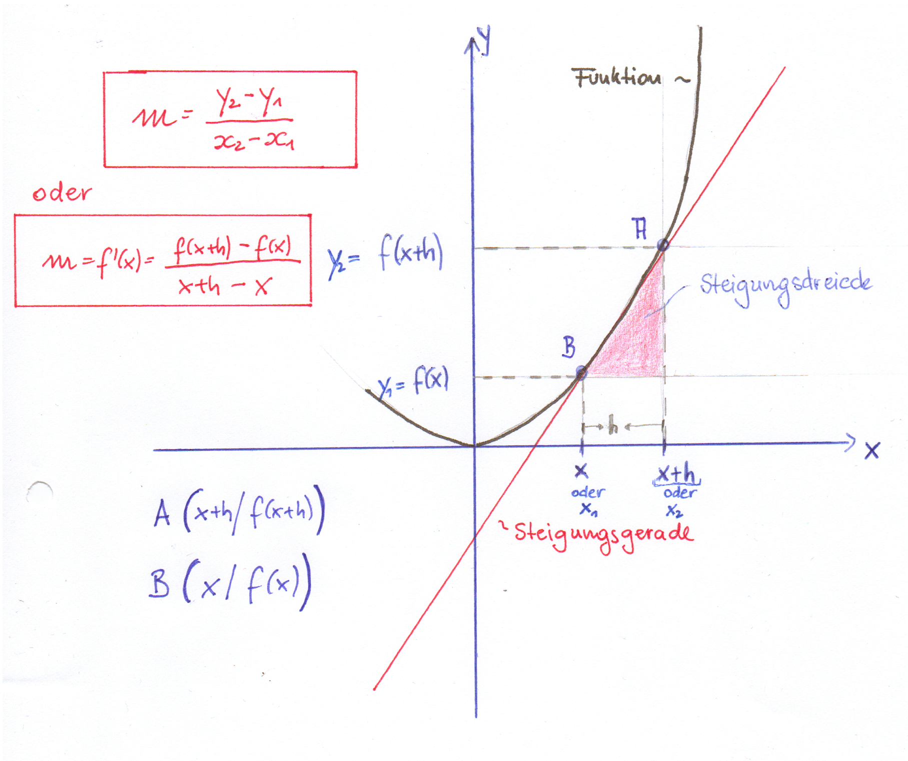

Abbildung 3.3: *Steigungsdreieck und Funktionswerte*

Wir wollen dies am Beispiel der Normalparabel $f(x) = x^2$ durchführen, um zu sehen, dass die auf den ersten Blick komplizierte Formel (3.2) letztlich doch recht einfach handzuhaben ist.
Da h gegen Null läuft und man bekanntermaßen nicht durch Null teilen darf, formt man so lange um, bis sich h kürzen läßt:

$$m_{Tangente} \equiv f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \tag{3.3}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} \tag{3.4}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2hx + h^2 - \cancel{x^2}}{h} \tag{3.5}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2hx + h^2}{h} \tag{3.6}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(2x + h)}{\cancel{h}} \tag{3.7}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} 2x + \cancel{h} \tag{3.8}$$
$$f'(x) = 2x \tag{3.9}$$

Dieses Verfahren nennt man im Gegensatz zur *mittleren Änderungsrate* die **momentane Änderungsrate** oder **Differentialquotient**,

$$m_{Tangente} = \frac{d}{dx} f(x) = f'(x) \tag{3.10}$$

wobei $\frac{d}{dx}$ das sogenannte *Differential* ist. Da wir an der Steigung im Punkt 2 interessiert waren, setze man als $x = 2$ in $f'(x) = 2x$ ein und erhält $f'(x) = 2 \cdot 2 = 4$. Die Steigung im Punkt (2/4) der Normalparabel $f(x) = x^2$ beträgt also $m = f'(2) = 4$. Den y-Achsenabschnitt erhalte ich durch Einsetzen des Punktes und der Steigung in die bekannte Geradengleichung $y = mx + b$, die aus der Einführungsphase I bekannt sein sollte, und erhalte als Geradengleihung $g(x) = y = 4x - 4$.

