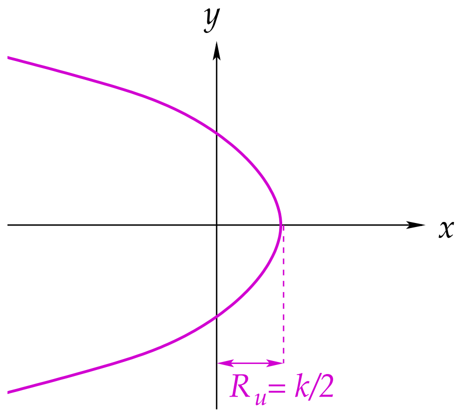

Abbildung 2.44: Parabel.

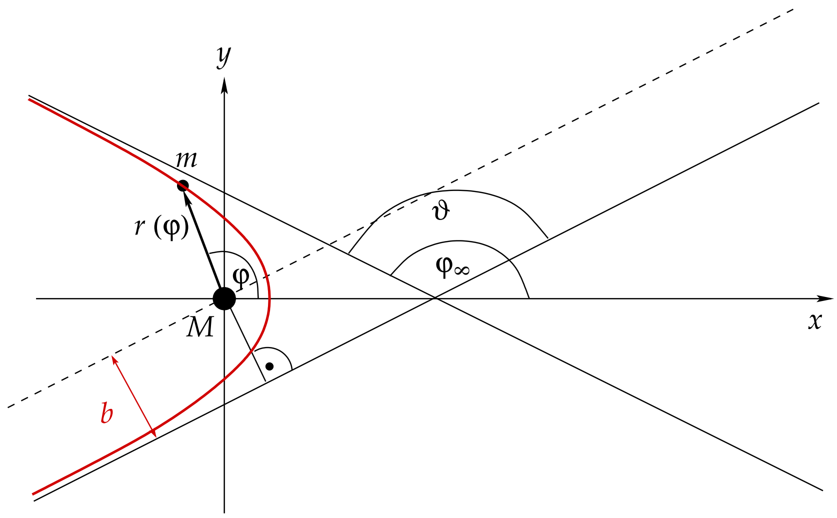

Abbildung 2.45: Hyperbel.

4. $\epsilon > 1$: Dieser Fall entspricht der **Hyperbel**. Die Hyperbel ist die typische Trajektorie für eine **Streuung** einer kleinen Masse m an einer großen Masse M, bzw. eines **Stoßes** einer kleinen Masse mit einer großen. Die kleine Masse kommt aus dem Unendlichen und wird durch das Potential der großen Masse von ihrer ursprünglichen Trajektorie abgelenkt. Wir betrachten dazu Abb. 2.45.

   Hier bezeichnet der Winkel ϑ den sog. **Streuwinkel** und b den sog. **Stoßparameter**. Nach Gl. (2.191) gilt für $r \to \infty$:

$$\cos \varphi_\infty = -\frac{1}{\epsilon} \, .$$

   Außerdem gilt aufgrund von Abb. 2.45

$$\pi - \vartheta = 2\,(\pi - \varphi_\infty) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\vartheta}{2} = \varphi_\infty - \frac{\pi}{2} \, .$$

Daraus folgt

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = \sin\left(\varphi_\infty - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\varphi_\infty = \frac{1}{\epsilon}\,, \tag{2.195}$$

wobei wir $\sin(x-y) = \sin x\,\cos y - \sin y\,\cos x$ und $\cos(\pi/2) = 0$, $\sin(\pi/2) = 1$ benutzt haben. Sei $\dot{\vec{r}}_\infty$ die Geschwindigkeit der Masse m bei $r \to \infty$, wo das Potential verschwindet. Dann ist die Gesamtenergie durch die kinetische Energie gegeben,

