Man kann das Potential in einen äußeren und einen inneren Anteil aufspalten. Für konservative Zweikörperkräfte hat diese Aufspaltung die Form

$$V(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) = \sum_{i=1}^{N} V_i^{(\mathrm{ex})}(\vec{r}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \, . \tag{3.15}$$

Wir wählen $V_{ii} = 0$ und bemerken, dass

$$V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = V_{ij}(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|) = V_{ji}(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|) = V_{ji}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \, . \tag{3.16}$$

Wir zeigen nun, dass die Aufspaltung (3.15) korrekt ist, indem wir (a) die rechte Seite von Gl. (3.1) reproduzieren und (b) das dritte Newtonsche Axiom überprüfen.

(a) Es gilt

$$\vec{F}_k = -\vec{\nabla}_k V = -\vec{\nabla}_k V_k^{(\mathrm{ex})}(\vec{r}_k) - \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \vec{\nabla}_k V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

Der erste Term ist identisch mit der $k-$ten externen Kraft $\vec{F}_k^{(\mathrm{ex})}$. Der zweite Term läßt sich wie folgt umschreiben. Zunächst bemerken wir, dass der Nabla-Operator $\vec{\nabla}_k$ angewendet auf V_{ij} verschwindet, wenn nicht einer der beiden Indizes i oder j gleich k ist,

$$\vec{\nabla}_k V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = \vec{\nabla}_k V_{kj}(|\vec{r}_k - \vec{r}_j|)\, \delta_{ik} + \vec{\nabla}_k V_{ik}(|\vec{r}_i - \vec{r}_k|)\, \delta_{jk} \, .$$

Wenn man diesen Ausdruck über i und j summiert, erkennt man durch Vertauschen der Indizes $i \leftrightarrow j$ und Ausnutzen der Symmetrie (3.16) von V_{ij} bei Vertauschen von Indizes, dass die beiden Terme auf der rechten Seite den gleichen Beitrag liefern. Wir erhalten also das Ergebnis

$$\vec{F}_k = \vec{F}_k^{(\mathrm{ex})} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{N} \vec{\nabla}_k V_{kj}(|\vec{r}_k - \vec{r}_j|) \equiv \vec{F}_k^{(\mathrm{ex})} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{N} \vec{F}_{kj} \, , \tag{3.17}$$

wobei wir für die Zweikörperkraft $\vec{F}_{kj} = -\vec{\nabla}_k V_{kj}(|\vec{r}_k - \vec{r}_j|)$ angesetzt haben. Dies ist korrekt, da die Zweikörperkraft immer in Richtung des Abstandsvektors $\vec{r}_k - \vec{r}_j$ der beiden Teilchen zeigen muss. Bezüglich der Position eines Teilchens ist sie damit eine **Zentralkraft**. Da sie zudem nach Voraussetzung konservativ ist, kann das zugehörige Potential nach dem zweiten Satz in Abschnitt 2.4.7 nur vom Betrag $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ des Abstandsvektors abhängen, nicht aber von seiner Richtung. Gleichung (3.17) ist identisch mit der rechten Seite von Gl. (3.1), q.e.d.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} \vec{F}_{kj} &= -\vec{\nabla}_k V_{kj}(|\vec{r}_k - \vec{r}_j|) = +\vec{\nabla}_j V_{kj}(|\vec{r}_k - \vec{r}_j|) \\ &= \vec{\nabla}_j V_{jk}(|\vec{r}_j - \vec{r}_k|) \equiv -\vec{F}_{jk} \, , \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Hier haben wir die Symmetrieeigenschaften (3.16) des Zweikörperpotentials sowie folgende, aus der Kettenregel abzuleitende Relation benutzt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_{kj}(|\vec{r}_k-\vec{r}_j|)}{\partial x_k} &= \frac{\partial V_{kj}(|\vec{r}_k-\vec{r}_j|)}{\partial(x_k-x_j)}\,\frac{\partial(x_k-x_j)}{\partial x_k} = \frac{\partial V_{kj}(|\vec{r}_k-\vec{r}_j|)}{\partial(x_k-x_j)} \\ &= -\frac{\partial V_{kj}(|\vec{r}_k-\vec{r}_j|)}{\partial(x_j-x_k)} = -\frac{\partial V_{kj}(|\vec{r}_k-\vec{r}_j|)}{\partial x_j}\,\frac{\partial x_j}{\partial(x_j-x_k)} \\ &= -\frac{\partial V_{kj}(|\vec{r}_k-\vec{r}_j|)}{\partial x_j}\,.\end{aligned}$$

3.2.4 Virialsatz

Durch die Bewegung der Massenpunkte wird fortwährend kinetische und potentielle Energie ineinander umgewandelt. Der **Virialsatz** macht eine Aussage darüber, wie groß die kinetischen und potentiellen Beiträge zur Gesamtenergie **im zeitlichen Mittel** sind.

