

also wenn die Funktion  $f$  in Gl. (2.167) lediglich vom **Betrag**  $r$  des Ortsvektors abhängt.

**Beweis:**

- Wir nehmen an, dass die Zentralkraft  $\vec{F} = f \vec{e}_r$  konservativ ist. Dann kann sie nicht von der Geschwindigkeit und explizit von der Zeit abhängen kann, d.h.  $f = f(\vec{r})$ . Die Funktion  $f(\vec{r})$  kann im Prinzip von Betrag **und** Richtung des Ortsvektors abhängen. Es bleibt zu zeigen, dass **keine** solche Richtungsabhängigkeit besteht, also  $f(\vec{r}) = f(r)$ . Dies geht wie folgt. Aus der Tatsache, dass  $\vec{F}$  konservativ ist, folgt

$$0 = \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times [f(\vec{r}) \vec{e}_r] = \vec{\nabla} \times \left[ f(\vec{r}) \frac{\vec{r}}{r} \right] = \frac{f(\vec{r})}{r} \vec{\nabla} \times \vec{r} + \left[ \vec{\nabla} \frac{f(\vec{r})}{r} \right] \times \vec{r}.$$

Der erste Term verschwindet wegen Gl. (1.88) (man setze die Funktion  $f(r)$  in dieser Gleichung gleich  $r$ ). Damit müssen die Vektoren  $\vec{\nabla}(f(\vec{r})/r)$  und  $\vec{r}$  **parallel** zueinander stehen. Das Gradientenfeld  $\vec{\nabla}(f(\vec{r})/r)$  steht aber per Definition überall **senkrecht** zu den Flächen  $f(\vec{r})/r = const.$ . Damit stehen diese Flächen **überall senkrecht** zum Ortsvektor  $\vec{r}$  (da dieser parallel zum Gradientenfeld  $\vec{\nabla}(f(\vec{r})/r)$  steht). Damit dies erfüllt ist, müssen die Flächen  $f(\vec{r})/r$  **Kugelflächen** mit konstantem Radius  $r$  um den Ursprung sein. Aufgrund der Symmetrie der Kugelfläche kann aber  $f(\vec{r})$  nicht von der Richtung von  $\vec{r}$  abhängen, sondern nur vom Betrag,  $f(\vec{r}) = f(r)$ .

- Wir nehmen an, dass  $\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \vec{e}_r$ . Nach Gl. (1.88) gilt dann  $\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = 0$ , d.h.  $\vec{F}(\vec{r})$  ist konservativ.

Es gilt außerdem der folgende

**Satz:** Eine konservative Kraft  $\vec{F}$  ist **genau dann eine Zentralkraft, wenn**  $V(\vec{r}) = V(r)$ .

**Beweis:**

- Wir nehmen an, dass  $\vec{F}(\vec{r})$  konservativ ist, und dass  $V(\vec{r}) = V(r)$ . Es ist zu zeigen, dass  $\vec{F}(\vec{r})$  eine Zentralkraft ist. Es gilt

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(r) = -\frac{dV(r)}{dr} \vec{\nabla}r = -\frac{dV(r)}{dr} \vec{e}_r,$$

wobei wir Gl. (1.81) benutzt haben. Damit zeigt  $\vec{F}(\vec{r})$  in Richtung des Ortsvektors, ist also eine Zentralkraft.

- Wir nehmen an, dass die konservative Kraft  $\vec{F}(\vec{r})$  eine Zentralkraft ist. Es ist zu zeigen, dass  $V(\vec{r}) = V(r)$ . Es gilt

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \vec{e}_r = -\vec{\nabla}V(\vec{r}),$$

d.h.

$$\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x_i} = -\frac{f(r)}{r} x_i = -f(r) \frac{\partial r}{\partial x_i},$$

wobei wir Gl. (1.73) ausgenutzt haben. Sei nun  $\tilde{f}(r)$  so, dass  $f(r) = d\tilde{f}(r)/dr$ , dann ist

$$\frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x_i} = -\frac{\partial \tilde{f}(r)}{\partial x_i}.$$

Da dies für alle Richtungen  $i = 1, 2, 3$  gilt, kann  $V$  nicht auch noch von der Richtung des Ortsvektors abhängen, sondern wie auch die Funktion  $\tilde{f}(r)$  lediglich vom Betrag  $r$ , also  $V(\vec{r}) = V(r)$ , q.e.d.

