Ausgabedatum: 30.10.2020
Abgabedatum: 06.11.2020

Quantenfeldtheorie I – Aufgabenblatt 1

Übungsleitung: Alexander Stegemann – stegemann@itp.uni-frankfurt.de

Präsenzübung

Aufgabe P1.1

Natürliche Einheiten

Wie im Skript erläutert, werden in der Quantenfeldtheorie üblicherweise sogenannte natürliche Einheiten verwendet, d. h. $\hbar = c = \epsilon_0 = k_\mathrm{B} = 1$. Verwenden Sie zur Umrechnung folgende Werte (in SI-Einheiten).

Größe	Wert
e	$1,602 \cdot 10^{-19}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{V}}$
$\hbar$	$1,055 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}$
c	$2,998 \cdot 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
k_B	$1,381 \cdot 10^{-23}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$
G	$6,674 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kgs}^2}$

(i) Geben Sie die Masse des neutralen Pions $m_\pi \approx 135\,\mathrm{MeV}$ in der Einheit kg an.

(ii) Geben Sie die chirale kritische Temperatur der Quantenchromodynamik bei verschwindendem chemischen Potential $T_\mathrm{c} \approx 175\,\mathrm{MeV}$ in der Einheit K an.

(iii) Berechnen Sie die Planck-Masse $m_\mathrm{P} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$ und die Planck-Länge $l_\mathrm{P} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$ zunächst in den Einheiten kg bzw. m und rechnen Sie Ihre Ergebnisse dann um in eV bzw. eV^{-1}.

Aufgabe P1.2

Gruppen und Morphismen

Sei $(G, \otimes)$ eine Gruppe, d. h. die Menge $G \neq \emptyset$ versehen mit der inneren Verknüpfung $\otimes : G \times G \to G$, $(a, b) \mapsto a \otimes b$ erfüllt die Gruppenaxiome:

- $\forall a, b, c \in G : (a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$. (Assoziativität)
- $\exists e \in G\ \forall a \in G : a \otimes e = e \otimes a = a$. (Existenz des neutralen Elements)
- $\forall a \in G\ \exists a^{-1} \in G : a \otimes a^{-1} = e$. (Existenz des inversen Elements)

(i) Zeigen Sie, dass das neutrale Element von $(G, \otimes)$ eindeutig ist.

(ii) Sei $g \in G$. Zeigen Sie, dass das zugehörige inverse Element von $(G, \otimes)$ eindeutig ist.

(iii) Man bezeichnet $(U, \otimes)$ als Untergruppe von $(G, \otimes)$, wenn die Teilmenge $U \subseteq G$ versehen mit der Abbildung $\otimes$ selbst eine Gruppe ist. Finden Sie zwei triviale Untergruppen von $(G, \otimes)$.

(iv) Sei $g \in G$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $C_g : G \to G, a \mapsto g \otimes a \otimes g^{-1}$ ein Gruppen-Endomorphismus ist.

(v) Sei $\varphi : G \to H$ ein Isomorphismus von $(G, \otimes)$ auf eine algebraische Struktur $(H, *)$. Zeigen Sie, dass auch $(H, *)$ eine Gruppe ist.

(vi) Seien nun $(G, \otimes_G)$ und $(H, \otimes_H)$ Gruppen, e_G und e_H deren neutrale Elemente sowie $\varphi : G \to H$ ein Gruppen-Homomorphismus. Zeigen Sie, dass $\varphi(e_G) = e_H$ und $\forall g \in G : \varphi(g^{-1}) = [\varphi(g)]^{-1}$.

Hinweise:

- Eine algebraische Struktur $(H, *)$ ist eine nichtleere Menge H versehen mit der inneren Verknüpfung $* : H \times H \to H$.
- Seien $(G, *_G)$ und $(H, *_H)$ algebraische Strukturen. Als Homomorphismus bezeichnen wir eine Abbildung $\varphi : G \to H$, für die gilt $\forall a, b \in G : \varphi(a *_G b) = \varphi(a) *_H \varphi(b)$. Ein Endomorphismus ist ein Homomorphismus mit $G = H$. Ein Isomorphismus ist ein bijektiver Homomorphismus. Von einem Gruppen-Homomorphismus spricht man, wenn $(G, *_G)$ und $(H, *_H)$ Gruppen sind.

Hausübung

Aufgabe H1

Matrixgruppen (4 + 4 + 4 + 3 + 5 = 20 Punkte)

In dieser Aufgabe geben wir bei den betrachteten Gruppen die innere Verknüpfung $\otimes$ nicht explizit mit an. Es handelt sich in allen Fällen um die übliche Matrixmultiplikation. Weiterhin seien $m, n \in \mathbb{N}^+$.

(i) Zeigen Sie, dass die allgemeine lineare Gruppe $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R}) = \{M \in \mathbb{R}^{n \times n} | \det(M) \neq 0\}$ die Gruppenaxiome erfüllt.

(ii) Zeigen Sie, dass die spezielle lineare Gruppe $\mathrm{SL}(n; \mathbb{R}) = \{M \in \mathbb{R}^{n \times n} | \det(M) = 1\}$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ ist.

(iii) Zeigen Sie, dass die orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(n; \mathbb{R}) = \{O \in \mathbb{R}^{n \times n} | O^{\mathrm{T}} O = \mathbb{1}_n\}$ die Gruppenaxiome erfüllt.

(iv) Zeigen Sie, dass $\mathrm{O}(n; \mathbb{R})$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ ist.

(v) Zeigen Sie, dass die pseudo-orthogonale Gruppe $\mathrm{O}(m, n; \mathbb{R}) = \{O \in \mathbb{R}^{(m+n) \times (m+n)} | O^{\mathrm{T}} \eta O = \eta\}$ die Gruppenaxiome erfüllt. Hierbei ist

$$\eta = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_m & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_n \end{pmatrix}.$$

Kennen Sie ein konkretes Beispiel für $\mathrm{O}(m, n; \mathbb{R})$, welches in der Physik eine wichtige Rolle spielt?