$$E = \frac{1}{2}\,m\,\dot{\vec{r}}_\infty^{\,2} = \frac{1}{2}\,m\,\dot{r}_\infty^2 \Longrightarrow \quad \dot{r}_\infty = \sqrt{\frac{2\,E}{m}}\,, \tag{2.196}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass für gegebenes $L = const. < \infty$ der Drehimpulsterm $L^2/(2mr^2)$ in der kinetischen Energie für $r \to \infty$ verschwindet. Die Drehimpulserhaltung liefert

$$L = m\,|\vec{r} \times \dot{\vec{r}}| = m\,|\vec{r}_\infty \times \dot{\vec{r}}_\infty| = m\,b\,\dot{r}_\infty = b\,\sqrt{2\,E\,m}\,. \tag{2.197}$$

wobei wir Gl. (2.196) benutzt haben und die Tatsache, dass die Projektion von $\vec{r}_\infty$ senkrecht zur Richtung von $\dot{\vec{r}}_\infty$ gerade der Stoßparameter ist. Gleichung (2.197) besagt, dass der Stoßparameter eindeutig durch L und E festgelegt ist,

$$b = \frac{L}{\sqrt{2\,E\,m}}\,. \tag{2.198}$$

Außerdem gilt mit den Glgen. (2.193), (2.195) und (2.198)

$$\begin{aligned}
\epsilon^2 - 1 &= \frac{1}{\sin^2(\vartheta/2)} - 1 = \frac{1-\sin^2(\vartheta/2)}{\sin^2(\vartheta/2)} = \frac{\cos^2(\vartheta/2)}{\sin^2(\vartheta/2)} = \cot^2\frac{\vartheta}{2} \\
&= \frac{2\,L^2 m\,E}{(\gamma\,m^2 M)^2} = \frac{4\,b^2 m^2 E^2}{(\gamma\,m^2 M)^2} = \frac{4\,b^2 E^2}{(\gamma\,m\,M)^2} \\
\Longleftrightarrow \quad \tan\frac{\vartheta}{2} &= \frac{\gamma\,m\,M}{2\,b\,E}\,.
\end{aligned} \tag{2.199}$$

Dies bedeutet, dass der Streuwinkel durch b und E festgelegt ist.

2.5.3 Die kosmischen Geschwindigkeiten

Wir betrachten die Bewegung eines Satelliten der Masse m_{Sat} um die Erde mit Masse M_E. Der Satellit bewege sich auf einer elliptischen Bahn mit Gesamtenergie E und mit Drehimpuls L_0. Das dazugehörige effektive Potential ist in Abb. 2.46(a) dargestellt.

Offensichtlich gibt es bei der Satellitenbahn Werte für den radialen Abstand r, die innerhalb des Erdradius R_E liegen. Dies bedeutet nichts anderes, als dass der Satellit irgendwann auf der Erdoberfläche aufschlägt. Dies kann verhindert werden, indem man den Drehimpulsanteil der kinetischen Energie erhöht. Dies ist in Abb. 2.46(b) für einen ausreichend großen Drehimpuls L_3 dargestellt. Die Satellitenbahn hat zwar dieselbe Gesamtenergie E wie vorher, liegt aber nun vollständig außerhalb des Erdradius, d.h. oberhalb der Erdoberfläche, so dass ein Zerschellen des Satelliten ausgeschlossen ist.