## 2.5 Das Keplerproblem

### 2.5.1 Bewegung in konservativen Zentralkraftfeldern

Im letzten Kapitel haben wir gesehen, dass für **konservative** Kräfte die **Energieerhaltung** gilt,

$$E = T + V = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 + V(\vec{r}) = \text{const.}$$

Außerdem gilt für **Zentralkraftfelder** die **Drehimpulserhaltung**,

$$\vec{L} = m \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \overrightarrow{\text{const.}} \quad (2.169)$$

Man spricht bei  $E$  und  $\vec{L}$  von den sog. **ersten Integralen der Bewegung**, da sie aus einmaliger Integration der Bewegungsgleichungen folgen. Die Erhaltungsgrößen enthalten nur noch die ersten Zeitableitungen des Ortsvektors, im Gegensatz zur Bewegungsgleichung, die die zweite Zeitableitung enthält. Mit den Erhaltungsgrößen läßt sich ein allgemeines Verfahren zur Lösung der Bewegungsgleichungen formulieren. Dies wollen wir im folgenden besprechen.

Im letzten Kapitel haben wir gesehen, dass konservative Zentralkraftfelder die Form

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(r) \quad (2.170)$$

haben. Wir wählen das Koordinatensystem so, dass

$$\vec{L} = L \vec{e}_z, \quad (2.171)$$

d.h. aufgrund der Drehimpulserhaltung (2.169) findet die Bewegung zu **allen Zeiten** in der  $(x, y)$ -Ebene statt. Wir wählen zur Beschreibung dieser Bewegung **ebene Polarkoordinaten**,

$$\begin{aligned} \vec{r} &= r \vec{e}_r, \\ \dot{\vec{r}} &= \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi, \end{aligned}$$

vgl. Glgen. (1.164) und (1.165). Der Drehimpuls berechnet sich dann zu

$$\vec{L} = m \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = m r \vec{e}_r \times (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi) = m r^2 \dot{\varphi} \vec{e}_z, \quad (2.172)$$

wobei wir  $\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = \vec{e}_z$  benutzt haben. Die Gleichungen (2.169) und (2.171) liefern nun

$$L = m r^2 \dot{\varphi} = \text{const.} \quad (2.173)$$

Dies liefert die Relation  $mr^2\dot{\varphi}^2 = L^2/(mr^2)$ , die wir gleich benutzen werden. Es gilt nämlich für die Energie (2.170)

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V(r) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + V(r) \\ &= \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \equiv \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + U(r) = \text{const.}, \end{aligned} \quad (2.174)$$

wobei wir das **effektive Potential**

$$U(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) \quad (2.175)$$

für die **eindimensionale** Bewegung in **Radialrichtung** eingeführt haben.

Die Lösung der Bewegungsgleichung ist die Bahnkurve  $\vec{r}(t) = r(t)(\cos \varphi(t), \sin \varphi(t), 0)^T$ . Zur Bestimmung der Bahnkurve müssen wir also die Funktionen  $r(t)$  und  $\varphi(t)$  berechnen. Dies geht direkt aus den Erhaltungssätzen (2.173) und (2.174), ohne Zuhilfenahme der Newtonschen Gleichung.