Wir multiplizieren die Newtonsche Bewegungsgleichung (3.1) skalar mit $\vec{r}_i$ und summieren über i:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N} m_i\,\ddot{\vec{r}}_i\cdot\vec{r}_i &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\,\dot{\vec{r}}_i\cdot\vec{r}_i\right) - \sum_{i=1}^{N} m_i\,\dot{\vec{r}}_i^{\,2} \\ &= \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\cdot\vec{r}_i = -\sum_{i=1}^{N}\vec{\nabla}_i V\cdot\vec{r}_i\,,\end{aligned} \tag{3.18}$$

wobei wir angenommen haben, dass die Kräfte $\vec{F}_i$ ausnahmslos konservativ sind.

Wir definieren den **zeitlichen Mittelwert** einer beliebigen Funktion $f(t)$,

$$\langle f\rangle \equiv \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\mathrm{d}t\, f(t)\,.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\,\dot{\vec{r}}_i\cdot\vec{r}_i\right)\right\rangle &= \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\mathrm{d}t\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\,\dot{\vec{r}}_i\cdot\vec{r}_i\right) \\ &= \lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\sum_{i=1}^{N} m_i\,\dot{\vec{r}}_i\cdot\vec{r}_i\Bigg|_0^{\tau} \equiv 0\,,\end{aligned}$$

solange $\dot{\vec{r}}_i\cdot\vec{r}_i<\infty$. Das zeitliche Mittel von Gl. (3.18) ergibt sich dann als

$$-\left\langle\sum_{i=1}^{N} m_i\,\dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right\rangle = -\left\langle\sum_{i=1}^{N}\vec{\nabla}_i V\cdot\vec{r}_i\right\rangle\,,$$

oder

$$2\,\langle T\rangle = \left\langle\sum_{i=1}^{N}\vec{\nabla}_i V\cdot\vec{r}_i\right\rangle\,. \tag{3.19}$$

Dies ist der sog. **Virialsatz**. Den Ausdruck auf der rechten Seite bezeichnet man als **Virial** der Kräfte. Der Virialsatz besagt, dass das Virial der Kräfte gleich dem Zweifachen des zeitlichen Mittelwertes der kinetischen Energie ist.

Wir diskutieren einige Spezialfälle. Für **abgeschlossene Systeme** gilt $\vec{F}_i^{(\mathrm{ex})} = -\vec{\nabla}_i V_i^{(\mathrm{ex})} \equiv 0$, also nach Gl. (3.15)

$$V(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) \; .$$

Falls

$$V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|) = \alpha_{ij} \, |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^n \tag{3.20}$$

mit $n \in \mathbb{Z}$, dann gilt gemäß der Kettenregel

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} \vec{\nabla}_i V \cdot \vec{r}_i &= \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^{N} \vec{\nabla}_i V_{jk}(|\vec{r}_j - \vec{r}_k|) \cdot \vec{r}_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^{N} \frac{\mathrm{d}V_{jk}}{\mathrm{d}|\vec{r}_j - \vec{r}_k|} \, \vec{\nabla}_i |\vec{r}_j - \vec{r}_k| \cdot \vec{r}_i \; . \end{aligned} \tag{3.21}$$

Einerseits ist nun mit dem Ansatz (3.20)

6.2.2017

$$\frac{\mathrm{d}V_{jk}}{\mathrm{d}|\vec{r}_j - \vec{r}_k|} = n \, \frac{V_{jk}}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|} \; .$$

Andererseits ist

$$\vec{\nabla}_i |\vec{r}_j - \vec{r}_k| = (\delta_{ij} - \delta_{ik}) \, \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_k}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|} \; .$$

Dies folgt aus der Kettenregel und der Relation (1.81). Eingesetzt in Gl. (3.21) ergibt

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{\nabla}_i V \cdot \vec{r}_i = \frac{n}{2} \sum_{j,k=1}^{N} \frac{V_{jk}}{|\vec{r}_j - \vec{r}_k|^2} \, (\vec{r}_j - \vec{r}_k) \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_k) = n \, \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{N} V_{jk} \equiv n \, V \; .$$

Damit lautet der Virialsatz nun

$$2 \, \langle T \rangle = n \, \langle V \rangle \; . \tag{3.22}$$

Beispiele:

1. **Gekoppelte harmonische Oszillatoren:**

   $$V_{ij} = \frac{1}{2} \, k_{ij} (\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2 \quad \Longrightarrow \quad n = 2 \; .$$

   Daraus folgt, dass kinetische und potentielle Energie im Mittel gleich sind,

   $$\langle T \rangle = \langle V \rangle \; . \tag{3.23}$$

   Für die Gesamtenergie gilt

   $$\langle E \rangle = 2 \, \langle T \rangle = 2 \, \langle V \rangle \; .$$

2. **Coulomb- oder Gravitationspotential:**

$$V_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad \Longrightarrow n = -1 \; .$$

Daraus folgt

$$2\,\langle T \rangle = -\langle V \rangle \tag{3.24}$$

bzw. für die Gesamtenergie

$$\langle E \rangle = -\frac{1}{2}\,\langle V \rangle + \langle V \rangle = \frac{1}{2}\,\langle V \rangle = \langle T \rangle - 2\,\langle T \rangle = -\langle T \rangle < 0 \; .$$

Dies bedeutet, dass die Teilchen des Systems im Mittel eine **gebundene Bewegung** durchführen.

3.3 Zwei-Teilchen-Systeme

Als Spezialfall von Mehrteilchensystemen betrachten wir nun den Fall $N = 2$ genauer. In diesem Fall ist eine vollständig analytische Lösung möglich. Die Idee ist, die **Schwerpunkts-** und **Relativbewegung** der beiden Teilchen zu trennen. Wir werden sehen, dass – zumindest für abgeschlossene Systeme – die Relativbewegung der beiden Teilchen dann effektiv der Bewegung eines **einzelnen** Teilchens entspricht.

3.3.1 Relativbewegung

Die **Schwerpunktskoordinate** der beiden Teilchen ist nach dem im vorangegangenen Kapitel Diskutierten

$$\vec{R} = \frac{m_1\,\vec{r}_1 + m_2\,\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \equiv \frac{m_1}{M}\,\vec{r}_1 + \frac{m_2}{M}\,\vec{r}_2 \; , \tag{3.25}$$

wobei wir die **Gesamtmasse** $M = m_1 + m_2$ des Systems eingeführt haben.

Die **Relativkoordinate** der beiden Teilchen ist

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \; . \tag{3.26}$$

Die Umrechnung der Koordinaten $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ in Schwerpunkts- und Relativkoordinate lautet

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M}\,\vec{r} \; , \tag{3.27}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M}\,\vec{r} \; , \tag{3.28}$$

wie man sich leicht durch Einsetzen der Glgen. (3.25) und (3.26) überzeugt.

Wir transformieren nun die Bewegungsgleichungen für $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$,

$$m_1\,\ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1 = \vec{F}_1^{(\mathrm{ex})} + \vec{F}_{12} \; , \tag{3.29}$$

$$m_2\,\ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_2 = \vec{F}_2^{(\mathrm{ex})} + \vec{F}_{21} \; , \tag{3.30}$$

vgl. Gl. (3.1), in solche für $\vec{R}$, $\vec{r}$. Die Bewegungsgleichung für $\vec{R}$ ist durch den **Schwerpunktsatz** (3.3) gegeben,

$$M\,\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{(\mathrm{ex})}\;.$$

Die Bewegungsgleichung für $\vec{r}$ erhalten wir aus folgender Rechnung, die auf den Glgen. (3.29), (3.30) basiert,

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} &= \ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{\vec{F}_1^{(\mathrm{ex})}}{m_1} - \frac{\vec{F}_2^{(\mathrm{ex})}}{m_2} + \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} \\ &= \frac{\vec{F}_1^{(\mathrm{ex})}}{m_1} - \frac{\vec{F}_2^{(\mathrm{ex})}}{m_2} + \frac{\vec{F}_{12}}{\mu}\;,\end{aligned}$$

wobei wir $-\vec{F}_{21} = \vec{F}_{12}$ benutzt haben und die sog. **reduzierte Masse**

$$\mu = \frac{m_1\,m_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1\,m_2}{M} \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\;, \tag{3.31}$$

definiert haben.