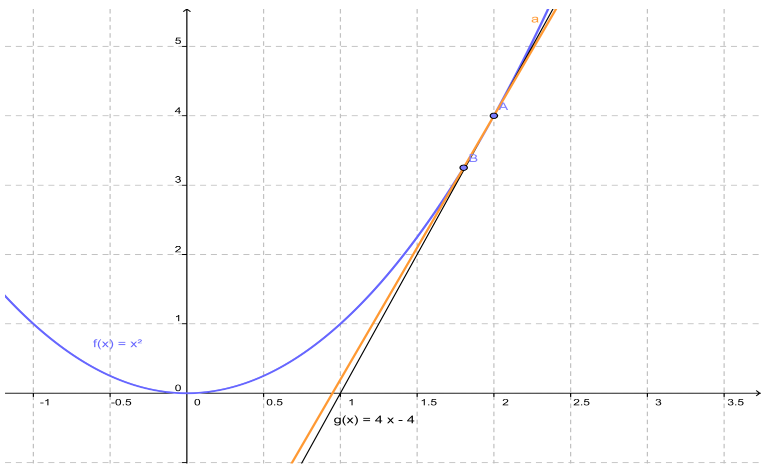

Abbildung 3.4: *Die beiden nähergerückten Punkte und die Steigungsgerade* $g(x) = 4x - 4$

In Abbildung (3.4) erkennt man deutlich, dass die durch die Punkte A un B gelegte Gerade immer mehr $g(x) = 4x - 4$ „ähnelt“, wenn sich die Punkt B auf Punkt A zubewegt und schließlich zu einem verschmelzen. Daher auch *momentane* Änderungsrate, weil in einem Punkt, und nicht wie bei der *mittleren*, zwischen zwei Punkten.

3.3 Beweis

In diesem Abschnitt führen wir den Beweis für alle Exponenten **n** für x^n, also für alle Funktionen, die Gleichung (1.1) entsprechen, durch. Da jetzt die Ableitung für $f(x) = x^2$ bekannt ist, und man nicht für jede Funktion eine solch aufwendige Rechnung, nämlich Gleichung (3.3) bis Gleichung (3.9), durchführen möchte, sucht man nach einer Methode: kurzum eine *Formel*.
Der Beweis für alle n (mathematisch:$\forall$ n) ist an dieser Stelle nur der Vollständigkeit halber für (besonders) Interessierte angegeben. Für weiterführende Rechnungen ist in jedem Fall aber das Ergebnis (Gleichung 3.24) wichtig und sollte verstanden sein.
Ansatz ist also folgender

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n}{h} \tag{3.11}$$

Dabei kann man den Zähler wie folgt schreiben

$$(x+h)^n = \sum_{k=0}^{n} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^{n-k} h^n \tag{3.12}$$

Der sogenannte **Binomialkoeffizient** $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ in Gleichung (3.12) ist dabei definiert als

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{3.13}$$

Das Ausrufezeichen steht dabei für *Fakultät* und bedeutet eine Multiplikation aufeinanderfolgender Zahlen, so ist $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.
Man berechnet zunächst die ersten drei Terme des Binomialkoeffizienten, setzt dann in die ersten drei Terme der Summe ein und schaut was passiert. Alle weiteren Terme der Summe $\sum_{k=0}^{n}$ bezeichnen wir hier mit $\mathcal{O}$, denn obgleich diese wegfallen werden, darf man sie selbstverständlich nicht

vernachlässigen. Mit

$$\binom{n}{0} = 1 \tag{3.14}$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n\cancel{(n-1)}\cancel{(n-2)}\ldots}{\cancel{(n-1)}\cancel{(n-2)}\ldots} = n \tag{3.15}$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)\cancel{(n-2)}\cancel{(n-3)}\ldots}{2!\cancel{(n-2)}\cancel{(n-3)}\ldots} = \frac{n^2-n}{2} \tag{3.16}$$

erhält man schließlich, wenn man in Gleichung (3.12) einsetzt:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[x^n h^0 + nx^{n-1}h^1 + \frac{n^2-n}{2}x^{n-2}h^2 + \mathcal{O} - x^n\right] \tag{3.17}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\cancel{x^n} + nx^{n-1}h + \frac{n^2-n}{2}x^{n-2}h^2 + \mathcal{O}\cancel{-x^n}\right] \tag{3.18}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[nx^{n-1}h + \frac{n^2-n}{2}x^{n-2}h^2 + \mathcal{O}\right] \tag{3.19}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[h\left(nx^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}x^{n-2}h + \mathcal{O}\right)\right] \tag{3.20}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\cancel{h}}\left[\cancel{h}\left(nx^{n-1} + \frac{n^2-n}{2}x^{n-2}h + \mathcal{O}\right)\right] \tag{3.21}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1} + \cancel{\frac{n^2-n}{2}x^{n-2}h} + \cancel{\mathcal{O}}\right) \tag{3.22}$$

$$= nx^{n-1} \tag{3.23}$$

Da in der Summe immer höhere Potenzen bzw. Ordnungen $\mathcal{O}$ von **h** auftreten, **h** aber im limes gegen Null geht, fallen diese Terme weg, denn $h^{irgendwas} = o$, wenn $h \to 0$. Daher haben auch nur die ersten drei Terme ausgereicht, um dies zu zeigen. Übrig bleibt letztlich:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} \tag{3.24}$$

