Goethe-Universität Frankfurt am Main
Prof. Dr. Dirk H. Rischke
Wintersemester 2020/21

Ausgabedatum: 13.11.2020
Abgabedatum: 20.11.2020

Quantenfeldtheorie I – Aufgabenblatt 3

Übungsleitung: Alexander Stegemann – stegemann@itp.uni-frankfurt.de

Präsenzübung

Aufgabe P3.1

Der elektromagnetische Feldstärketensor

Aus der Elektrodynamik kennen Sie den elektromagnetischen Feldstärketensor,

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu.$$

Ausgedrückt durch $\vec{E}$ und $\vec{B}$ lässt sich dieser in natürlichen Einheiten schreiben als

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ E^x & 0 & -B^z & B^y \\ E^y & B^z & 0 & -B^x \\ E^z & -B^y & B^x & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Drücken Sie $(F_{\mu\nu})$, $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ und $F_\mu{}^\nu F^\mu_\nu$ durch $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aus.

Aufgabe P3.2

Lagrange- und Hamilton-Dichten

Berechnen Sie für folgende Lagrange-Dichten die Bewegungsgleichung des skalaren Felds ϕ. Unter welchem Namen kennen Sie diese Gleichungen?

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2, \tag{2}$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2. \tag{3}$$

Analog zur klassischen Mechanik lassen sich die kanonisch konjugierte Impuls- und Hamiltondichte definieren,

$$\Pi := \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}, \tag{4}$$

$$\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}(\phi, \Pi, \vec{\nabla}\phi, X) := \Pi\dot{\phi} - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi, X)\Big|_{\dot{\phi}=\dot{\phi}(\phi,\Pi,\vec{\nabla}\phi,X)}. \tag{5}$$

Berechnen Sie für $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$ die zugehörigen Hamiltondichten $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$.

Hausübung

Aufgabe H3.1

Der Energie-Impuls-Tensor (2 + 4 + 5 = 11 Punkte)

In der Vorlesung haben Sie gelernt, dass der Energie-Impuls-Tensor identisch mit der erhaltenen Stromdichte ist, die einer Symmetrie unter Raum-Zeit-Translationen entspricht. Ersterer ist dabei gegeben durch

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}. \tag{6}$$

(i) Bestimmen Sie den Energie-Impuls-Tensor für das reelle Klein-Gordon-Feld,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{m^2}{2}\phi^2. \tag{7}$$

Ist $\Theta^{\mu\nu}$ ein symmetrischer Tensor?

(ii) Der Energie-Impuls-Tensor ist durch die Erhaltungsgleichung

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0 \tag{8}$$

nicht eindeutig festgelegt. Zeigen Sie, dass es möglich ist, einen zu $\Theta^{\mu\nu}$ physikalisch äquivalenten Tensor $T^{\mu\nu} \neq \Theta^{\mu\nu}$ zu konstruieren, für den also gilt

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{9}$$

und der für die Energie und den Impuls des Felds dieselben Ergebnisse wie $\Theta^{\mu\nu}$ liefert.

(iii) Wir betrachten infinitesimale eigentliche, orthochrone Lorentz-Transformationen des skalaren Felds $\phi(X)$,

$$X^\mu \overset{\mathrm{SO}^+(1,3)}{\longrightarrow} X'^\mu = X^\mu + \delta\omega^{\mu\nu} X_\nu, \tag{10}$$

$$\phi(X) \overset{\mathrm{SO}^+(1,3)}{\longrightarrow} \phi'(X') = \phi(X), \tag{11}$$

wobei $\delta\omega^{\mu\nu} = -\delta\omega^{\nu\mu}$. Angenommen, die Wirkung sei invariant unter solchen Transformationen. Zeigen Sie, dass die zugehörige erhaltene Stromdichte durch

$$J^{\mu\nu\lambda} = -\frac{1}{2}\left(\Theta^{\mu\nu} X^\lambda - \Theta^{\mu\lambda} X^\nu\right) \tag{12}$$

gegeben ist. Zeigen Sie weiterhin, dass deswegen der Energie-Impuls-Tensor symmetrisch sein muss.

Bemerkung: Der Energie-Impuls-Tensor ist nicht für jede beliebige Feldtheorie symmetrisch. Gemäß Teilaufgabe (ii) ist es aber möglich, einen zu $\Theta^{\mu\nu}$ physikalisch äquivalenten Tensor $T^{\mu\nu}$ zu definieren. Insbesondere kann dieser so konstruiert werden, dass er symmetrisch ist. Diese spezielle Wahl für $T^{\mu\nu}$ ist auch als Belinfante-Rosenfeld-Tensor bekannt und wird z. B. in Abschnitt 7.4 des Buchs „The Quantum Theory of Fields I: Foundations“ von Steven Weinberg sowie in Abschnitt 2.4 des Buchs „Field Quantization“ von Walter Greiner und Joachim Reinhardt behandelt.

Aufgabe H3.2

Skaleninvarianz (5 + 4 = 9 Punkte)

Die Wirkung des skalaren Felds $\phi(X)$,

$$S[\phi] = \int_{V_4} \mathrm{d}^4 X \, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi), \tag{13}$$

sei invariant unter sogenannten Skalentransformationen,

$$X^\mu \longrightarrow X'^\mu = \lambda X^\mu, \tag{14}$$

$$\phi(X) \longrightarrow \phi'(X') = \lambda^{-d} \phi(X), \tag{15}$$

mit $d, \lambda \in \mathbb{R}^+$.

(i) Zeigen Sie, dass die zugehörige erhaltene Noether-Stromdichte J^μ durch

$$J^\mu = -d \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \phi - \Theta^\mu{}_\nu X^\nu \tag{16}$$

gegeben ist.

(ii) Zeigen Sie darüber hinaus, dass

$$d \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \phi + (d+1) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu \phi - 4\mathcal{L} = 0. \tag{17}$$