Aus Gl. (2.174) leiten wir die folgende Differentialgleichung erster Ordnung für  $r$  ab:

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} \dot{r}^2 &= E - U(r) \\ \Leftrightarrow \dot{r}^2 &= \frac{2}{m} [E - U(r)] \\ \Leftrightarrow \dot{r} &= \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(r)]}. \end{aligned} \quad (2.176)$$

Diese Differentialgleichung löst man mit Hilfe der Methode der **Variablentrennung**. Wir schreiben  $\dot{r} \equiv dr/dt$  und schreiben den  $t$ - und den  $r$ -abhängigen Anteil auf getrennte Seiten der Gleichung,

$$dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U(r)]}}. \quad (2.177)$$

Integration von  $t_0$  bis  $t$ , bzw. von  $r_0 = r(t_0)$  bis  $r = r(t)$  ergibt

$$\int_{t_0}^t dt' \equiv t - t_0 = \pm \int_{r_0}^r dr' \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U(r')]}}, \quad (2.178)$$

Für  $t > t_0$  ist die linke Seite dieser Gleichung stets positiv, deswegen ist das positive Vorzeichen zu wählen, wenn  $r$  mit der Zeit anwächst,  $r > r_0$ , bzw. das negative, wenn  $r$  mit der Zeit kleiner wird,  $r < r_0$ . Gleichung (2.178) bestimmt die Funktion  $t(r)$  und die Umkehrung dieser Funktion liefert die gesuchte Funktion  $r(t)$ . Damit ist die Bewegung in **Radialrichtung** bekannt.

Für die Bewegung in  $\varphi$ -Richtung wenden wir die Methode der Variablentrennung auf Gl. (2.173) an,

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &\equiv \frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{mr^2} \\ \Leftrightarrow d\varphi &= \frac{L}{mr^2} dt = \pm \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - U(r)]}} = \pm \frac{L}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2m [E - U(r)]}}, \end{aligned} \quad (2.179)$$

wobei wir im vorletzten Schritt Gl. (2.177) benutzt haben. Integration von  $\varphi_0$  bis  $\varphi$  bzw. von  $r_0 \equiv r(\varphi_0)$  bis  $r = r(\varphi)$  liefert

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi' \equiv \varphi - \varphi_0 = \pm L \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2} \frac{1}{\sqrt{2m[E - U(r')]}}, \quad (2.180)$$

Dies bestimmt die Funktion  $\varphi(r)$  und mit der Funktion  $r(t)$  erhält man durch Einsetzen die Funktion  $\varphi(r(t)) \equiv \varphi(t)$ . Damit ist auch die Bewegung in  $\varphi$ -Richtung bestimmt und das Problem gelöst.

### Bemerkungen:

1. Man beachte, dass wir zur Lösung des Problems die Newtonschen Bewegungsgleichungen nicht benötigt haben, sondern ausschließlich die Energie- und Drehimpulserhaltung. Letztere folgen jedoch auch aus den Newtonschen Bewegungsgleichungen. Um dies zu sehen, betrachten wir die Newtonschen Bewegungsgleichungen in ebenen Polarkoordinaten, vgl. Gl. (1.166),

$$\begin{aligned} m \ddot{\vec{r}} &= m (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \vec{e}_r + m (r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi \\ &= \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(r) = -\frac{dV(r)}{dr} \vec{\nabla}r = -\frac{dV(r)}{dr} \vec{e}_r. \end{aligned}$$

$$\iff m (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) = -\frac{dV(r)}{dr}, \quad (2.181)$$

$$r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi} = 0. \quad (2.182)$$

Gleichung (2.181) schreibt sich mit  $\dot{\varphi} = L/(m r^2)$  und Gl. (2.175) in

$$\begin{aligned} m \ddot{r} &= m r \dot{\varphi}^2 - \frac{dV(r)}{dr} = m r \frac{L^2}{m^2 r^4} - \frac{dV(r)}{dr} = \frac{L^2}{m r^3} - \frac{dV(r)}{dr} \\ &= -\frac{d}{dr} \left[ \frac{L^2}{2 m r^2} + V(r) \right] \equiv -\frac{dU(r)}{dr} \end{aligned} \quad (2.183)$$

um. Die Bewegung in Radialrichtung entspricht also einer **eindimensionalen** Bewegung im **effektiven Potential**  $U(r)$ . Multiplizieren wir diese Gleichung mit  $\dot{r}$ , so ergibt sich mit Gl. (2.174)

$$\begin{aligned} m \dot{r} \ddot{r} &\equiv \frac{d}{dt} \frac{m \dot{r}^2}{2} = -\frac{dU(r)}{dr} \frac{dr}{dt} \equiv -\frac{dU}{dt} \\ \iff \frac{d}{dt} \left( \frac{m \dot{r}^2}{2} + U \right) &\equiv \frac{dE}{dt} = 0, \end{aligned}$$

d.h. die **Energieerhaltung**.