Für **abgeschlossene Systeme** gilt $\vec{F}_i^{(\mathrm{ex})} = 0$, und daher

$$M\,\ddot{\vec{R}} = 0\;, \tag{3.32}$$

$$\mu\,\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{12}\;. \tag{3.33}$$

Die erste Gleichung besagt, dass der **Gesamtimpuls** erhalten ist, $\vec{P} = M\,\dot{\vec{R}} = \overrightarrow{const.}$. Nach dem zweiten Newtonschen Axiom unterliegt die Schwerpunktsbewegung also keinen äußeren Kräften, ist daher **geradlinig gleichförmig**. Man kann daher immer in ein Inertialsystem transformieren, in dem der Schwerpunkt ruht, $\dot{\vec{R}} = 0$, ohne die Relativbewegung, die durch die Zweikörperkraft $\vec{F}_{12}$ bestimmt wird, zu ändern. O.B.d.A. kann man den Schwerpunkt auch in den Ursprung dieses Systems legen, $\vec{R} = 0$. Man spricht vom sog. **Schwerpunktsystem**. In diesem System braucht man lediglich die Relativbewegung zu bestimmen.

Wir betrachten diese nun genauer. Es ist $\vec{F}_{12} \parallel (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \vec{r}$. Gleichung (3.33) besagt also, dass die **Relativbewegung** der Bewegung eines Massenpunktes mit der **reduzierten Masse** μ in einem **Zentralkraftfeld** entspricht. Damit haben wir für **abgeschlossene Systeme** die **Zweiteilchenbewegung** auf die **Einteilchenbewegung in einem Zentralkraftfeld** zurückgeführt.

Wir zerlegen auch die **kinetische Energie** in einen Schwerpunkts- und einen Relativanteil, wobei wir die Glgen. (3.27), (3.28) und (3.31) benutzen:

$$\begin{aligned}T_1 &= \frac{1}{2}\,m_1\,\dot{\vec{r}}_1^{\,2} = \frac{1}{2}\,m_1\left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M}\,\dot{\vec{r}}\right)^2 = \frac{1}{2}\,m_1\,\dot{\vec{R}}^{\,2} + \frac{m_2}{2\,M}\,\mu\,\dot{\vec{r}}^{\,2} + \mu\,\dot{\vec{R}}\cdot\dot{\vec{r}}\;, \\ T_2 &= \frac{1}{2}\,m_2\,\dot{\vec{r}}_2^{\,2} = \frac{1}{2}\,m_1\left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M}\,\dot{\vec{r}}\right)^2 = \frac{1}{2}\,m_2\,\dot{\vec{R}}^{\,2} + \frac{m_1}{2\,M}\,\mu\,\dot{\vec{r}}^{\,2} - \mu\,\dot{\vec{R}}\cdot\dot{\vec{r}}\;.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}\,M\,\dot{\vec{R}}^{\,2} + \frac{1}{2}\,\mu\,\dot{\vec{r}}^{\,2} \equiv T_S + T_r\;, \tag{3.34}$$

wobei $T_S = M\,\dot{\vec{R}}^{\,2}/2$ der Schwerpunkts- und $T_r = \mu\,\dot{\vec{r}}^{\,2}/2$ der Relativanteil der kinetischen Energie sind.

Für **konservative Kräfte** gilt

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \sum_{i=1}^{2} V_i^{(\mathrm{ex})}(\vec{r}_i) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} V_{ij}(r) \equiv V_1^{(\mathrm{ex})}(\vec{r}_1) + V_2^{(\mathrm{ex})}(\vec{r}_2) + V_{12}(r)\ ,$$

vgl. Gl. (3.15) mit Gl. (3.16), wobei V_{ij} nur vom Betrag r der Relativkoordinate $\vec{r}$ abhängt, da die Zweikörperkraft konservativ ist. Wir ordnen die beiden externen Potentiale der Schwerpunktsbewegung zu und das Zweikörperpotential der Relativbewegung,

$$V_S = V_1^{(\mathrm{ex})}(\vec{r}_1) + V_2^{(\mathrm{ex})}(\vec{r}_2)\ , \quad V_r = V_{12}(r)\ .$$

Dann schreibt sich die **Gesamtenergie** als

$$E = T + V = E_S + E_r \ \text{ mit }\ E_S = T_S + V_S \ \text{ und }\ E_r = T_r + V_r\ . \tag{3.35}$$

Für **abgeschlossene Systeme** gilt $V_i^{(\mathrm{ex})} = 0$, so dass $E_S = T_S$, d.h. die Schwerpunktsbewegung hat lediglich kinetische, aber keine potentielle Energie. Im Schwerpunktsystem gilt $T_S = 0$.