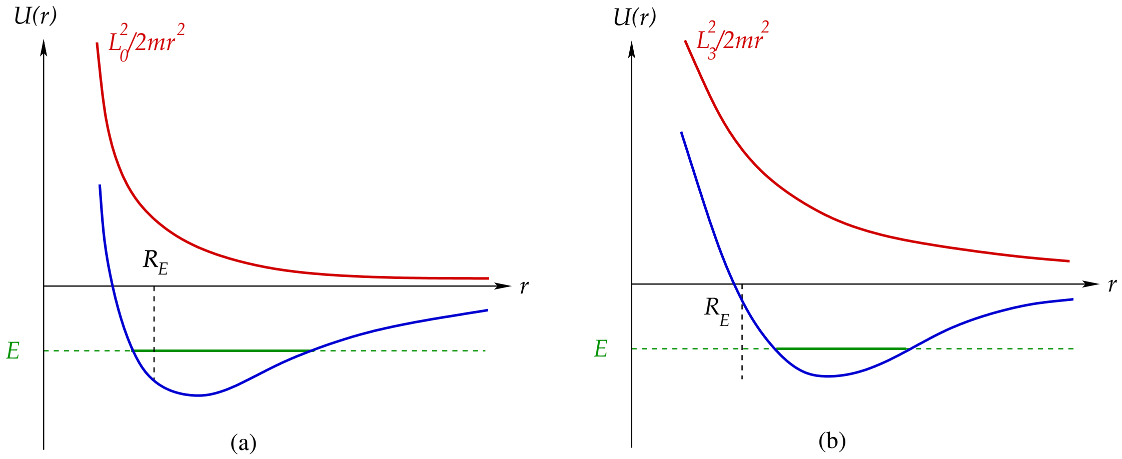

Abbildung 2.46: Das effektive Potential für (a) zu geringen Drehimpuls L_0, (b) für ausreichend großen Drehimpuls L_3.

Der minimal erforderliche Drehimpuls L_1 ist gerade derjenige, bei dem der erdnächste Punkt, das sog. **Perigäum** (in Analogie zum Perihel bei der Bewegung der Erde um die Sonne) $r_1 = r(\varphi = 0)$ mit dem Erdradius R_E übereinstimmt. Dann streift die Satellitenbahn gerade an ihrem erdnächsten Punkt die Erdoberfläche. Da am Perigäum $\vec{r}$ und $\dot{\vec{r}}$ senkrecht aufeinanderstehen, gilt

$$L_1 = m_{\mathrm{Sat}}\, R_E\, v_1 \ ,$$

wobei v_1 die zum Wert von L_1 passende Geschwindigkeit ist. Andererseits gilt mit Gl. (2.193)

$$\begin{aligned} R_E &= r_1 = \frac{k}{1+\epsilon} = \frac{L_1^2}{\gamma\, m_{\mathrm{Sat}}^2 M_E}\, \frac{1}{1+\epsilon} = \frac{m_{\mathrm{Sat}}^2 R_E^2 v_1^2}{\gamma\, m_{\mathrm{Sat}}^2 M_E}\, \frac{1}{1+\epsilon} = \frac{R_E^2 v_1^2}{\gamma\, M_E}\, \frac{1}{1+\epsilon} \\ \Longleftrightarrow \quad v_1^2 &= \frac{\gamma\, M_E}{R_E}\,(1+\epsilon) \geq \frac{\gamma\, M_E}{R_E} \ . \end{aligned} \tag{2.200}$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite bildet die untere Grenze für v_1 und entspricht dem Fall $\epsilon = 0$, also der Kreisbahn. Nun ist der Betrag der Gravitationskraft an der Erdoberfläche gegeben durch

$$F_G(R_E) = \frac{\gamma\, m_{\mathrm{Sat}}\, M_E}{R_E^2} \equiv m_{\mathrm{Sat}}\, g \ ,$$

was einen Ausdruck für die **Erdbeschleunigung** g liefert,

$$g = \frac{\gamma\, M_E}{R_E^2} \ . \tag{2.201}$$

Eingesetzt in Gl. (2.200) ergibt sich die sog. **erste kosmische Geschwindigkeit**

$$v_1 \geq \sqrt{g\, R_E} \simeq 7{,}91\, \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \ . \tag{2.202}$$

Dies ist die **Mindestgeschwindigkeit**, die ein Objekt in einer Erdumlaufbahn haben muss.