Diese Formel ist von essentieller Bedeutung, denn mit ihr lassen sich alle **Polynomfunktionen** relativ einfach differenzieren! Ein Beispiel:

$$f(x) = x^n \qquad \rightarrow \qquad f'(x) = nx^{n-1} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= 4x^7 + 3x^6 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + x + 77,25698 && (3.26)\\
f'(x) &= 4 \cdot 7x^6 + 3 \cdot 6x^5 - \frac{1}{4} \cdot 4x^3 + \frac{2}{3} \cdot 3x^2 + 1 \cdot x^0 && (3.27)\\
f'(x) &= 28x^6 + 18x^5 + x^3 + 2x^2 + 1 && (3.28)
\end{aligned}$$

Hier wurde von der *Summenregel*, welche hier ohne Beweis angegeben wird, Gebrauch gemacht, und die besagt, dass die Ableitung einer summierten Funktion der Art von Gleichung (1.1) gleich der Summe der einzelnen Ableitungen ist. Mathematisch

$$f(x) = u(x) + v(x) \rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x) \tag{3.29}$$

Wichtig:
Die konstanten Zahlen (hier: $77,25698$) fallen dabei weg, da sie nicht mit x korrelliert sind. Differenziert man beispielsweise eine Gerade $g(x) = 3x + 5$ bekäme man ja mit der Ableitung die Steigung: $g'(x) = 3 = m$, was kümmert es *die Steigung*, wo die Gerade ihren y-Achsenabschnitt hat (hier eben bei 5). Es geht allerdings unzweifelhaft *Information* verloren, denn mit der Steigung allein kann man die Gerade ja durch jeden Punkt der y-Achse legen. Woher will man aber wissen, durch welchen sie tatsächlich verläuft?
M.a.W. verschiebt die Addition einer Konstanten die Funktion in Richtung der y-Achse, ändert aber nichts an der Steigung, welche durch $f'(x)$ berechnet wird.

Kapitel 4

Ein Rechenbeispiel

In diesem Abschnitt werden wir eine vollständige *Kurvendiskussion* an einem Beispiel durchführen. Das Beispiel ist so gewählt, dass man relativ einfach, m.a.W.: **ohne** den Gebrauch eines Taschenrechners, folgen kann. Im weiteren ist die Rechnung *Schritt für Schritt* dargestellt, so dass man diesen Abschnitt als *Anleitung* für andere Aufgaben benutzen kann.
Die Aufgabenstellung ist folgende:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 6x^2 + 11$

1a.) Liegen Symmetrien vor? Untersuche im weiteren die Funktion auf *Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte.*

1b.) Zeige: Die Funktion $g(x) = -4x^2 + 7$ geht durch die Wendepunkte der Funktion $f(x)$ und hat dort die selbe Steigung wie $f(x)$.

1c.) Berechne die Gleichungen der *Wendetangenten.*

1d.) Skizziere beide Graphen und die Wendetangenten in einem geeigneten Koordinatensystem.

4.1 Aufgabenteil 1a

4.1.1 Symmetrie

Zunächst kann man sagen, dass nur *gerade* Exponenten vorliegen. In diesem Fall spricht man also von **Achsensymmetrie** (vergleiche Kapitel (2.1) als auch Abbildung (2.1)).

4.1.2 Nullstellen

Als nächstes bestimmen wir mit Hilfe der *Substitutionsmethode* die **Nullstellen**. Dazu nennen wir $x^2 = z$ und ersetzen es in $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 6x^2 + 11 \rightarrow f(z(x)) = \frac{1}{4}z^2 - 6z + 11 \tag{4.1}$$

Nun kann man mit Gleichung (1.9), die auch als pq-Formel bekannt ist, die **Nullstellen** bestimmen.

$$\begin{aligned}
f(x) &= 0 && (4.2)\\
0 &= \frac{1}{4}z^2 - 6z + 11 \qquad | \cdot 4 && (4.3)\\
0 &= z^2 - 24z + 44 && (4.4)\\
z_{1/2} &= 12 \pm \sqrt{12^2 - 44} && (4.5)\\
z_{1/2} &= 12 \pm \sqrt{144 - 44} && (4.6)\\
z_{1/2} &= 12 \pm \sqrt{100} && (4.7)\\
z_{1/2} &= 12 \pm 10 && (4.8)\\
z_1 &= 2 \rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{2} && (4.9)\\
z_2 &= 22 \rightarrow x_{3/4} = \pm\sqrt{22} && (4.10)
\end{aligned}$$

Man erinnert sich an dieser Stelle [(4.9) und (4.10)], dass man $z = x^2$ gesetzt hat, man aber eigentlich an x interessiert ist. Man muss also nur noch aus z die Wurzel ziehen, denn $\sqrt{z} = \pm x$. In diesem Fall hat man die maximal mögliche Anzahl an **Nullstellen**:

$$NS_1(+\sqrt{2}/0) \quad NS_2(-\sqrt{2}/0) \quad NS_3(+\sqrt{22}/0) \quad NS_4(-\sqrt{22}/0)$$