Mit Hilfe von Gl. (3.8) kann man den **Drehimpuls** in seinen Schwerpunkts- und Relativanteil zerlegen, wobei man gemäß den Glgen. (3.27) und (3.28) ausnutzt, dass $\Delta\vec{r}_1 = \vec{r}_1 - \vec{R} = m_2\,\vec{r}/M$ und $\Delta\vec{r}_2 = \vec{r}_2 - \vec{R} = -m_1\,\vec{r}/M$ ist:

$$\begin{aligned}
\vec{L} &= \vec{L}_S + \vec{L}_r\ ,\\
\vec{L}_S &= M\,\vec{R}\times\dot{\vec{R}} = \vec{R}\times\vec{P}\ ,\\
\vec{L}_r &= \sum_{i=1}^{2} m_i\left(\Delta\vec{r}_i \times \Delta\dot{\vec{r}}_i\right) = m_1\left(\frac{m_2}{M}\right)^2 \vec{r}\times\dot{\vec{r}} + m_2\left(\frac{m_1}{M}\right)^2 \vec{r}\times\dot{\vec{r}}\\
&= \left(\frac{m_2}{M}\,\mu + \frac{m_1}{M}\,\mu\right)\vec{r}\times\dot{\vec{r}} = \mu\,\vec{r}\times\dot{\vec{r}}\,.
\end{aligned}$$

In einem Inertialsystem, in dem $\vec{L}_S$ verschwindet (z.B. aufgrund von $\dot{\vec{R}} = 0$), also z.B. auch im Schwerpunktsystem, ist der gesamte Drehimpuls allein durch den **Relativanteil** $\vec{L}_r$ gegeben. Dieser entspricht dem Drehimpuls, den ein Teilchen mit einer **reduzierten Masse** μ bei der Bewegung um den Ursprung des Systems der Relativkoordinate besitzt.

Beispiel: Planetenbewegung als Zweikörperproblem

Wir betrachten ein abgeschlossenes System zweier Massen m_1, m_2, die gravitativ miteinander wechselwirken,

$$V_{12}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = -\gamma\,\frac{m_1\,m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \equiv -\gamma\,\frac{\mu\,M}{r} = V_{12}(r)\ , \tag{3.36}$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{F}_{12} = -\vec{\nabla}_r V_{12}(r) = -\gamma\,\frac{\mu\,M}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r}\ . \tag{3.37}$$

Hierbei haben wir die Definition (3.31) der reduzierten Masse ausgenutzt. In einem abgeschlossenen System können wir uns, wie gerade gezeigt, auf die Betrachtung der Relativbewegung beschränken, da der Schwerpunktsimpuls erhalten ist, mithin wir also das Schwerpunktsystem als Inertialsystem wählen können, ohne die Relativbewegung zu ändern. In diesem System ist $E_S = \vec{L}_S = 0$, also $E = E_r$ und $\vec{L} = \vec{L}_r$.

Die Newtonsche Bewegungsgleichung für die Relativbewegung (3.33) lautet mit der Kraft (3.37)

$$\mu\,\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{12} = -\gamma\,\frac{\mu\,M}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r}\,. \tag{3.38}$$

Dies ist die Bewegungsgleichung für das Keplerproblem, bei dem sich ein Massenpunkt der Masse μ im Schwerefeld der im Ursprung befindlichen Masse M bewegt. Die Lösung können wir sofort hinschreiben, vgl. Gl. (2.192)

$$r(\varphi) = \frac{k_r}{1 + \epsilon_r\,\cos\varphi}\,, \tag{3.39}$$

wobei

$$k_r = \frac{L_r^2}{\gamma\,\mu^2 M}\,, \quad \epsilon_r = \sqrt{1 + \frac{2\,L_r^2\mu\,E_r}{(\gamma\,\mu^2 M)^2}}\,.$$

Hier treten der Betrag des relativen Drehimpulses L_r und die relative Gesamtenergie E_r auf,

$$L_r = \mu|\vec{r}\times\dot{\vec{r}}|\,, \quad E_r = \frac{1}{2}\,\mu\,\dot{r}^2 + \frac{L_r^2}{2\,\mu\,r^2} - \gamma\,\frac{\mu\,M}{r}\,.$$

Die Relativbewegung ist damit eindeutig gelöst. Wie aber bewegen sich die ursprünglichen Massen m_1 und m_2? Wir bleiben im Schwerpunktsystem, $\vec{R} = 0$. Mit den Glgen. (3.27), (3.28) erhalten wir

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M}\,\vec{r} \equiv \frac{m_2}{M}\,\vec{r}\,, \quad \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M}\,\vec{r} \equiv -\frac{m_1}{M}\,\vec{r}\,.$$

Für eine Ellipsenbahn (mit $0 < \epsilon_r < 1$) ergibt sich also das folgende Bild: $\vec{r}_1$ beschreibt die mit dem Faktor m_2/M **gestauchte** Ellipse für die Bahnkurve $\vec{r}(\varphi)$ und $\vec{r}_2$ beschreibt die mit dem Faktor m_1/M **gestauchte** und gleichzeitig (wegen des umgekehrten Vorzeichens) **gespiegelte** Ellipse $\vec{r}(\varphi)$, vgl. Abb. 3.2.

