

Quantenfeldtheorie I – Aufgabenblatt 7

Übungsleitung: Alexander Stegemann – stegemann@itp.uni-frankfurt.de

Präsenzübung

Aufgabe P7

Skaleninvarianz (III)

In den Aufgaben H3.2 und P4.1 haben Sie bereits Skalentransformationen eines skalaren Felds $\phi(X)$ untersucht. Diese sind gegeben durch

$$X^\mu \longrightarrow X'^\mu = \lambda X^\mu, \quad (1)$$

$$\phi(X) \longrightarrow \phi'(X') = \lambda^{-d} \phi(X), \quad (2)$$

mit $d, \lambda \in \mathbb{R}^+$.

- (i) Untersuchen Sie nun in $D + 1$ Dimensionen (mit $D \in \mathbb{N}^+$), unter welchen Bedingungen die Wirkung des reellen Klein-Gordon-Felds skaleninvariant ist. Was ergibt sich, wenn Sie zur Lagrange-Dichte den Term $\frac{\alpha}{2n} \phi^{2n}$, $1 < n \in \mathbb{N}^+$, addieren? Führen Sie Ihre Rechnungen zweifach durch, einmal für endliche und einmal für infinitesimale Skalentransformationen. Überprüfen Sie, dass beide Ergebnisse übereinstimmen und dass diese konsistent mit Ihrem Resultat aus P4.1 sind.
- (ii) Ersetzen Sie in Teilaufgabe (i) das Transformationsverhalten des Felds unter Skalentransformationen durch

$$\phi(X) \longrightarrow \phi'(X') = \phi(X). \quad (3)$$

Was ändert sich?

Hausübung

Aufgabe H7

Der Energie-Impuls-Tensor (II) (12 + 8 = 20 Punkte)

In Aufgabe H3.1 haben Sie sich bereits mit dem Energie-Impuls-Tensor $\Theta^{\mu\nu}$ beschäftigt und gezeigt, dass es möglich ist, einen hierzu physikalisch äquivalenten Tensor

$$T^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} + \partial_\lambda \theta^{\lambda\mu\nu} \quad (4)$$

zu konstruieren, wobei $\theta^{\lambda\mu\nu} = -\theta^{\mu\lambda\nu}$. In dieser Aufgabe werden wir explizit ein $\theta^{\lambda\mu\nu}$ konstruieren, sodass $T^{\mu\nu}$ symmetrisch ist. Dazu betrachten wir infinitesimale eigentliche, orthochrone Lorentz-Transformationen in einer beliebigen Darstellung,

$$\phi^a \xrightarrow{\text{SO}^+(1,3)} \phi'^a = \phi^a - \frac{i}{2} \delta\omega_{\mu\nu} (J^{\mu\nu})^a_b \phi^b, \quad (5)$$

mit den infinitesimalen Parametern $\delta\omega_{\mu\nu} = -\delta\omega_{\nu\mu}$ und den Generatoren $(J^{\mu\nu})^a_b$ der jeweiligen Darstellung.

- (i) Betrachten Sie eine unter Raum-Zeit-Translationen sowie $\text{SO}^+(1,3)$ -Transformationen invariante Theorie. Berechnen Sie die zur $\text{SO}^+(1,3)$ -Invarianz gehörige erhaltene Noether-Stromdichte und folgern Sie, dass der antisymmetrische Anteil von $\Theta^{\mu\nu}$ gegeben ist durch

$$\Theta^{\mu\nu} - \Theta^{\nu\mu} = \partial_\lambda \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\lambda \phi^a)} i (J^{\mu\nu})^a_b \phi^b \right]. \quad (6)$$

Erklären Sie, warum der Ausdruck in eckigen Klammern einen Tensor $\tilde{\theta}^{\lambda\mu\nu}$ mit $\tilde{\theta}^{\lambda\mu\nu} = -\tilde{\theta}^{\lambda\nu\mu}$ darstellt. Nutzen Sie $\tilde{\theta}^{\lambda\mu\nu}$, um daraus einen Tensor $\theta^{\lambda\mu\nu}$ mit der geforderten Eigenschaft zu konstruieren. Zeigen Sie, dass für Ihre Wahl von $\theta^{\lambda\mu\nu}$ der oben definierte Tensor $T^{\mu\nu}$ symmetrisch ist.

- (ii) Berechnen Sie für das elektromagnetische Feld,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (7)$$

den Energie-Impuls-Tensor und zeigen Sie, dass dieser weder symmetrisch noch eichinvariant ist. Nutzen Sie die in (i) hergeleitete Vorschrift zur Bestimmung von $\theta^{\lambda\mu\nu}$ und zeigen Sie, dass

$$\theta^{\lambda\mu\nu} = -F^{\lambda\mu} A^\nu \quad (8)$$

auf den symmetrischen Energie-Impuls-Tensor

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\lambda} F_\lambda^\nu + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad (9)$$

führt. Ist dieser auch eichinvariant?

Hinweis: Nutzen Sie für (ii) die Darstellung

$$(J^{\mu\nu})^\rho_\sigma = i(g^{\mu\rho} g^\nu_\sigma - g^{\nu\rho} g^\mu_\sigma). \quad (10)$$