Goethe-Universität Frankfurt am Main
Prof. Dr. Dirk H. Rischke
Sommersemester 2021

Ausgabedatum: 30.04.2021
Abgabedatum: 14.05.2021

Quantenfeldtheorie II – Aufgabenblatt 2

Übungsleitung: Alexander Stegemann – stegemann@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabe H15[1]

Greensche Funktionen des Klein-Gordon-Operators (3 + 6 + 15 + 6 = 30 Punkte)

In Abschnitt 6.3 der Vorlesung haben Sie die unterschiedlichen Greenschen Funktionen des Klein-Gordon-Operators verwendet. Diese erfüllen die Relation

$$\left(\Box_x + m^2\right) G(X;Y) = \delta^{(4)}(X-Y). \tag{1}$$

(i) Verwenden Sie Gleichung (1), um $\tilde{G}(K;Q)$, zu bestimmen.

(ii) Mit dem Ergebnis aus (i) kann man schreiben

$$G(X;Y) = -\int \frac{\mathrm{d}^4K}{(2\pi)^4}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}K\cdot(X-Y)} \frac{1}{K^2-m^2}. \tag{2}$$

Erläutern Sie, welche Problematik mit diesem Ausdruck einhergeht und wie diese behandelt werden kann. Betrachten Sie dazu konkret die avancierte sowie die retardierte Greensche Funktion, also

$$G_{\mathrm{adv}}(X;Y) = -\int \frac{\mathrm{d}^4K}{(2\pi)^4}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}K\cdot(X-Y)} \frac{1}{K^2-m^2-\mathrm{i}\eta k_0}, \tag{3}$$

$$G_{\mathrm{ret}}(X;Y) = -\int \frac{\mathrm{d}^4K}{(2\pi)^4}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}K\cdot(X-Y)} \frac{1}{K^2-m^2+\mathrm{i}\eta k_0}, \tag{4}$$

wobei $\eta > 0$ und $|\eta| \ll 1$. Beschreiben Sie, was der zusätzliche Term $\mp\mathrm{i}\eta k_0$ im Nenner des Integranden bewirkt. Erläutern Sie, warum dies gleichwertig zur Vorschrift aus Gleichung (6.85) im Skript ist (dort lautet der zusätzliche Term $\mp\,\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(k_0)\eta$). Fällt Ihnen eine weitere mögliche Formulierung ein?

(iii) Lösen Sie in den Gleichungen (3) und (4) das k_0-Integral mit Hilfe des Residuensatzes. Welcher Zusammenhang besteht zwischen G_{adv} und G_{ret}? Überprüfen Sie, dass $G_{\mathrm{adv}}(X;Y) \sim \theta(y_0 - x_0)$ und $G_{\mathrm{ret}}(X;Y) \sim \theta(x_0 - y_0)$, wie in der Vorlesung behauptet. Überprüfen Sie weiterhin Gleichung (6.88) aus dem Skript, nämlich

$$\mathrm{i}G_{\mathrm{adv}}(X;Y) - \mathrm{i}G_{\mathrm{ret}}(X;Y) = \int \frac{\mathrm{d}^3\vec{k}}{(2\pi)^3 2E_k} \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}K\cdot(X-Y)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}K\cdot(X-Y)}\right], \tag{5}$$

[1] Aufgabe H15 basiert auf Material von F. Divotgey und J. Eser.

wobei $(K^\mu) = (E_k, \vec{k})^{\mathrm{T}}$.

(iv) Betrachten Sie zum Schluss die Feynman-Vorschrift zur Verschiebung der Pole, nämlich

$$G_{\mathrm{F}}(X;Y) = -\int \frac{\mathrm{d}^4K}{(2\pi)^4}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}K\cdot(X-Y)}\frac{1}{K^2 - m^2 + \mathrm{i}\eta}, \tag{6}$$

wobei erneut $\eta > 0$ und $|\eta| \ll 1$. Erläutern Sie, was der Term $+\mathrm{i}\eta$ im Nenner des Integranden bewirkt. Führen Sie das k_0-Integral mit Hilfe des Residuensatzes aus.