Um den Bereich der Erdanziehung zu verlassen, ist eine größere Geschwindigkeit notwendig. Die nicht geschlossene Bahn geringster Energie ist die Parabel, mit $E = 0$. Wir nehmen an, dass der Umkehrpunkt der Parabelbahn des Satelliten gerade auf der Erdoberfläche liegt, $R_u \equiv R_E$. Dort stehen Geschwindigkeit und Ortsvektor senkrecht aufeinander, so dass

$$L_2 = m_{\text{Sat}}\, R_u\, v_2 \equiv m_{\text{Sat}}\, R_E\, v_2 \;.$$

Andererseits ist nach Gl. (2.187) mit Gl. (2.201)

$$\begin{aligned} R_u &\equiv R_E = \frac{L_2^2}{2\,\gamma\, m_{\text{Sat}}^2 M_E} = \frac{m_{\text{Sat}}^2 R_E^2 v_2^2}{2\,\gamma\, m_{\text{Sat}}^2 M_E} = \frac{R_E^2 v_2^2}{2\,\gamma\, M_E} = \frac{v_2^2}{2\,g} \\ \Longleftrightarrow \quad v_2 &= \sqrt{2\,g\,R_E} \equiv \sqrt{2}\, v_1 = 11,2\,\frac{\text{km}}{\text{s}}\;. \end{aligned} \tag{2.203}$$

Dies ist die sog. **zweite kosmische Geschwindigkeit**, die ein Objekt braucht, um den Bereich der Erdanziehung zu verlassen.

2.5.4 Die Keplerschen Gesetze

Zum Abschluss dieses Kapitels zitieren wir noch die **Keplerschen Gesetze**:

1. **Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.**

   Dies folgt aus der Energie- und Drehimpulserhaltung. Ellipsen (und, als Spezialfall, der Kreis) sind die einzig möglichen geschlossenen Bahnformen im Gravitationspotential.

2. **Der Fahrstrahl von der Sonne zu einem Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.**

   Dies ist der schon oben bewiesene **Flächensatz**, vgl. Gl. (2.166). Er folgt aus der Drehimpulserhaltung.

3. **Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Ellipsenhalbachsen.**

   Beweis: Die Fläche einer Ellipse ist

   $$S = \pi\, a\, b \equiv T\, \dot{S} = T\,\frac{L}{2\,m}\;,$$

   wobei T die Umlaufzeit eines Planeten ist und wo wir den Flächensatz (2.166) benutzt haben, der besagt, dass die Flächengeschwindigkeit $\dot{S}$ den konstanten Wert $L/(2m)$ annimmt. Nun ist mit den Glgen. (2.193) und (2.194)

   $$\frac{T^2}{a^3} = \frac{\pi^2 b^2}{a}\frac{4\,m^2}{L^2} = \frac{4\pi^2 m^2}{L^2}\,k = \frac{4\pi^2 m^2}{L^2}\,\frac{L^2}{\gamma\, m^2 M} = \frac{4\pi^2}{\gamma\, M} = const.\;, \quad \text{q.e.d.}$$

3 Mechanik der Mehrteilchensysteme

3.1 Bewegungsgleichungen

Die meisten realen physikalischen Systeme bestehen nicht nur aus **einem einzelnen** Teilchen oder Massenpunkt, sonder aus **vielen** solchen Teilchen, die miteinander wechselwirken.

Wir betrachten ein System aus N Teilchen, die wir mit $i = 1, \ldots, N$ durchnumerieren, und definieren

(i) $\vec{r}_i$: **Ortsvektor** des $i-$ten Teilchens,

(ii) m_i: **Masse** des $i-$ten Teilchens,

(iii) $\vec{F}_i$: **Gesamtkraft**, die auf das $i-$te Teilchen wirkt,

(iv) $\vec{F}_i^{(\mathrm{ex})}$: **äußere Kraft**, die auf das $i-$te Teilchen wirkt; für **abgeschlossene Systeme** verschwindet diese Kraft für alle Teilchen, $\vec{F}_i^{(\mathrm{ex})} = 0\,,\ \forall\, i = 1, \ldots, N$,

(v) $\vec{F}_{ij}$: von Teilchen j auf Teilchen i ausgeübte **innere Kraft**. Innere Kräfte sind in der Regel **Zweikörperkräfte**, d.h. sie hängen i.a. von den Positionen $\vec{r}_i$, $\vec{r}_j$, den Geschwindigkeiten $\dot{\vec{r}}_i$, $\dot{\vec{r}}_j$ und der Zeit t ab. Nach dem dritten Newtonschen Axiom gilt $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ und $\vec{F}_{ii} = 0$.