Wir multiplizieren Gl. (2.182) mit  $m r$  und erhalten mit Gl. (2.173)

$$0 = m r^2 \ddot{\varphi} + 2 m r \dot{r} \dot{\varphi} = \frac{d}{dt} (m r^2 \dot{\varphi}) = \frac{dL}{dt},$$

d.h. die **Drehimpulserhaltung**.

2. Offenbar muss stets  $E \geq U(r)$  gelten, ansonsten ist die Radialgeschwindigkeit (2.176) nicht reell. Wir definieren

- (i) **Klassisch erlaubte Bereiche:** alle  $r$ , für die  $E \geq U(r)$ .
- (ii) **Klassisch verbotene Bereiche:** alle  $r$ , für die  $E < U(r)$ .
- (iii) **Umkehrpunkte der Bewegung:** alle  $r$ , für die  $\dot{r} = 0$ , also  $E = U(r)$ .

Dies wird in Abb. 2.36 an einem Beispiel verdeutlicht.

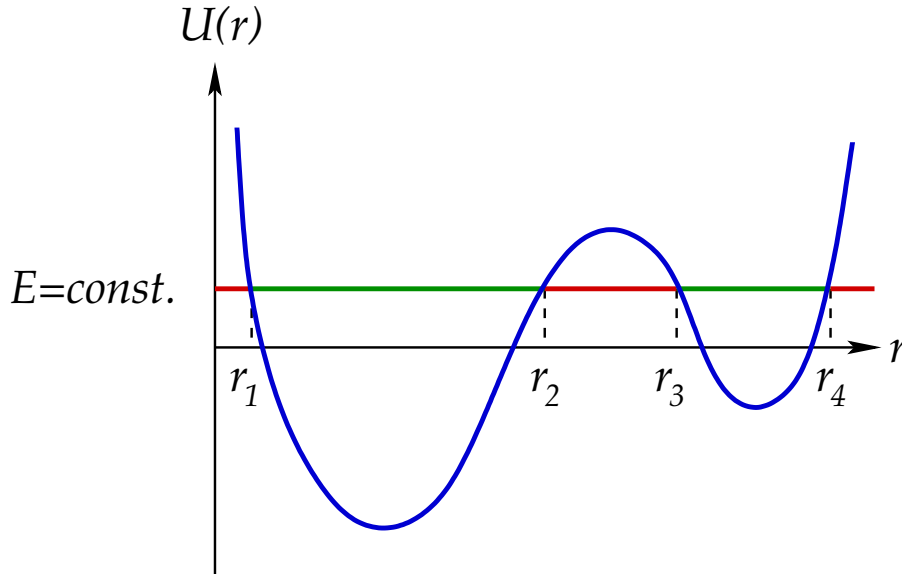


Abbildung 2.36: Ein Potential mit klassisch erlaubten und klassisch verbotenen Bereichen.

Für einen vorgegebenen Wert von  $E = const.$  sind die klassisch erlaubten Bereiche die Intervalle  $[r_1, r_2]$  und  $[r_3, r_4]$ . Die klassisch verbotenen Bereiche sind die Intervalle  $[0, r_1)$ ,  $(r_2, r_3)$  und  $(r_4, \infty)$ . Umkehrpunkte der Bewegung sind  $r_1, r_2, r_3$  und  $r_4$ . An den Minima und Maxima von  $U(r)$ , also wo  $dU(r)/dr = 0$ , verschwindet die Kraft in Radialrichtung.

