Goethe-Universität Frankfurt
Fachbereich Physik

Lehrende: Prof. Dr. Roser Valentí, Raum 01.130
Übungsgruppenleitung: Karim Zantout, Room 01.142

Frankfurt, 23.01.2020

Einführung in die Theoretische Festkörperphysik

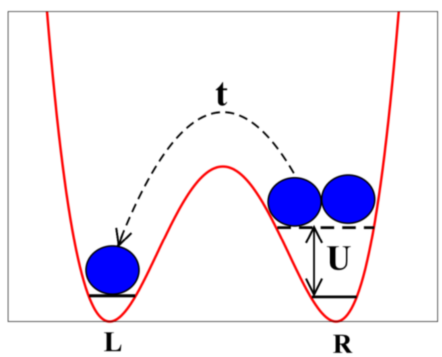
Wintersemester 2019/20

Blatt 12

(Abgabe: 03.02.2020)

Aufgabe 1 (**Potential mit zwei Mulden**) (10 Punkte)

Wir betrachten ein quantenmechanisches System von Teilchen, welche sich in einem Potential mit zwei Mulden aufhalten.



a) Wir betrachten zunächst den Fall, dass sich zwei Bosonen (ohne Spin) im Potential befinden.
- Wie lauten alle möglichen Fock-Zustände?
- Geben Sie den symmetrisierten Zweiteilchenzustand an, der sich aus den Einteilchenzuständen ergibt, wenn sich beide Bosonen in der linken Mulde aufhalten.

b) Nun betrachten wir Fermionen mit Spin $s = 1/2$ im oben gezeigten Potential.
- Wie viele Fermionen sind in diesem System maximal erlaubt?
- Wie lauten alle möglichen Fock-Zustände, wenn sich zwei Fermionen im Potential aufhalten?
- Wie lauten die möglichen Fock-Zustände, wenn die beiden Fermionen die gleiche Spinausrichtung haben?
- Geben Sie den antisymmetrisierten Zweiteilchenzustand an, der sich aus den Einteilchenzuständen ergibt, wenn sich beide Fermionen (mit unterschiedlichen Spins) in der linken Mulde aufhalten.

Wir nehmen nun an, dass das System durch den Hamiltonoperator $H = T + V$ beschrieben wird. T beschreibt das sogenannte Hüpfen der Teilchen zwischen den Potentialmulden, während V die Wechselwirkungsenergie (typischerweise Coulomb-Abstoßung) zweier Teilchen in derselben Potentialmulde ausdrückt (siehe Illustration).

Die Bosonen werden durch die Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren $b_\alpha^\dagger$ bzw. b_α mit $\alpha = L, R$ beschrieben. Die einzelnen Terme des Hamiltonoperators lauten dann ($t > 0$)

$$T = -t(b_L^\dagger b_R + b_R^\dagger b_L), \quad V = U \sum_\alpha \frac{n_\alpha(n_\alpha - 1)}{2} \qquad \text{mit} \quad n_\alpha = b_\alpha^\dagger b_\alpha.$$

Bei den Fermionen muss der Spin als zusätzlicher Freiheitsgrad berücksichtigt werden, so dass sie durch $c^\dagger_{\alpha,\sigma}$ und $c_{\alpha,\sigma}$ beschrieben werden können. Der Hamiltonoper beinhaltet in diesem Fall ($t > 0$)

$$T = -t \sum_\sigma (c^\dagger_{L,\sigma} c_{R,\sigma} + c^\dagger_{R,\sigma} c_{L,\sigma}), \quad V = U \sum_\alpha n_{\alpha,\uparrow} n_{\alpha,\downarrow} \qquad \text{mit} \quad n_{\alpha,\sigma} = c^\dagger_{\alpha,\sigma} c_{\alpha,\sigma}.$$

c) Berechnen Sie folgende Kommutatoren:

- Für Bosonen: $[T, n_\alpha]$, $[V, n_\alpha]$
- Für Fermionen: $[T, n_{\alpha,\sigma}]$, $[V, n_{\alpha,\sigma}]$

Zeigen Sie, dass die Gesamtteilchenzahl N eine Erhaltungsgröße ist. Diese lautet:

- Für Bosonen: $N = \sum_\alpha n_\alpha$
- Für Fermionen: $N = \sum_{\alpha,\sigma} n_{\alpha,\sigma}$

d) Schreiben Sie die Matrixelemente des Hamiltonoperators in der Fock-Basis für den Fall aus a) mit zwei Bosonen auf.

Ermitteln Sie die Energieeigenwerte und diskutieren Sie die Eigenvektoren in den beiden Grenzfällen $\frac{U}{t} \to 0$ und $\frac{U}{t} \to \infty$.