4.1.3 Die Extremwerte

Nach Gleichung (3.24) berechnet sich die *erste Ableitung* zu:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4}x^4 - 6x^2 + 11 & (4.12) \\ f'(x) &= \frac{\cancel{4}}{\cancel{4}}x^3 - 6 \cdot 2x & (4.13) \\ f'(x) &= x^3 - 12x & (4.14) \end{aligned}$$

Möchte ich die **Extremwerte**, muss die Steigung der Tangenten in jenen Punkten Null betragen, denn von dort kann die Tangente entweder „nur steigen“ oder „nur fallen“. Abbildung (4.1) zeigt den Funktionsgraphen, dort sollte eben genanntes, graphisch dargestellt, auch erkennbar sein. Also setze ich $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 & (4.15) \\ x^3 - 12x &= 0 & (4.16) \\ x_1(x_{2/3}^2 - 12) &= 0 & (4.17) \\ \rightarrow x_1 &= 0 & (4.18) \\ x_{2/3}^2 - 12 &= 0 \qquad | + 12 & (4.19) \\ x_{2/3}^2 &= 12 \qquad |\sqrt{} & (4.20) \\ x_{2/3} &= \pm\sqrt{12} & (4.21) \end{aligned}$$

Wenn einer der Faktoren (hier: x_1) Null ist, so ist das Produkt ebenfalls Null (4.17). Dann muss nur noch der Term in der Klammer Null sein (4.19). Zu beachten ist nun, dass man sich nur die x-Werte der Extremwerte errechnet

hat! Woher aber bekommt man die y-Werte?
Hier erinnere man sich an die Geradengleichungen in der Einführungsphase I, denn dort war ja $f(x) = y$, warum sollte es bei *Polynomfunktionen* anders sein als bei *linearen Funktionen*? Um die y-Werte zu errechnen, muss ich also nur die x-Werte der Extrema in die Ausgangsfunktion $f(x)$ einsetzen.

$$f(x_1) = \frac{1}{4}x^4 - 6x^2 + 11 \tag{4.22}$$

$$f(0) = \frac{1}{4}0^4 - 6 \cdot 0^2 + 11 \tag{4.23}$$

$$f(0) = \cancel{\frac{1}{4}0^4} - \cancel{6 \cdot 0^2} + 11 \tag{4.24}$$

$$f(0) = 11 \tag{4.25}$$

Der zu $x = 0$ gehörende y-Wert ist also 11.
Nun setze ich $\sqrt{12}$ in $f(x)$, anschliessend müsste ich noch $-\sqrt{12}$ berechnen. Allerdings kann ich hier die *Achsensymmetrie* der Funktion nutzen, so dass ich nur einen, entweder $+\sqrt{12}$ oder $-\sqrt{12}$ zu berechnen brauche, der y-Wert beider x-Extremwerte wird (vergleiche Abbildung (4.1)) identisch sein (Prüfen!).

$$f(x_{2/3}) = \frac{1}{4}x^4 - 6x^2 + 11 \tag{4.26}$$

$$f(\pm\sqrt{12}) = \frac{1}{4}(\sqrt{12})^4 - 6(\sqrt{12})^2 + 11 \tag{4.27}$$

$$f(\pm\sqrt{12}) = \frac{144}{4} - 6 \cdot 12 + 11 \tag{4.28}$$

$$f(\pm\sqrt{12}) = 36 - 72 + 11 \tag{4.29}$$

$$f(\pm\sqrt{12}) = -25 \tag{4.30}$$

In (4.28) wurde von $\sqrt{12} \cdot \sqrt{12} = 12$ bzw. von $(\sqrt{12})^4 = 12 \cdot 12 = 144$ Gebrauch gemacht (und zwar ohne Taschenrechner). Die **Extremwerte** sind also:

$$EX_1(0/11) \quad EX_2(+\sqrt{12}/-25) \quad EX_3(-\sqrt{12}/-25)$$

Wenn man nun wissen möchte, ob es sich bei einem errechneten Extremwert um ein *Maximum* oder ein *Minimum* handelt, prüft man die sogenannte *hinreichende Bedingung*, für die man allerdings die zweite Ableitung der Funktion benötigt. Daher wird darauf erst im Abschnitt (4.1.5) eingegangen.