## 2.5.2 Planetenbewegung

Ein Planet der Masse  $m$  bewegt sich im **Gravitationspotential**

$$V(r) = -\gamma \frac{mM}{r} \quad (2.184)$$

der Sonne, welche die Masse  $M$  habe. Das Zentrum der Sonne liegt hierbei im Ursprung des Koordinatensystems und das Zentrum des Planeten bei  $\vec{r}$ , hat also den Abstand  $r$  vom Koordinatenursprung. Die Newtonsche Gravitationskonstante  $\gamma \simeq 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ N (m/kg)}^2$  hatten wir schon nach Gl. (2.26) eingeführt. In der Tat liefert dieses Potential die Gravitationskraft aus Gl. (2.26),

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(r) = -\frac{dV(r)}{dr} \vec{\nabla}r = -\gamma \frac{mM}{r^2} \vec{e}_r .$$

Da es sich um eine Zentralkraft handelt, ist der Drehimpuls erhalten und die Bewegung des Planeten um die Sonne findet ausschließlich in einer Ebene, der sog. **Ekliptik**, statt. Wir können die Diskussion aus dem vorangegangenen Abschnitt direkt übernehmen.

Das im vorangegangenen Abschnitt eingeführte **effektive Potential** für die Bewegung in Radialrichtung hat die Form

$$U(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r) = \frac{L^2}{2mr^2} - \gamma \frac{mM}{r}. \quad (2.185)$$

Es besitzt also einen negativen, **attraktiven** Anteil, das Gravitationspotential (2.184), sowie einen positiven, **repulsiven** Anteil, die sog. **Drehimpulsbarriere**  $L^2/(2mr^2)$ . Beide Anteile sowie ihre Summe (2.185) sind in Abb. 2.37 dargestellt.

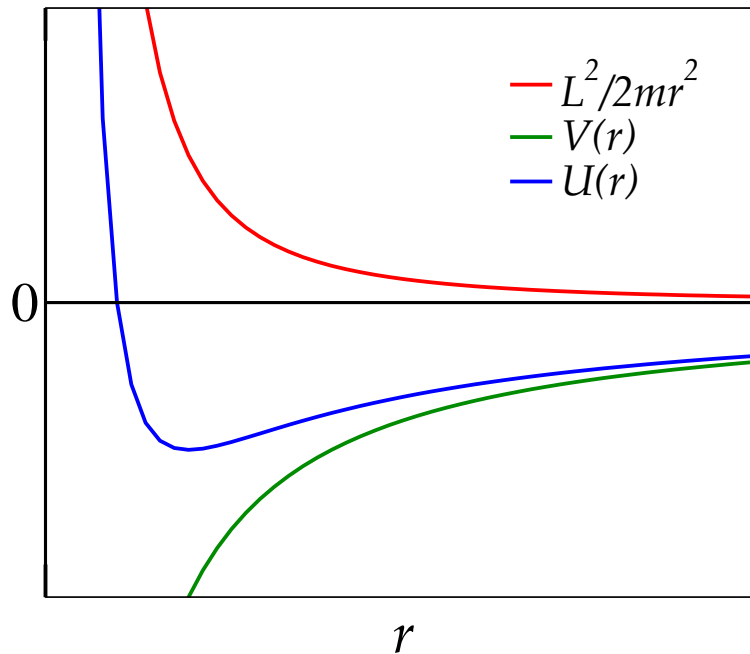


Abbildung 2.37: Das effektive Gravitationspotential für die Bewegung in Radialrichtung, welches sich aus dem eigentlichen Gravitationspotential und der Drehimpulsbarriere zusammensetzt.

Man beachte, dass sich die Form von  $U(r)$  in Abhängigkeit des Wertes von  $L$  **quantitativ**, aber **nicht qualitativ** ändert. Für gegebenes  $L$  gibt es in Abhängigkeit von der Gesamtenergie  $E$  mehrere Möglichkeiten für die **Bahnformen** des Planeten um die Sonne. Die entsprechenden Werte bzw. Bereiche für die Gesamtenergie sind in Abb. 2.38 eingezeichnet.

