Goethe-Universität Frankfurt am Main
Prof. Dr. Dirk H. Rischke
Sommersemester 2021

Ausgabedatum: 25.06.2021
Abgabedatum: 09.07.2021

Quantenfeldtheorie II – Aufgabenblatt 6

Übungsleitung: Alexander Stegemann – stegemann@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabe H19[1]

Darstellungen von $SU(3)$ und $SO(3)$ (4 + 3 + 10 + 3 + 10 = 30 Punkte)

Ein Element der speziellen unitären Gruppe $SU(3)$ kann in der fundamentalen Darstellung geschrieben werden als

$$U = \exp\left(-\mathrm{i}\alpha_a T_a\right) \tag{1}$$

mit den reellen Parametern α_a und den Generatoren $T_a = \frac{\lambda_a}{2}$ für $a \in \{1, \ldots, 8\}$, wobei λ_a die a-te Gell-Mann-Matrix bezeichnet. Durch komplexe Konjugation von U erhält man den Ausdruck für das Element in der konjugierten Darstellung, $\bar{U}$.

(i) Zeigen Sie, dass die Generatoren in der konjugierten Darstellung durch $\bar{T}_a = -T_a^*$ gegeben sind und dass diese die Kommutatorrelation $[\bar{T}_a, \bar{T}_b] = \mathrm{i} f_{abc} \bar{T}_c$ erfüllen.

(ii) Zwei Darstellungen einer Gruppe werden als äquivalent bezeichnet, wenn sie durch eine Ähnlichkeitstransformation miteinander zusammenhängen. Zeigen Sie, dass

$$\bar{T}_a = S T_a S^{-1}, \qquad a \in \{1, \ldots, 8\} \tag{2}$$

gelten muss, falls fundamentale und konjugierte Darstellung äquivalent sind, d. h. falls eine reguläre Matrix S existiert mit $\bar{U} = S U S^{-1}$.

(iii) Zeigen Sie, dass genau dann eine reguläre Matrix S existiert, die (2) erfüllt, wenn die Eigenwerte der Generatoren T_a ausschließlich paarweise als $\{\pm\lambda_{a,i}\}$ auftreten. Zeigen Sie weiterhin, dass aus (2) folgt, dass die symmetrischen Strukturkonstanten d_{abc} verschwinden.

(iv) Zeigen Sie, dass für $SU(3)$ fundamentale und konjugierte Darstellung nicht äquivalent sind. Zeigen Sie darüber hinaus, dass dies aber für $SU(2)$ der Fall ist. Geben Sie explizit die Matrix S an und zeigen Sie, dass $d_{abc} = 0$.

Betrachten Sie nun folgende Darstellungen eines Elements der speziellen orthogonalen Gruppe $SO(3)$,

$$O = \exp\left(-\mathrm{i}\theta\, \hat{\vec{n}} \cdot \vec{L}\right), \tag{3}$$

$$\tilde{O} = \exp\left(-\mathrm{i}\theta\, \hat{\vec{n}} \cdot \vec{J}\right), \tag{4}$$

[1] Aufgabe H19 basiert auf Material von F. Divotgey und J. Eser sowie auf Material aus D. Atkinson, P. W. Johnson, *Quantum Field Theory*.

wobei

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \qquad L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

und

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Darüber hinaus bezeichnen θ einen reellen Parameter und $\hat{\vec{n}}$ einen (reellen) dreidimensionalen Einheitsvektor.

(v) Zeigen Sie, dass die beiden obigen Darstellungen der $SO(3)$ äquivalent sind, d. h. finden Sie eine reguläre Matrix S mit $\tilde{O} = SOS^{-1}$. Nutzen Sie Ihr Ergebnis, um zu zeigen, dass

$$\exp\left(-\mathrm{i}\theta\, \hat{\vec{n}} \cdot \vec{J}\right) = \mathbb{1}_3 - \mathrm{i}(\hat{\vec{n}} \cdot \vec{J}) \sin(\theta) + (\hat{\vec{n}} \cdot \vec{J})^2 \,[\cos(\theta) - 1]. \tag{7}$$