Goethe-Universität Frankfurt am Main
Prof. Dr. Dirk H. Rischke
Wintersemester 2020/21

Ausgabedatum: 06.11.2020
Abgabedatum: 13.11.2020

Quantenfeldtheorie I – Aufgabenblatt 2

Übungsleitung: Alexander Stegemann – stegemann@itp.uni-frankfurt.de

Präsenzübung

Aufgabe P2.1

Einfache Beispiele für Gruppen

Welche der folgenden algebraischen Strukturen sind Gruppen, welche nicht? Begründen Sie kurz. Dabei bezeichnen $+$ die übliche Addition und $\cdot$ die übliche Mulitplikation zweier Zahlen.

- $(\mathbb{R}, +)$
- $(\mathbb{Z}, +)$
- $(\mathbb{N}, +)$
- $(\mathbb{R}, \cdot)$
- $(\mathbb{Z}, \cdot)$

Für eine der obigen Strukturen, die keine Gruppe ist, können Sie durch Entfernen eines Elements aus der zugrundeliegenden Menge die Erfüllung der Gruppenaxiome sicherstellen. Um welchen Fall handelt es sich? Welches Element muss entfernt werden?

Aufgabe P2.2

Die Gruppen $\mathrm{U}(n)$ und $\mathrm{SU}(n)$

Sei $n \in \mathbb{N}^+$. Sie haben bereits die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(n;\mathbb{R}) = \{O \in \mathbb{R}^{n\times n} | O^\mathrm{T} O = \mathbb{1}_n\}$ kennengelernt, die wir im Folgenden nur noch als $\mathrm{O}(n)$ bezeichnen. Die spezielle orthogonale Gruppe $\mathrm{SO}(n) = \{O \in \mathrm{O}(n) | \det(O) = 1\}$ ist eine Untergruppe von $\mathrm{O}(n)$. Ebenfalls von großer Bedeutung für die Physik (und insbesondere diese Vorlesung) sind die unitäre Gruppe $\mathrm{U}(n) = \{U \in \mathbb{C}^{n\times n} | U^\dagger U = \mathbb{1}_n\}$ sowie deren Untergruppe $\mathrm{SU}(n) = \{U \in \mathrm{U}(n) | \det(U) = 1\}$, die spezielle unitäre Gruppe. Hierbei bezeichnet $U^\dagger = (U^*)^\mathrm{T}$ die adjungierte Matrix.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathrm{U}(n)$ (versehen mit der üblichen Matrixmultiplikation) eine Gruppe ist.

(ii) Zeigen Sie, dass jede Matrix $U \in \mathrm{U}(n)$ als

$$U = \mathrm{e}^X \tag{1}$$

dargestellt werden kann, wobei X eine antihermitesche $n \times n$-Matrix ist (d. h. $X^\dagger = -X$).

(iii) Zeigen Sie, dass im Fall $U \in \mathrm{SU}(n)$ für die Matrix X aus Aufgabenteil (ii) zusätzlich gilt

$$\mathrm{tr}(X) = 0. \tag{2}$$

(iv) Wir schränken nun die Matrix X aus Aufgabenteil (ii) auf reelle Einträge ein. Welche Art von Matrizen wird nun durch e^X dargestellt?

Hinweise

- Nutzen Sie für Teilaufgabe (ii), dass U aufgrund des Spektralsatzes unitär diagonalisierbar ist.
- Die Exponentialfunktion für eine $n \times n$-Matrix X ist definiert über die Potenzreihe

$$\mathrm{e}^X \equiv \exp(X) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}. \tag{3}$$

  Sie erfüllt die Eigenschaften
  - $(\mathrm{e}^X)^{-1} = \mathrm{e}^{-X}$,
  - $(\mathrm{e}^X)^{\mathrm{T}} = \mathrm{e}^{X^{\mathrm{T}}}$,
  - $(\mathrm{e}^X)^* = \mathrm{e}^{X^*}$,
  - $\det(\mathrm{e}^X) = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}(X)}$.

  Ist zusätzlich Y eine invertierbare $n \times n$-Matrix, so gilt $\mathrm{e}^{YXY^{-1}} = Y\mathrm{e}^X Y^{-1}$.

Aufgabe P2.3

Äquivalente Lagrange-Funktionen

Um die Notation zu vereinfachen, schreiben wir im Folgenden q und $\dot{q}$ anstelle von $q(t)$ und $\dot{q}(t)$ (und analog für die übrigen Koordinaten).

