Goethe-Universität Frankfurt am Main
Prof. Dr. Dirk H. Rischke
Wintersemester 2020/21

Ausgabedatum: 20.11.2020
Abgabedatum: 27.11.2020

Quantenfeldtheorie I – Aufgabenblatt 4

Übungsleitung: Alexander Stegemann – stegemann@itp.uni-frankfurt.de

Präsenzübung

Aufgabe P4.1

Skaleninvarianz (II)

In Aufgabe H3.2 haben Sie Skalentransformationen eines skalaren Felds $\phi(X)$ untersucht. Diese sind gegeben durch

$$X^\mu \longrightarrow X'^\mu = \lambda X^\mu, \tag{1}$$

$$\phi(X) \longrightarrow \phi'(X') = \lambda^{-d}\phi(X), \tag{2}$$

mit $d, \lambda \in \mathbb{R}^+$. Sie haben gezeigt, dass für eine skalare Theorie, deren Wirkung invariant unter Skalentransformationen ist, gilt:

$$d\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\phi + (d+1)\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\partial_\mu \phi - 4\mathcal{L} = 0. \tag{3}$$

Bestimmen Sie, unter welchen Bedingungen die Lagrange-Dichte des reellen Klein-Gordon-Felds diese Gleichung erfüllt. Was ergibt sich, wenn Sie zu Letzterer den Term $\frac{\alpha}{2n}\phi^{2n}$, $1 < n \in \mathbb{N}$, addieren?

Aufgabe P4.2

Mehrere komplexe Skalarfelder

Gegeben sei die folgende Lagrange-Dichte mit den komplexen Skalarfeldern $\phi_i(X)$, $i \in \{1, 2, 3\}$:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{3}(\partial_\mu \phi_i)^*(\partial^\mu \phi_i) - \frac{m^2}{2}(\phi_1^*\phi_1 + \phi_1^*\phi_2 + \phi_2^*\phi_1 + \phi_2^*\phi_2) - m^2\phi_3^*\phi_3. \tag{4}$$

Diagonalisieren Sie die Massenmatrix und bestimmen Sie die jeweiligen physikalischen Massen der Felder. Wie lauten die entkoppelten Bewegungsgleichungen?

Hausübung

Aufgabe H4.1

Konjugation (4 + 3 + 2 = 9 Punkte)

(i) Seien $(G, \otimes)$ eine Gruppe und $g \in G$. In Aufgabe P1.2 haben Sie gezeigt, dass die Abbildung $C_g : G \to G$, $a \mapsto g \otimes a \otimes g^{-1}$ (auch bekannt als „Konjugation“) ein Gruppen-Endomorphismus ist. Zeigen Sie, dass C_g sogar ein Gruppen-Automorphismus ist, d. h. zeigen Sie, dass C_g bijektiv ist. Zeigen Sie darüber hinaus, dass C_g eine Äquivalenzrelation auf G induziert. Welche Abbildung bezeichnet C_g, falls $(G, \otimes)$ abelsch ist?

(ii) Sei $n \in \mathbb{N}^+$. Im Fall der allgemeinen linearen Gruppe $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ wird die Konjugation auch als Ähnlichkeitstransformation bezeichnet. Zeigen Sie, dass zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, die über eine Ähnlichkeitstransformation ineinander umgeformt werden können, dieselbe Determinante und Spur sowie dieselben Eigenwerte haben.

(iii) Die Matrix B aus Teil (ii) sei gegeben durch $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Überprüfen Sie damit explizit, dass

$$\det\left(\mathrm{e}^{A}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(A)}. \tag{5}$$

Hinweis: Als Äquivalenzrelation auf einer Menge M bezeichnet man eine binäre Relation $\mathcal{R} \subseteq M \times M$, die folgende Eigenschaften erfüllt:

- $\forall a \in M : (a, a) \in \mathcal{R}.$ (Reflexivität)
- $\forall a, b \in M : (a, b) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b, a) \in \mathcal{R}.$ (Symmetrie)
- $\forall a, b, c \in \mathcal{R} : (a, b) \in \mathcal{R} \wedge (b, c) \in \mathcal{R} \Rightarrow (a, c) \in \mathcal{R}.$ (Transitivität)

Anstelle $(a, b) \in \mathcal{R}$ schreibt man auch kurz $a\mathcal{R}b$.

Bemerkung: Äquivalenzrelationen spielen eine wichtige Rolle in der Mathematik, da es mit ihnen möglich ist, eine gegebene Menge in disjunkte Teilmengen zu zerlegen. Diese sogenannten Äquivalenzklassen (einer Äquivalenzrelation $\mathcal{R}$ auf der Menge M) bezeichnet man als $[a]_{\mathcal{R}} = \{m \in M | m\mathcal{R}a\}$ mit $a \in M$. Äquivalenzklassen sind beispielsweise relevant bei der Definition der L^p-Räume, die aus den p-fach integrierbaren Funktionen bestehen.

Aufgabe H4.2

Nicht-abelsche Stromdichten (2 + 3 + 2 + 4 = 11 Punkte)

Gegeben sei die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \Phi)^\dagger (\partial^\mu \Phi) - m^2 \Phi^\dagger \Phi, \tag{6}$$

wobei

$$\Phi(X) = \begin{pmatrix} \phi_1(X) \\ \phi_2(X) \end{pmatrix} \tag{7}$$

mit den komplexen Skalarfeldern $\phi_1(X)$ und $\phi_2(X)$.

Betrachten Sie globale $\mathrm{U}(2)$-Transformationen des Felds Φ,

$$\Phi \xrightarrow{\mathrm{U}(2)} \Phi' = U\Phi \tag{8}$$

mit

$$U = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_a T^a}, \qquad a \in \{0,1,2,3\}, \tag{9}$$

wobei $T^0 = \frac{\mathbb{1}_2}{2}$ und $T^i = \frac{\sigma^i}{2}$, $i \in \{1,2,3\}$. Dabei bezeichnet σ^i die i-te Pauli-Matrix.

(i) Zeigen Sie, dass

$$\left[T^a, T^b\right] = \mathrm{i}\epsilon^{0abc}T^c, \tag{10}$$

wobei ϵ^{abcd} das vierdimensionale Levi-Civita-Symbol (mit der Konvention $\epsilon^{0123} = 1$) bezeichnet.

(ii) Zeigen Sie, dass

$$\left\{T^a, T^b\right\} = \delta^{ab}T^0 + \delta^{a0}T^b + \delta^{b0}T^a - 2\delta^{a0}\delta^{b0}T^0. \tag{11}$$

(iii) Zeigen Sie, dass die Lagrange-Dichte invariant unter globalen $\mathrm{U}(2)$-Transformationen ist.

(iv) Zeigen Sie, dass die erhaltene Stromdichte, die mit dieser $\mathrm{U}(2)$-Symmetrie einhergeht, durch

$$J^{\mu a} = \mathrm{i}\left[\Phi^\dagger T^a(\partial^\mu\Phi) - (\partial^\mu\Phi)^\dagger T^a\Phi\right] \tag{12}$$

gegeben ist.

Bemerkung: Bei den Teilaufgaben (i) und (ii) dürfen Sie bekannte Relationen für die Pauli-Matrizen als gegeben voraussetzen.