- (a)  $E < E_K$ : Da  $E_K = U(R_K)$  der Wert der Energie am Minimum des effektiven Potentials  $U(r)$  ist, gilt  $E < U(r)$  für alle  $r$ , d.h. wir befinden uns im klassisch

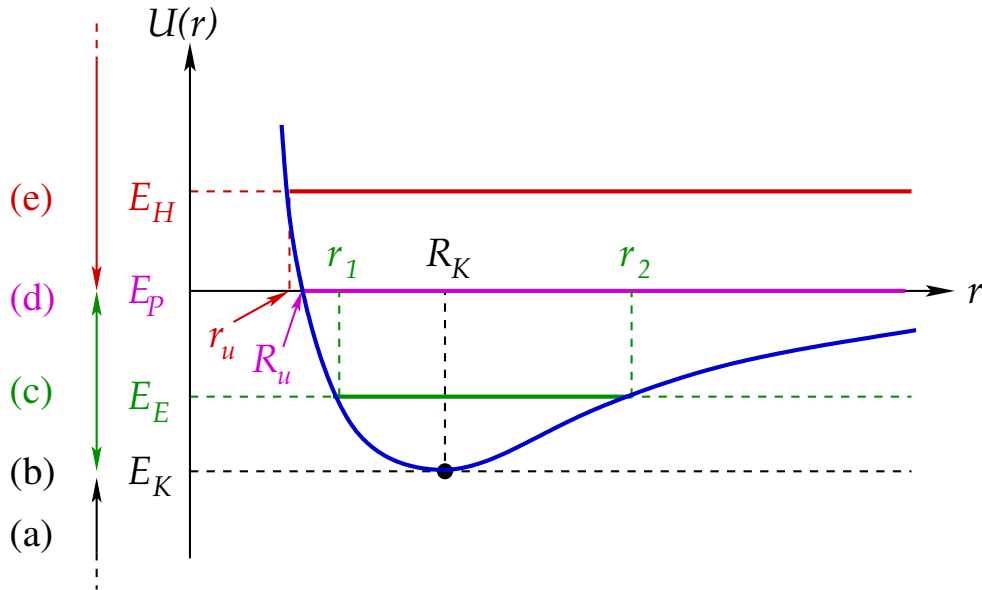


Abbildung 2.38: Das effektive Gravitationspotential und die Werte bzw. Bereiche der Gesamtenergie, die den möglichen Bahnformen entsprechen.

verbotenen Bereich. Dort gibt es **keine** Bahnform, die klassisch realisiert werden kann.

- (b)  $E = E_K$ : Man befindet sich am Minimum des effektiven Potentials. Der einzige klassisch erlaubte Wert für  $r$  ist  $r = R_K$ , den wir wie folgt berechnen:

$$0 = \left. \frac{dU(r)}{dr} \right|_{r=R_K} = -\frac{L^2}{m R_K^3} + \gamma \frac{m M}{R_K^2}$$

$$\iff \gamma m^2 M R_K = L^2 \iff R_K = \frac{L^2}{\gamma m^2 M}. \quad (2.186)$$

Offensichtlich gibt es nur einen einzigen Wert für den radialen Abstand  $r$  des Planeten von der Sonne, nämlich  $R_K$ . Es handelt sich also um eine **geschlossene** Bahnkurve mit **festem** radialem Abstand, also um eine **Kreisbahn** mit Radius  $R_K$ .

- (c)  $E_K < E < E_P = 0$ : Es handelt sich ebenfalls um **geschlossene** Bahnkurven, allerdings mit **variablem** radialem Abstand  $r$ , der zwischen  $r_1$  und  $r_2$  (den Umkehrpunkten der Radialbewegung) variiert. Wir vermuten (und werden diese Vermutung im folgenden bestätigen), dass es sich hierbei um **Ellipsenbahnen** handelt, vgl. Abb. [2.39](#).