Die **Newtonsche Bewegungsgleichung** für das $i-$te Teilchen lautet

$$m_i\, \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i = \vec{F}_i^{(\mathrm{ex})} + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N} \vec{F}_{ij}\ . \tag{3.1}$$

Für Mehrteilchensysteme mit $N > 2$ sind diese Bewegungsgleichungen i.a. **nicht mehr analytisch lösbar**. Es lassen sich dennoch eine Reihe **allgemeiner** Aussagen machen. Der Fall $N = 2$ wird später gesondert betrachtet.

3.2 Erhaltungssätze

3.2.1 Impulssatz (Schwerpunktsatz)

Wir summieren die Bewegungsgleichung (3.1) über i,

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\, \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(\mathrm{ex})} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \vec{F}_{ij}\ .$$

Der zweite Term auf der rechten Seite verschwindet,

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N} \vec{F}_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N} \vec{F}_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{\substack{j,i=1\\ i\neq j}}^{N} \vec{F}_{ji} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N} (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{N} (\vec{F}_{ij} - \vec{F}_{ij}) = 0\,,$$

wobei wir im ersten Schritt lediglich die Summationsindizes i und j im zweiten Term vertauscht und im letzten Schritt das dritte Newtonsche Axiom, $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$, benutzt haben. Wir erhalten also

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\,\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(\mathrm{ex})} \tag{3.2}$$

Wir definieren nun

(i) **Gesamtmasse** $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$,

(ii) **Schwerpunkt** $\vec{R} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$; dies ist der **mittlere Ort** aller Massen, d.h. der **Massenmittelpunkt**,

(iii) **Gesamtimpuls** $\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i\,\dot{\vec{r}}_i \equiv M\,\dot{\vec{R}}$,

(iv) **Gesamtkraft** $\vec{F}^{(\mathrm{ex})} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(\mathrm{ex})}$.

Dann folgt aus Gl. (3.2) der sog. **Schwerpunktsatz**,

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\,\ddot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{P}} = M\,\ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{(\mathrm{ex})}\,. \tag{3.3}$$

Dies bedeutet, dass sich der Schwerpunkt eines Systems aus Massenpunkten so bewegt, als ob die gesamte Masse aller Teilchen in ihm vereinigt ist und alle **äußeren Kräfte** allein auf ihn wirken. Innere Kräfte haben auf die Bewegung des Schwerpunkts keinen Einfluß.

Der Schwerpunktsatz bietet nachträglich die Rechtfertigung dafür, ausgedehnte Körper durch einen Massenpunkt der Gesamtmasse M und lokalisiert im Schwerpunkt $\vec{R}$ zu idealisieren. Dies gilt natürlich nur, falls die Wechselwirkung der Konstituenten untereinander und ihre Bewegung relativ zueinander für das betrachtete physikalische System keine Rolle spielen.

Der Schwerpunktsatz ist gleichzeitig der **Impulssatz** für das $N-$Teilchensystem. Der Gesamtimpuls ist genau dann erhalten, $\vec{P} = \overrightarrow{const}.$, wenn $\vec{F}^{(\mathrm{ex})} = 0$. Dies ist der **Impulserhaltungssatz** für das Mehrteilchensystem.