Der Umlaufsinn aller Ellipsen ist der gleiche. Die gespiegelte Ellipse hat ihren anderen Brennpunkt im Ursprung (Schwerpunkt) des Koordinatensystems.

Falls eine Masse, sagen wir m_2, viel größer als die andere ist, $m_2 \gg m_1$, z.B. falls die Sonne die Masse m_2 und die Erde die Masse m_1 darstellt, dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{m_2}{M} &= \frac{m_2}{m_1+m_2} = \frac{1}{1+m_1/m_2} = 1 - \frac{m_1}{m_2} + \ldots = 1 + O\left(\frac{m_1}{m_2}\right) \simeq 1\,,\\
\frac{m_1}{M} &= \frac{m_1}{m_1+m_2} = \frac{m_1}{m_2}\,\frac{1}{1+m_1/m_2} = \frac{m_1}{m_2} - \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2 + \ldots = O\left(\frac{m_1}{m_2}\right) \simeq 0\,.
\end{aligned}$$

Die Mitbewegung $\vec{r}_2 = -m_1\,\vec{r}/M$ der Sonne kann daher in "nullter Näherung", also unter Vernachlässigung von Termen, die von erster oder höherer Potenz in der kleinen Größe $m_1/m_2 \ll 1$ sind, vernachlässigt werden, $\vec{r}_2 \simeq 0$. In derselben Ordnung entspricht die Bewegung der Erde $\vec{r}_1 = m_2\,\vec{r}/M$ genau der Relativbewegung, $\vec{r}_1 \simeq \vec{r}$.

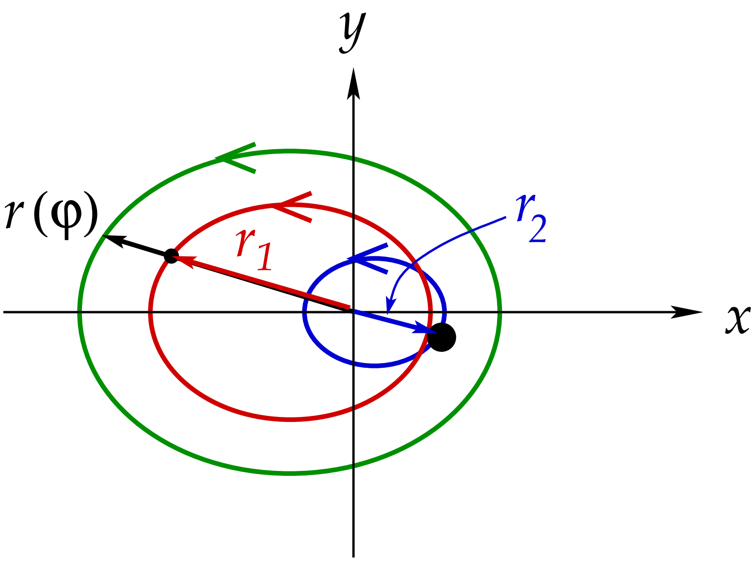

Abbildung 3.2: Die Relativbewegung und die tatsächliche Bewegung der Massen m_1 und m_2 für den Fall der Ellipsenbahn. Im gezeigten Fall ist $m_1 = m_2/2$ und entsprechend der Stauchungsfaktor für die erste Ellipse $m_2/M = 2/3$, während der für die zweite Ellipse $m_1/M = 1/3$ beträgt.

3.3.2 Zweikörperstoß

Wir betrachten ein abgeschlossenes System von zwei Massenpunkten, die miteinander stoßen oder aneinander streuen. Das Wechselwirkungspotential V_{12} sei **hinreichend kurzreichweitig**, so dass die Bewegung der Massenpunkte **hinreichend lange vor und nach dem Stoß kräftefrei**, d.h. **geradlinig gleichförmig** erfolgt, vgl. Abb. 3.3.