4.1.4 Die Wendepunkte

Für die Wendepunkte leite ich nun $f'(x)$, ebenfalls mit Hilfe von Gleichung (3.24) bzw. (4.11), ab.

$$f''(x) = \frac{d}{dx}f'(x) = \frac{d^2}{dx^2}f(x) = n(n-1)x^{n-2} \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{4}x^4 - 6x^2 + 11 && (4.32)\\ f'(x) &= x^3 - 12x && (4.33)\\ f''(x) &= 3x^2 - 12x^0 && (4.34)\\ f''(x) &= 3x^2 - 12 \cdot 1 && (4.35)\\ f''(x) &= 3x^2 - 12 && (4.36) \end{aligned}$$

Im Übrigen ist es nicht nur der Übersicht halber sinnvoll, bereits zu Beginn der gestellten Aufgabe die Funktion samt allen Ableitungen ((4.32), (4.33) und (4.36)) hinzuschreiben, denn untersucht man die Funktion auf Nullstellen, so ist $f(x) = 0$, untersucht man sie auf Extrema, so ist $f'(x) = 0$, letztlich ist für die Wendepunkte $f''(x) = 0$ (Man vergleiche Aufgabenstellung 1a.)).
In Gleichung (4.34) muss man sich an den *Vorkurs* zurückerinnern...
Irgendwas hoch Null ergibt immer 1: Auch $x^0 = 1$.
Nun muss ich, nach Kapitel (2.1.2), auch diese Funktion $f''(x) = 0$ setzen, denn nur dort besitzt der Graph keine *Krümmung* und verläuft ab da mit entgegengesetzter Krümmungsrichtung weiter. Sieht man sich die zur Aufgabe dazugehörige Abbildung (4.1) des Graphen an, sollte dies deutlich werden.

$$\begin{aligned} f''(x) &= 3x^2 - 12 = 0 && (4.37)\\ &= 3x^2 - 12 \qquad | + 12 && (4.38) \end{aligned}$$

$$3x^2 = 12 \quad | \cdot \frac{1}{3} \tag{4.39}$$
$$x^2 = \frac{12}{3} = 4 \quad |\sqrt{} \tag{4.40}$$
$$x_{1/2} = \pm 2 \tag{4.41}$$

Zu beachten ist auch hier, dass man sich nur die x-Werte der *Wendepunkte* errechnet hat! Woher aber bekommt man die y-Werte?
Auch hier setzt man in die Ausgangsfunktion ein $f(x) = y$, warum sollte es bei *Wendepunkten* anders sein als bei *Extrempunkten*? Um die y-Werte zu errechnen, muss ich also nur die x-Werte der Wendepunkte in die Ausgangsfunktion $f(x)$ einsetzen.

$$f(x_{1/2}) = \frac{1}{4}x^4 - 6x^2 + 11 \tag{4.42}$$
$$f(\pm 2) = \frac{1}{4}(2)^4 - 6(2)^2 + 11 \tag{4.43}$$
$$f(\pm 2) = \frac{16}{4} - 6 \cdot 4 + 11 \tag{4.44}$$
$$f(\pm 2) = 4 - 24 + 11 \tag{4.45}$$
$$f(\pm 2) = -9 \tag{4.46}$$

Die **Wendepunkte** sind also:

$$WP_1(+2/-9) \quad WP_2(-2/-9)$$

4.1.5 Hinreichende Bedingung für Extrema und Wendepunkte

Wenn man also wissen möchte, ob es sich bei einem errechneten Extremwert um ein *Maximum* oder ein *Minimum* handelt, prüft man die sogenannte *hinreichende Bedingung*. Da man für diese die zweite Ableitung benötigt, kommen wir erst jetzt, nach der Berechnung der Wendepunkte, dazu zu prüfen, ob es sich um *Maxima* oder *Minima* handelt. Prinzipiell ist das Vorgehen relativ einfach.
Man setzt den errechneten x-Wert des Extrempunktes in die zweite Ablei-

tung $f''(x)$ ein und schaut, ob der Funktionswert größer oder kleiner Null ist. Ist der Wert größer Null, handelt es sich um ein Minimum, ist er hingegen kleiner Null, handelt es sich um ein Maximum. Ist er identisch Null, handelt es sich um einen *Sattelpunkt*.
Ein Sattelpunkt steigt/fällt, anschaulich gesprochen, in derselben Richtung weiter, aus der gekommen ist, das Vorzeichen der Steigungstangente ändert sich nicht. Ein Sattelpunkt ist also ein Wendepunkt mit Steigung Null. Bei einem Minimum/Maximum, ändert sich das Vorzeichen der Tangente hingegen.
Die *hinreichende Bedingung* für Wendepunkte ergibt sich über die dritte Ableitung der Funktion $f(x)$, nämlich $f'''(x)$. In hier gestellter Aufgabe wäre $f'''(x) = 6x$. Die Vorgehensweise ist analog zur *hinreichenden Bedingung* für Extrema und wird in der Abiturprüfung verlangt.