Hierbei befindet sich die Sonne in einem der beiden Brennpunkte der Ellipse. Die Ellipse läßt sich als Funktion  $r(\varphi)$  darstellen, s. unten. Der sonnennächste Punkt ist bei  $\varphi = 0$ ,  $r(0) = r_1$ , der sog. **Perihel**. Der sonnenfernste Punkt ist bei  $\varphi = \pi$ ,  $r(\pi) = r_2$ , der sog. **Aphel**.

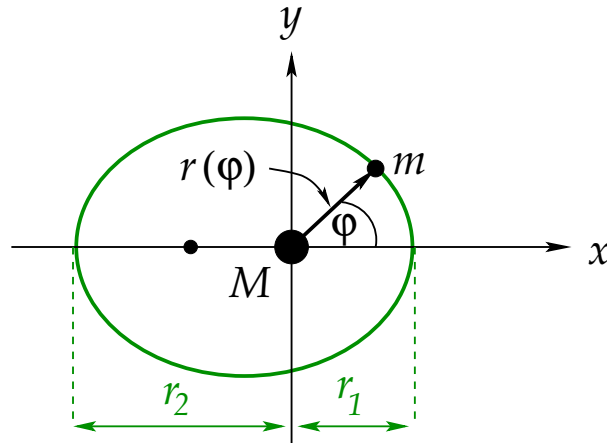


Abbildung 2.39: Ellipsenbahn.

- (d)  $E = E_P = 0$ : Es gibt nur einen Umkehrpunkt  $r = R_u$ , aber keinen zweiten. Dies bedeutet, dass es sich um eine **offene** Bahnkurve handelt. Wir werden im folgenden sehen, dass es sich um eine **Parabelbahn** handelt, vgl. Abb. [2.40](#).

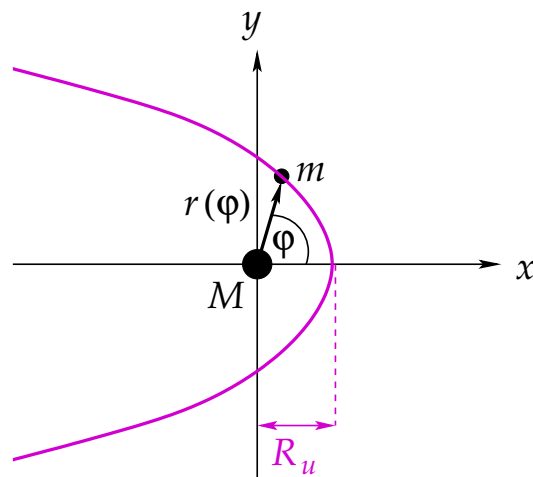


Abbildung 2.40: Parabelbahn.

Der Umkehrpunkt  $R_u$  bestimmt sich aus der Bedingung

$$0 = U(R_u) = \frac{L^2}{2m R_u^2} - \gamma \frac{m M}{R_u}$$

$$\iff 2\gamma m^2 M R_u = L^2 \iff R_u = \frac{L^2}{2\gamma m^2 M} \equiv \frac{R_K}{2}. \quad (2.187)$$

- (e)  $E > E_P = 0$ : Auch hier gibt es nur einen Umkehrpunkt  $r_u < R_u$ , d.h. es handelt sich wiederum um **offene** Bahnkurven. Wir werden sehen, dass es sich um **Hyperbelbahnen** handelt, s. Abb. [2.41](#).



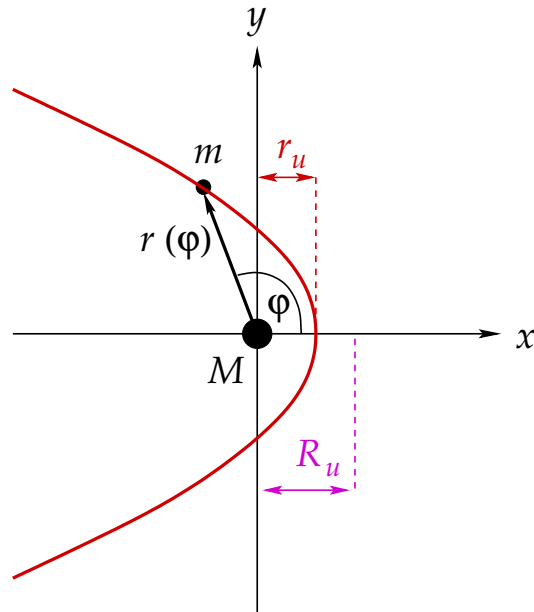


Abbildung 2.41: Hyperbelbahn.