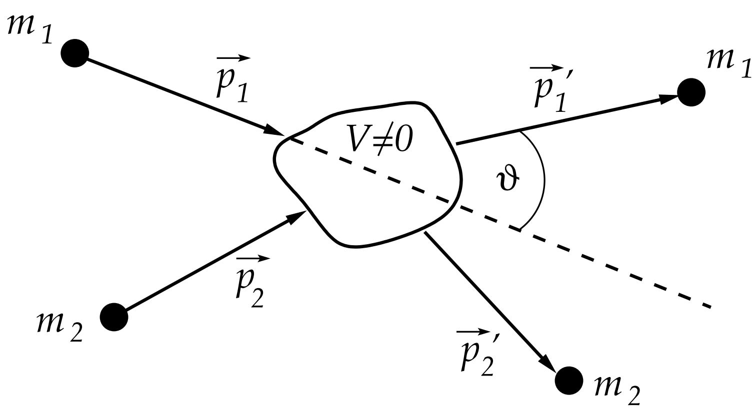

Abbildung 3.3: Der Stoß zweier Teilchen.

Die Anfangsimpulse $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ der beiden Teilchen seien bekannt, gesucht sind die Endimpulse $\vec{p}_1{}'$, $\vec{p}_2{}'$.

In der Betrachtung des Zweikörperstoßes finden zwei **Bezugssysteme** Anwendung:

1. Das **Laborsystem** Σ_L: Ein Stoßpartner, o.B.d.A. die Masse m_2, ruht vor dem Stoß, $\vec{p}_2^{\,(L)} = 0$, der andere Stoßpartner bewegt sich $\vec{p}_1^{\,(L)} \neq 0$.

2. Das **Schwerpunktsystem** Σ_S: Dieses haben wir schon im letzten Abschnitt kennengelernt. Der Massenmittelpunkt ruht, $\dot{\vec{R}}^{(S)} = 0$. O.B.d.A. kann man den Ursprung des Koordinatensystem in den Schwerpunkt legen, so dass auch $\vec{R}^{(S)} = 0$.

Da die Berechnung im Schwerpunktsystem einfacher ist, wählen wir im folgenden dieses Koordinatensystem und lassen den Index "(S)" weg. Offensichtlich gilt wegen $\dot{\vec{R}} = 0$ und damit $\vec{P} = 0$, dass der **Gesamtimpuls erhalten und für alle Zeiten gleich null ist**,

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 = \vec{p}_1^{\,\prime} + \vec{p}_2^{\,\prime} \iff \vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \;, \;\; \vec{p}_1^{\,\prime} = -\vec{p}_2^{\,\prime} \; . \tag{3.40}$$

Die **Impulse** der beiden Stoßpartner sind also **vor** und **nach dem Stoß umgekehrt gleich groß**.

Es gilt auch der **Energieerhaltungssatz**, $E = const.$. Hinreichend lange **vor** dem Stoß kann die potentielle Energie vernachlässigt werden und die Gesamtenergie ist gleich der kinetischen Energie, $E \equiv T$. Hinreichend lange **nach** dem Stoß gilt dies auch, allerdings schreibt sie sich jetzt als $E = T' + Q$, wobei T' für die kinetische Energie nach dem Stoß und Q für die während des Stoßprozesses **dissipierte Energie** steht. Man unterscheidet

1. **elastischer Stoß:** $Q = 0$.

2. **inelastischer Stoß:** $Q \neq 0$. Hier wiederum unterscheidet man
   (i) **endothermer Stoß:** $Q > 0$. Es erfolgt eine **Anregung** der Stoßpartner auf Kosten der kinetischen Energie, $T' < T$.
   (ii) **exothermer Stoß:** $Q < 0$. Es erfolgt eine **Abregung** der Stoßpartner zugunsten der kinetischen Energie, $T' > T$.

Die kinetischen Energien vor und nach dem Stoß sind (wir benutzen $v_i = p_i/m_i$, also $m_i\, v_i^2 = p_i^2/m_i$)

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} \equiv T_r \;, \\ T' &= T_1' + T_2' = \frac{p_1'^{\,2}}{2m_1} + \frac{p_2'^{\,2}}{2m_2} \equiv T_r' \;, \end{aligned}$$

wobei sich die rechten Seiten aus der Tatsache ergeben, dass wir uns im Schwerpunktsystem befinden, wo $T_S \equiv 0$. Die Energieerhaltung lautet also

$$E = T = T_r = T' + Q = T_r' + Q \; . \tag{3.41}$$

Wegen der Impulserhaltung (3.40) gilt aber in diesem System auch $p_1^2 = p_2^2$, $p_1'^{\,2} = p_2'^{\,2}$, also

$$\begin{aligned} T_r &= \frac{p_1^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \equiv \frac{p_1^2}{2\mu} \;, \\ T_r' &= \frac{p_1'^{\,2}}{2\mu} \; . \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich mit der Energieerhaltung (3.41)