4.2 Aufgabenteil 1b

Um zu zeigen, dass die Funktion $g(x) = -4x^2 + 7$ durch die Wendepunkte von Funktion $f(x)$ geht, setzt man die in Abschnitt (4.1.4) berechneten Wendepunkte einfach in $g(x)$ ein.
Wenn eine *wahre* Aussage herauskommt, hat man gezeigt, dass $g(x)$ durch die Wendepunkte $(\pm 2/-9)$ von $f(x)$ verläuft.

$$g(x) = -4x^2 + 7 \tag{4.47}$$
$$-9 = -4 \cdot (\pm 2)^2 + 7 \tag{4.48}$$
$$-9 = -4 \cdot 4 + 7 \tag{4.49}$$
$$-9 = -16 + 7 = -9 \qquad \surd \tag{4.50}$$

Das Ergebnis ist demnach eine wahre Aussage, denn $-9 = -9$ und bedeutet, dass die Funktion $g(x)$ durch die beiden Wendepunkte von $f(x)$ verläuft. Auch hier wurde *Symmetrie*, nämlich die der quadratischen Funktion $g(x)$, ausgenutzt, denn $(\pm x)^2$ ist **immer positiv**.
Nun ist zu zeigen, dass die Steigung in den Wendepunkten von $f(x)$ der

Steigung in den beiden Punkten des Graphen $g(x)$ entspricht.

$$f'(x) = x^3 - 12x \tag{4.51}$$
$$f'(+2) = 2^3 - 12 \cdot 2 = -16 \tag{4.52}$$
$$f'(-2) = (-2)^3 - 12 \cdot (-2) = 16 \tag{4.53}$$

Da es zwei Tangenten gibt, sollten sie im Falle von vorhandenen Symmetrien auch betragsgleich sein. Eine der beiden *steigt*, die andere *fällt* in gleichem Maße (vergleiche Abbildung (4.3)).
Nun errechnen wir die Steigung in den beiden Punkten mit der Ableitung der anderen Funktion $g(x)$. Sie sollte exakt die Gleiche sein.

$$g(x) = -4x^2 + 7 \tag{4.54}$$
$$g'(x) = -2 \cdot 4x = -8x \tag{4.55}$$
$$g'(+2) = -8 \cdot 2 = -16 \tag{4.56}$$
$$g'(-2) = -8 \cdot (-2) = 16 \tag{4.57}$$

Das Ergebnis überrascht nicht! Abbildung (4.2) als auch Abbildung (4.3) verdeutlichen den Sachverhalt.

4.3 Aufgabenteil 1c

Um nun die Gleichungen der *Wendetangenten* zu bestimmen, bedienen wir uns der bereits in Abschnitt (4.2) berechneten *Steigungen* $f'(x) = \pm 16$ in den Wendepunkten $(\pm 2/-9)$ von $f(x)$. Es ist nebenbei nicht unüblich, solche Aufgaben zu stellen, in der man ein bereits errechnetes Ergebnis verwenden kann.
Mit den beiden Punkten und der in (4.52) und (4.53) errechneten Steigung ergeben sich die beiden Tangentengleichungen mit $y = mx + b$ zu.

$$h_1(x) = -16x + 23 \qquad h_2(x) = 16x + 23$$

Dabei ist $h_1(x)$ die *rechte* Wendetangente und $h_2(x)$ die *linke* Wendetangente, dargestellt in Abbildung (4.3) in Abschnitt (4.4.1).

4.4 Aufgabenteil 1d

4.4.1 Skizzen des Graphen

Hat man alle geforderten Punkte in Aufgabenteil (4.1) berechnet, kann man diese in einem cartesischen Koordinatensystem eintragen. Anschließend verbindet man sie in der Weise, welche am gescheitesten scheint (Abbildung 4.1). Eigentlich gibt es nur eine Möglichkeit, wenn man korrekt gerechnet hat, den Graphen *richtig* zu zeichnen, und keine *falsche*, da man ja seine Extrema und Nullstellen *nur* in einer **sinnvollen** Weise verbinden kann.