(i) Gegeben seien die (hinreichend oft stetig differenzierbaren) Lagrange-Funktionen

$$L_1 = L(q, \dot{q}, t), \tag{4}$$

$$L_2 = L(q, \dot{q}, t) + \frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}t}. \tag{5}$$

Zeigen Sie, dass beide dieselbe Bewegungsgleichung liefern, wenn $\Lambda = \Lambda(q, t)$. Was gilt für den Fall $\Lambda = \Lambda(q, \dot{q}, t)$?

(ii) Gegeben sei die Lagrange-Funktion

$$L_1(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) = \dot{x}\dot{y} - xy. \tag{6}$$

Finden Sie eine von L_1 verschiedene Lagrange-Funktion $L_2 \neq L_1 + \frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}t}$, die dennoch dieselben Bewegungsgleichungen liefert.

Hausübung

Aufgabe H2

Die lineare Kette (4 + 2 + 4 + 4 + 6 = 20 Punkte)

Gegeben sei eine (eindimensionale) Kette aus Teilchen der Masse m, die jeweils durch Federn mit Federkonstante κ mit ihren beiden direkten Nachbarn verbunden sind und longitudinale Schwingungen (d. h. Schwingungen in Richtung der Ausdehnung der Kette) ausführen, vgl. Abb. 2.2 im Skript. Der Gleichgewichtsabstand zwischen zwei Teilchen sei jeweils $a \in \mathbb{R}^+$ und $q_n(t)$ bezeichne die Auslenkung des n-ten Teilchens aus der jeweiligen Ruhelage. Damit ergibt sich die Position des n-ten Teilchens $x_n(t)$ zu

$$x_n(t) = q_n(t) + an, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

Im Folgenden betrachten wir periodische Randbedingungen, d. h. $q_n(t) = q_{n+N}(t)$ mit $N \in \mathbb{N}^+$.

(i) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion des Systems. Nutzen Sie dabei die Auslenkungen der Teilchen aus ihrer jeweiligen Ruhelage $q_n(t)$ als generalisierte Koordinaten. Leiten Sie anschließend die Bewegungsgleichungen

$$\ddot{q}_n(t) = \frac{\kappa}{m}\left[q_{n+1}(t) - 2q_n(t) + q_{n-1}(t)\right] \tag{8}$$

her. Bestimmen Sie die generalisierten Impulse $p_n(t)$ sowie die Hamilton-Funktion des Systems.

Um das System der gekoppelten Differentialgleichungen für die Auslenkungen zu entkoppeln, entwickeln wir letztere in ebenen Wellen,

$$q_n(t) = \sum_k a_k(t) f_{k,n}, \quad f_{k,n} = \frac{1}{\sqrt{N}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kan}, \tag{9}$$

wobei die Amplitude $a_k(t)$ eine (i. A. komplexe) Funktion der Zeit t und der Wellenzahl k ist.

(ii) Zeigen Sie, dass aufgrund der periodischen Randbedingungen k nur Werte der Form

$$k = \frac{2\pi}{Na} l \tag{10}$$

annehmen darf. Dabei ist $l \in \mathbb{Z}$ mit

$$-\frac{N}{2} < l \leq \frac{N}{2}. \tag{11}$$

(iii) Zeigen Sie, dass $f^*_{k,n} = f_{-k,n}$. Beweisen Sie dann, dass die ebenen Wellen orthonormal und vollständig sind, d. h.

$$\sum_{n=1}^{N} f^*_{k,n} f_{k',n} = \delta_{k'k}, \tag{12}$$

$$\sum_k f^*_{k,n'} f_{k,n} = \delta_{n'n}. \tag{13}$$

Hierbei bezeichnet $\delta_{k'k}$ bzw. $\delta_{n'n}$ das übliche Kronecker-Delta.

(iv) Welche Bedingungen müssen die Amplituden $a_k(t)$ erfüllen, um reellwertige Auslenkungen $q_n^*(t) = q_n(t)$ zu erhalten?

(v) Zeigen Sie, dass das gekoppelte System der Bewegungsgleichungen auf ein ungekoppeltes System von Differentialgleichungen für die Amplituden $a_k(t)$ führt. Zeigen Sie, dass diese harmonischen Oszillatoren mit Eigenfrequenzen

$$\omega_k = 2\sqrt{\frac{\kappa}{m}}\left|\sin\left(\frac{ka}{2}\right)\right| \tag{14}$$

entsprechen. Entwickeln Sie ω_k für kleine Wellenzahlen und skizzieren Sie beide Ergebnisse gemeinsam in einem Koordinatensystem für das Intervall $[-\pi/a, \pi/a]$.