$$\begin{aligned} p_1'^{\,2} &= 2\,\mu\,T_r' = 2\,\mu\,(T_r - Q) = p_1^2 - 2\,\mu\,Q \\ \Longrightarrow\quad p_1' &= \sqrt{p_1^2 - 2\,\mu\,Q}\,. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Damit ist der **Betrag** $p_1' = p_2'$ des Endimpulses durch den Anfangsimpulsbetrag $p_1 = p_2$ und die dissipierte Energie Q festgelegt. Die **Richtung** des Impulses $\vec{p}_1{}' = -\vec{p}_2{}'$ ist dagegen **nicht** festgelegt, sie wird von den Details des Stoßpotentials V_{12} bestimmt. Zur Richtungsangabe benötigt man zwei Winkel, den **Streuwinkel** ϑ und den **Azimutalwinkel** φ. Den Streuwinkel hatten wir schon bei der Diskussion der Hyperbel kennengelernt. Er gibt an, wie stark das Teilchen der Masse m_1 (und aufgrund der Impulserhaltung auch das Teilchen der Masse m_2, vgl. Abb. 3.4) aus seiner Anfangsrichtung abgelenkt wurde. Der Azimutalwinkel gibt die Neigung der "Kreisscheibe" an, die durch die möglichen Richtungen von $\vec{p}_1{}'$ und $\vec{p}_2{}'$ definiert ist, vgl. Abb. 3.4.

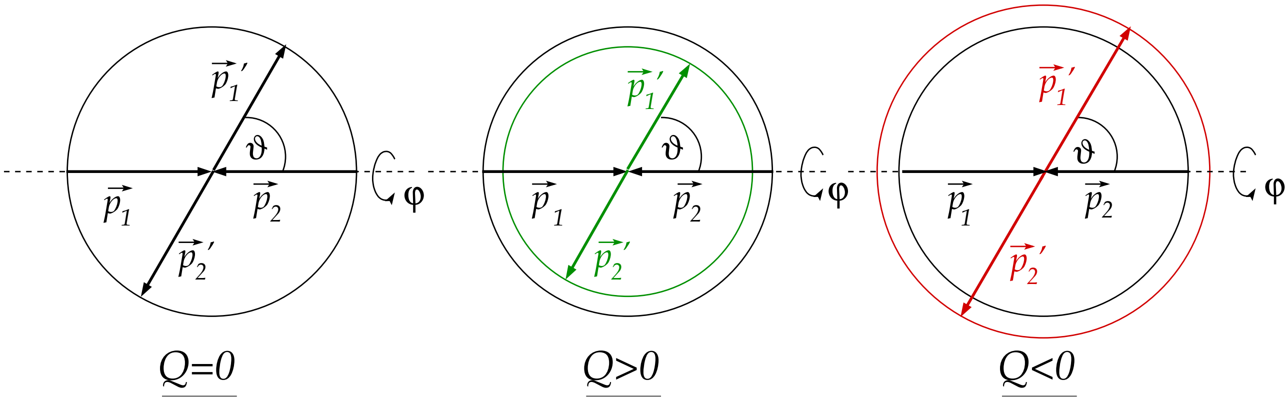

Abbildung 3.4: Der Stoß zweier Teilchen im Schwerpunktssystem.

Literaturverzeichnis

[1] W. Nolting, *Grundkurs Theoretische Physik 1: Klassische Mechanik* (Springer, Berlin)

[2] W. Greiner, *Theoretische Physik Band 1: Mechanik I* (Harri Deutsch, Thun & Frankfurt am Main)

[3] R. Jelitto, *Theoretische Physik 1: Mechanik I* (AULA-Verlag, Wiesbaden)

[4] R. Dreizler, C. Lüdde, *Theoretische Physik 1: Theoretische Mechanik* (Springer, Berlin)

[5] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Lehrbuch der Theoretischen Physik I: Mechanik* (Harri Deutsch, Thun & Frankfurt am Main)

[6] H. Goldstein, *Klassische Mechanik* (Akademische Verlagsgesellschaft Wiebaden)

[7] J.M. Knudsen, P.G. Hjorth, *Elements of Newtonian Mechanics* (Springer, Berlin)

[8] J.R. Taylor, *Klassische Mechanik* (Pearson, Hallbergmoos)

[9] H.R. Petry, B.C. Metsch, *Theoretische Mechanik* (Oldenburg, München)

[10] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik* (Harri Deutsch, Thun & Frankfurt am Main)