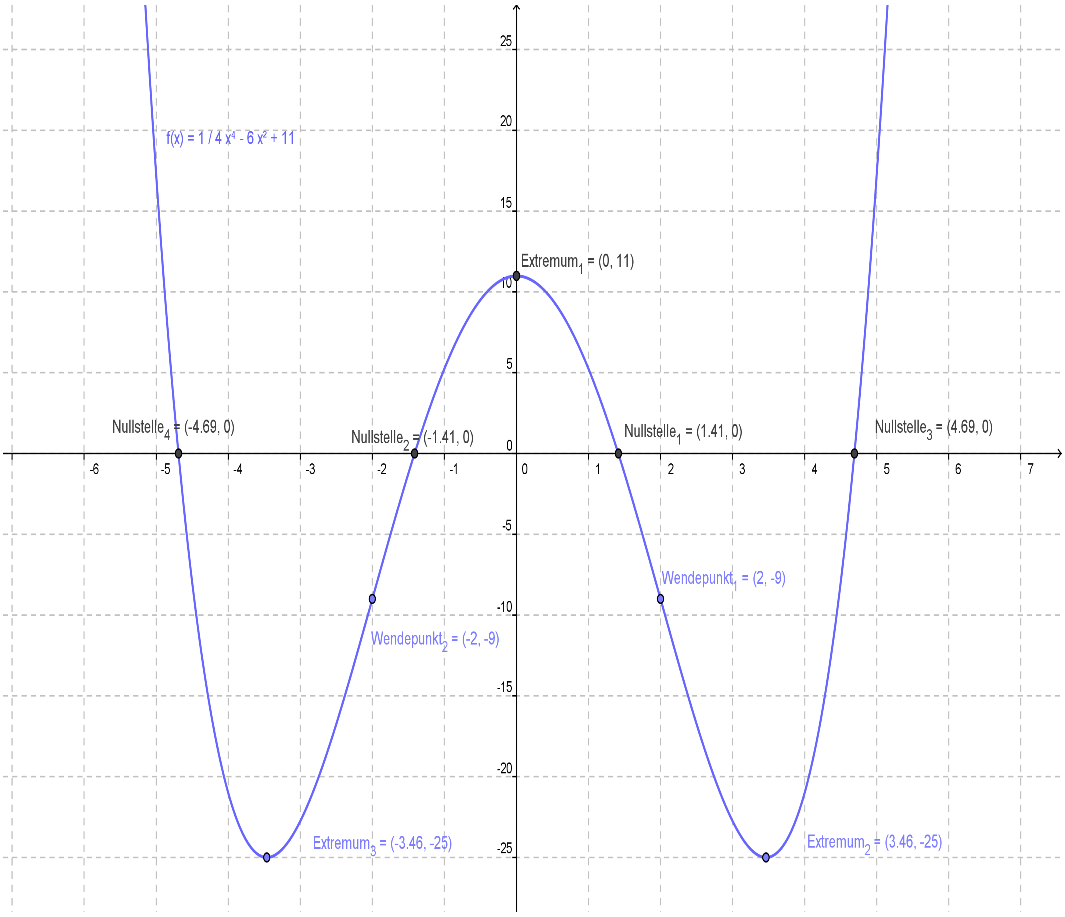

Abbildung 4.1: *Aufgabenteil 1a: Der Graph der Funktion* $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 6x^2 + 11$*, samt Nullstellen, Extrema und Wendepunkten*