3.2.2 Drehimpulssatz

Wir definieren den **Gesamtdrehimpuls** des $N-$Teilchensystems,

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \, \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i \; . \tag{3.4}$$

Ableiten nach der Zeit ergibt 3.2.2017

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}} &= \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\dot{\vec{r}}_i \times \dot{\vec{r}}_i + \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i \right) = \sum_{i=1}^{N} m_i \, \vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i \\ &= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times (m_i \, \ddot{\vec{r}}_i) = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i \\ &= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(\mathrm{ex})} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Den letzten Term schreiben wir wieder durch Umnumerieren der Indizes und Ausnutzen des dritten Newtonschen Axioms um in

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} \right) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} - \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{N} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} \; . \end{aligned} \tag{3.6}$$

Nun sind Zweikörperkräfte $\vec{F}_{ij}$ in der Regel parallel zur Richtung des Differenzvektors $\vec{r}_i - \vec{r}_j$, $\vec{F}_{ij} \parallel \vec{r}_i - \vec{r}_j$, vgl. Abb. 3.1. Dann verschwindet aber jedes Kreuzprodukt in der Summe in Gl. (3.6).

Gleichung (3.5) wird damit zum **Drehimpulssatz**,

$$\dot{\vec{L}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(\mathrm{ex})} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i^{(\mathrm{ex})} \equiv \vec{M}^{(\mathrm{ex})} \; , \tag{3.7}$$

wobei wir das auf das $i-$te Teilchen wirkende **äußere Drehmoment** $\vec{M}_i^{(\mathrm{ex})} \equiv \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(\mathrm{ex})}$ und das **gesamte** äußere Drehmoment $\vec{M}^{(\mathrm{ex})}$ definiert haben. Auch hier sind innere Kräfte unmaßgeblich.

Für ein abgeschlossenes System gilt $\vec{F}_i^{(\mathrm{ex})} = 0$, also auch $\vec{M}_i^{(\mathrm{ex})} = 0$, also $\vec{M}^{(\mathrm{ex})} = 0$. Dann ist der **Gesamtdrehimpuls erhalten**, $\vec{L} = \overrightarrow{const}.$.

Oft ist es sinnvoll, den Drehimpuls in einen **Schwerpunkts-** und einen **Relativanteil** zu zerlegen. Wir definieren den Abstandsvektor des $i-$ten Teilchens vom Schwerpunkt des Gesamtsystems,

$$\Delta \vec{r}_i = \vec{r}_i - \vec{R} \; .$$

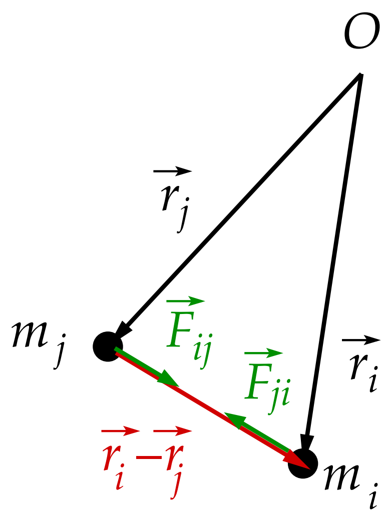

Abbildung 3.1: Abstandsvektor und Zweikörperkräfte zwischen zwei Massenpunkten m_i und m_j.

Dann gilt

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_{i=1}^{N} m_i \, (\vec{R} + \Delta\vec{r}_i) \times (\dot{\vec{R}} + \Delta\dot{\vec{r}}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{N} m_i \, (\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \vec{R} \times \Delta\dot{\vec{r}}_i + \Delta\vec{r}_i \times \dot{\vec{R}} + \Delta\vec{r}_i \times \Delta\dot{\vec{r}}_i) \\ &= M \, \vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \vec{R} \times \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \, \Delta\dot{\vec{r}}_i \right) + \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \, \Delta\vec{r}_i \right) \times \dot{\vec{R}} + \sum_{i=1}^{N} m_i \, \Delta\vec{r}_i \times \Delta\dot{\vec{r}}_i \, .\end{aligned}$$

Der zweite Term verschwindet aufgrund der Definition des Gesamtimpulses,

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \, \Delta\dot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \, \dot{\vec{r}}_i - \sum_{i=1}^{N} m_i \, \dot{\vec{R}} = \vec{P} - M \, \dot{\vec{R}} \equiv 0 \, .$$

