Goethe-Universität Frankfurt am Main
Prof. Dr. Dirk H. Rischke
Sommersemester 2021

Ausgabedatum: 11.06.2021
Abgabedatum: 25.06.2021

Quantenfeldtheorie II – Aufgabenblatt 5

Übungsleitung: Alexander Stegemann – stegemann@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabe H18.1[1]

$O(N)$-Modell und explizite Symmetriebrechung (10 + 5 + 5 = 20 Punkte)

Betrachten Sie die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\vec{\phi}\cdot\partial^\mu\vec{\phi} - V(\vec{\phi}, H), \tag{1}$$

wobei

$$\vec{\phi} = (\phi_1, \ldots, \phi_N)^{\mathrm{T}} \tag{2}$$

ein N-komponentiges, reelles Skalarfeld bezeichnet. Das Potential $V(\vec{\phi}, H)$ sei gegeben durch

$$V(\vec{\phi}, H) = \frac{m^2}{2}\vec{\phi}\cdot\vec{\phi} + \frac{\lambda}{N}(\vec{\phi}\cdot\vec{\phi})^2 - H\phi_1. \tag{3}$$

Für $H = 0$ ergibt sich die Situation aus Abschnitt 7.2 der Vorlesung: $V(\vec{\phi}, 0)$ (und somit $\mathcal{L}$) ist invariant unter $O(N)$-Transformationen des Feldes $\vec{\phi}$. Im Falle $m^2 > 0$ ist der Grundzustand durch $\vec{\phi}_0 = 0$ gegeben – dieser ist ebenfalls invariant unter $O(N)$-Transformationen. Im Falle $m^2 < 0$ kann der Grundzustand o. B. d. A. als $\vec{\phi}_0 = (\phi_0, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$ gewählt werden, wobei $\phi_0 = \sqrt{-Nm^2/(4\lambda)}$. Die $O(N)$-Symmetrie ist *spontan gebrochen* zu $O(N-1)$.

Für $H \neq 0$ ist obige Lagrange-Dichte nicht mehr invariant unter $O(N)$-Transformationen. Allerdings existiert eine residuale $O(N-1)$-Symmetrie im von $\phi_2, \ldots, \phi_N$ aufgespannten Unterraum. Diese Situation bezeichnet man als *explizite Brechung* der $O(N)$-Symmetrie zu $O(N-1)$. Im Folgenden beschränken wir uns auf den Fall $H > 0$.

(i) Bestimmen Sie die Minima des Potentials $V(\vec{\phi}, H)$ für die Fälle $m^2 > 0$ und $m^2 < 0$. Skizzieren Sie das Potential als Funktion von ϕ_1.

(ii) Betrachten Sie den Fall $m^2 < 0$. Setzen Sie die Zerlegung $\vec{\phi} = \vec{\phi}_0 + \vec{\phi}'$ in die Lagrange-Dichte ein und bestimmen Sie die Massen der Anregungen um den Grundzustand.

(iii) Bestimmen Sie für $N = 4$ die Parameter m^2, λ und H so, dass Sie $\phi_0 = f_\pi = 93\,$MeV (Pion-Zerfallskonstante), $m_\pi = 139\,$MeV und $m_\sigma = 600\,$MeV erhalten.

[1] Aufgabe H18.1 basiert auf Material von F. Divotgey und J. Eser.

Aufgabe H18.2[2]

$U(1)$-Modell in Polarkoordinaten (10 Punkte)

Betrachten Sie die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}(\Phi^*, \Phi) = \partial_\mu \Phi^* \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^* \Phi - \lambda (\Phi^* \Phi)^2 \tag{4}$$

für ein (wechselwirkendes) komplexes Skalarfeld $\Phi(X)$, wobei $m^2 < 0$. Nutzen Sie die folgende Darstellung in Polarkoordinaten,

$$\Phi(X) = [\Phi_0 + \rho(X)]\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(X)}, \tag{5}$$

um die Lagrange-Dichte als Funktion der radialen Anregung $\rho(X)$ sowie der polaren Anregung $\theta(X)$ zu schreiben. Bestimmen Sie die Massen der beiden Anregungen.

[2]Aufgabe H18.2 basiert auf Material von F. Divotgey und J. Eser.