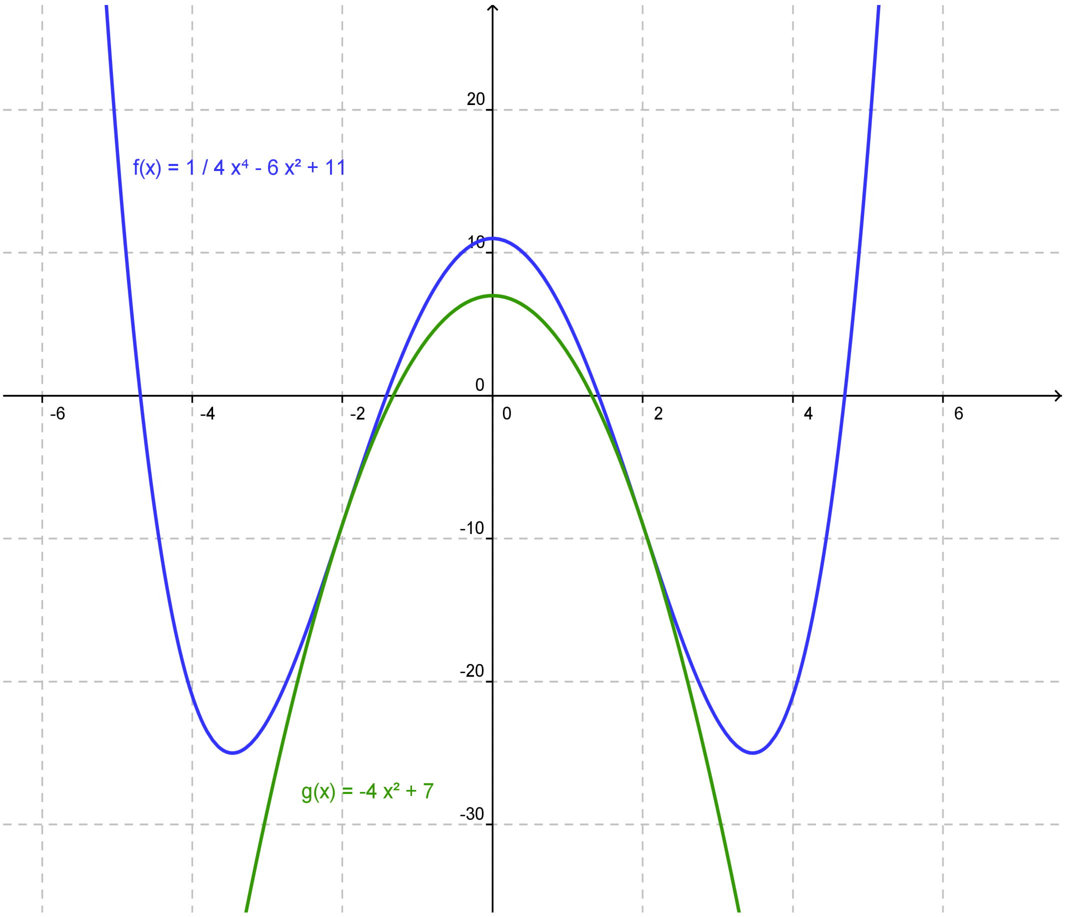

Abbildung 4.2: *Aufgabenteil 1b: Die Graphen der Funktionen* $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 6x^2 + 11$ *und* $g(x) = -4x^2 + 7$, *die sich nur in den Wendepunkten berühren*

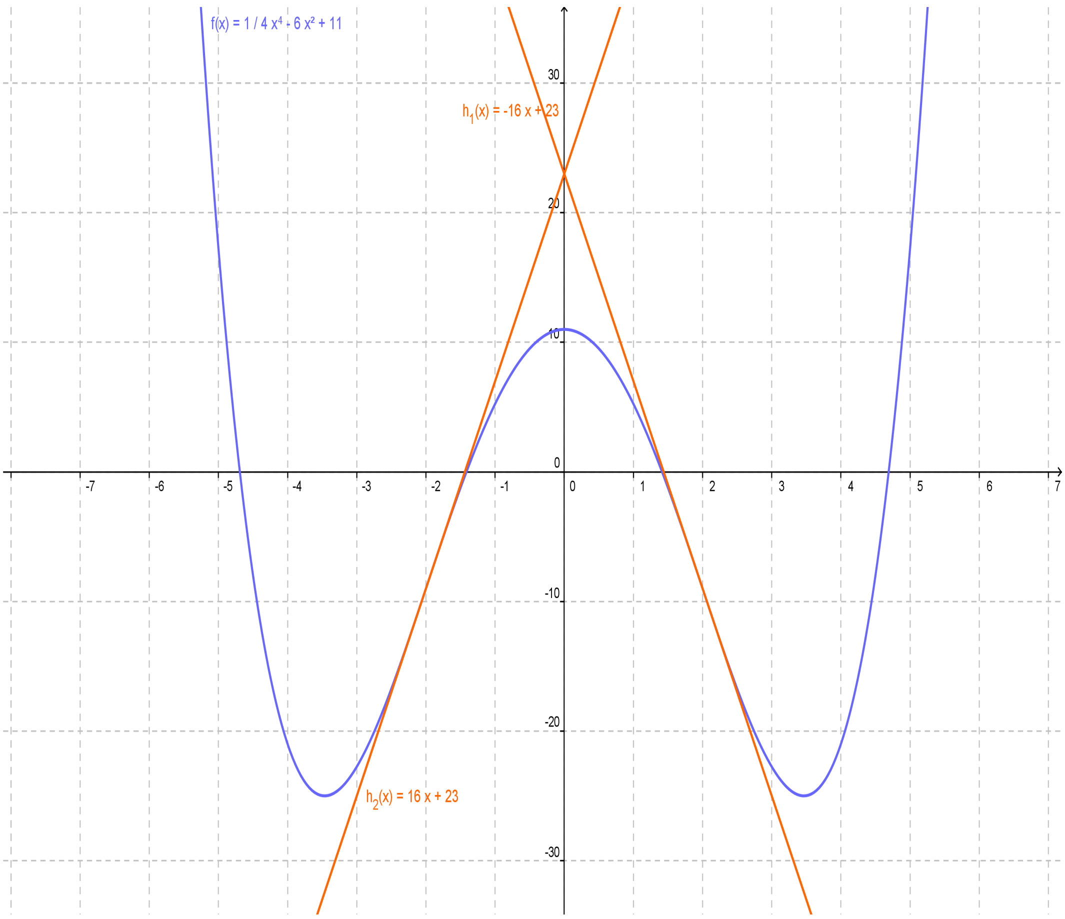

Abbildung 4.3: *Aufgabenteil 1c: Der Graph der Funktion* $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 6x^2 + 11$, *samt den beiden Wendetangenten*

Abbildungsverzeichnis