Der dritte Term verschwindet aufgrund der Definition des Schwerpunkts,

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \, \Delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \, \vec{r}_i - \sum_{i=1}^{N} m_i \, \vec{R} = M \, \vec{R} - M \, \vec{R} \equiv 0 \, .$$

Wir erhalten also das Resultat

$$\vec{L} = M \, \vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \sum_{i=1}^{N} m_i \, \Delta\vec{r}_i \times \Delta\dot{\vec{r}}_i = \vec{R} \times \vec{P} + \sum_{i=1}^{N} \Delta\vec{r}_i \times \Delta\vec{p}_i \equiv \vec{L}_S + \vec{L}_r \, , \tag{3.8}$$

wobei wir den Drehimpuls der Gesamtmasse, bezogen auf den Koordinatenursprung,

$$\vec{L}_S \equiv \vec{R} \times \vec{P} \, , \tag{3.9}$$

und den Drehimpuls aller N Teilchen, bezogen auf den Schwerpunkt,

$$\vec{L}_r = \sum_{i=1}^{N} \Delta\vec{r}_i \times \Delta\vec{p}_i \ , \tag{3.10}$$

definiert haben.

3.2.3 Energiesatz

Wir multiplizieren die Newtonsche Bewegungsgleichung (3.1) skalar mit $\dot{\vec{r}}_i$ und summieren über i,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} m_i\, \dot{\vec{r}}_i \cdot \ddot{\vec{r}}_i &= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_i\, \dot{\vec{r}}_i^{\,2}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2} m_i\, \dot{\vec{r}}_i^{\,2} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{N} T_i = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i \ . \end{aligned} \tag{3.11}$$

Hier ist $T_i = m_i\, \dot{\vec{r}}_i^{\,2}/2$ die **kinetische Energie des $i-$ten Teilchens** und $T = \sum_{i=1}^{N} T_i$ die **gesamte kinetische Energie**.

Wir machen eine Fallunterscheidung:

1. Falls **alle** Kräfte $\vec{F}_i$ **konservativ** sind, so gilt

   $$\vec{\nabla}_i \times \vec{F}_i = 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, N \ ,$$

   wobei $\vec{\nabla}_i \equiv (\partial/\partial x_i, \partial/\partial y_i, \partial/\partial z_i)^T$ der Nabla-Operator bezüglich der Koordinaten des $i-$ten Teilchens ist. Aus dem Verschwinden der Rotation der $\vec{F}_i$ folgt die Existenz eines Potentials $V(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)$ mit $\vec{F}_i = -\vec{\nabla}_i V$. Dann gilt

   $$\sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i = -\sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{\nabla}_i V \equiv -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \ . \tag{3.12}$$

   Hier haben wir ausgenutzt, dass das totale Differential der Funktion $V(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)$ die Form

   $$dV(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i + \frac{\partial V}{\partial y_i}\mathrm{d}y_i + \frac{\partial V}{\partial z_i}\mathrm{d}z_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \vec{\nabla}_i V \cdot \mathrm{d}\vec{r}_i$$

   hat. Setzen wir Gl. (3.12) in in Gl. (3.11) ein, so folgt der **Energieerhaltungssatz**,

   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+V) = 0 \implies T + V \equiv E = \mathit{const.} \ . \tag{3.13}$$

2. Im allgemeinen Fall spalten wir die Kräfte in einen konservativen und einen dissipativen Anteil auf, $\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(\mathrm{kons})} + \vec{F}_i^{(\mathrm{diss})}$. Dann folgt nach den gleichen Überlegungen wie im ersten Fall für den konservativen Anteil der Kraft der sog. **Energiesatz**

   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+V) \equiv \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{F}_i^{(\mathrm{diss})} \ , \tag{3.14}$$

   d.h. die Änderung der Gesamtenergie ist gleich der Leistung der dissipativen Kräfte.