Goethe-Universität Frankfurt am Main
Prof. Dr. Dirk H. Rischke
Sommersemester 2021

Ausgabedatum: 14.05.2021
Abgabedatum: 28.05.2021

Quantenfeldtheorie II – Aufgabenblatt 3

Übungsleitung: Alexander Stegemann – stegemann@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabe H16[1]

Feynman-Regeln für QED (2 + 4 + 24 = 30 Punkte)

Sie haben in der Vorlesung die Lagrange-Dichte der Quantenelektrodynamik (QED) kennengelernt,

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QED}} = \bar{\psi}(\mathrm{i}\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{\mathrm{GF}}. \tag{1}$$

mit der kovarianten Ableitung $D_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i}eA_\mu$. Dabei stellt $A^\mu(X)$ das Photon-Feld dar, $\psi(X)$ bzw. $\bar{\psi}(X)$ bezeichnen Elektron bzw. Positron. Der elektromagnetische Feldstärketensor ist gegeben durch $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. $\mathcal{L}_{\mathrm{GF}}$ bezeichnet den eichfixierenden Term.

(i) Schreiben Sie obige Lagrange-Dichte als Summe eines freien und eines wechselwirkenden Anteils,

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QED}} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\mathrm{int}}. \tag{2}$$

(ii) Gemäß den Ergebnissen aus Kapitel 5 des Skripts lässt sich das erzeugende Funktional für den freien Anteil in kovarianter Eichung schreiben als

$$Z_{0(\lambda)}[J_\mu, \bar{\eta}, \eta] = \exp\left\{\int \mathrm{d}^4X\,\mathrm{d}^4Y\,\left[-\frac{\mathrm{i}}{2}J_\mu(X)\Delta^{\mu\nu}_{\mathrm{F}(\lambda)}(X-Y)J_\nu(Y) - \mathrm{i}\bar{\eta}(X)S_{\mathrm{F}}(X-Y)\eta(Y)\right]\right\}. \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass sich das erzeugende Funktional der QED damit darstellen lässt als

$$Z_{\mathrm{QED}(\lambda)}[J_\mu, \bar{\eta}, \eta] = \mathcal{N}\,\exp\left[-\mathrm{i}e\int \mathrm{d}^4Y\,\mathrm{i}\frac{\delta}{\delta\eta_\alpha(Y)}\,\gamma^\mu_{\alpha\beta}\,\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta J^\mu(Y)}\,\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}_\beta(Y)}\right]\,Z_{0(\lambda)}[J_\mu, \bar{\eta}, \eta]. \tag{4}$$

(iii) Entwickeln Sie $Z_{\mathrm{QED}(\lambda)}$ bis zu zweiter Ordnung in e und wählen Sie die Normierungskonstante $\mathcal{N}$ so, dass $Z_{\mathrm{QED}(\lambda)}[0,0,0] = 1$. Stellen Sie die Feynman-Regeln für QED auf und stellen Sie damit Ihr Ergebnis graphisch dar.

[1] Aufgabe H16 basiert auf Material von F. Divotgey und J. Eser.