27.1.2017

Wir zeigen nun, dass die Bewegungsgleichungen tatsächlich diese Bahnkurven liefern. Dazu gehen wir von Gl. (2.180) aus, setzen das effektive Potential (2.185) ein und substituieren die Variable  $s = 1/r'$ ,  $ds = -dr'/r'^2$ ,

$$\varphi - \varphi_0 = \pm L \int_{r_0}^r \frac{dr'}{r'^2} \frac{1}{\sqrt{2m \left[ E - \frac{L^2}{2mr'^2} + \gamma \frac{mM}{r'} \right]}} = \mp L \int_{1/r_0}^{1/r} ds \frac{1}{\sqrt{2mE - L^2 s^2 + 2\gamma m^2 M s}} \quad (2.188)$$

Dieses Integral ist ein Standardintegral vom Typ

$$\int dx \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

mit  $a = -L^2 < 0$ ,  $b = 2\gamma m^2 M$ ,  $c = 2mE$ . Die Stammfunktion hängt ab vom Vorzeichen von  $a$  und dem der Größe

$$\Delta \equiv 4ac - b^2 = -8L^2 m E - (2\gamma m^2 M)^2 = -4 [2L^2 m E + (\gamma m^2 M)^2].$$

Dies ist nicht automatisch negativ, denn  $E$  kann ebenfalls negativ werden. Eine obere Grenze für  $\Delta$  erhält man aber offensichtlich aus der unteren Grenze für  $E$ . Diese ergibt sich aus folgender Überlegung. Da die Kreisbahn als Bahnform für  $E = E_K = U(R_K)$  gesichert erscheint und daher keiner weiteren Klärung bedarf, betrachten wir  $E > E_K = U(R_K)$ . Für klassisch erlaubte Bahnen muss  $E \geq U(r)$  gelten,

$$E \geq U(r) > U(R_K) = \frac{L^2}{2m R_K^2} - \gamma \frac{mM}{R_K} = \frac{L^2}{2m} \frac{\gamma^2 m^4 M^2}{L^4} - \gamma m M \frac{\gamma m^2 M}{L^2} = -\frac{\gamma^2 m^3 M^2}{2L^2},$$

wobei wir Gl. (2.186) für  $R_K$  benutzt haben. Für  $\Delta$  erhalten wir daraus die obere Grenze

$$\Delta < -4 \left[ -2 L^2 m \frac{\gamma^2 m^3 M^2}{2 L^2} + (\gamma m^2 M)^2 \right] = 0 .$$

Für  $\Delta < 0$  und  $a < 0$  erhalten wir nach Konsultation einer gängigen Integraltafel (s. z.B. Ref. [10], Gl. 1.1.3.3.241)

$$\int dx \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = -\frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}} . \quad (2.189)$$

Nun müssen wir noch die Integrationsgrenzen in Gl. (2.188) festlegen. Wir wählen  $\varphi_0 = 0$ , also  $r_0 = r(0)$ . Dies ist nach den vorangegangenen Überlegungen (vgl. Abbildungen 2.39, 2.40 und 2.41) stets der Punkt des **kleinsten Abstands** zwischen den Massen  $m$  und  $M$ , also der **Umkehrpunkt der Bewegung** bei kleinen  $r$  ( $r_u$  im Fall der Hyperbel,  $R_u$  im Fall der Parabel und  $r_1$  im Fall der Ellipse). Er läßt sich aus folgender Gleichung bestimmen:

$$\begin{aligned} E = U(r_0) &= \frac{L^2}{2m r_0^2} - \gamma \frac{mM}{r_0} \\ \iff 2m E r_0^2 + 2\gamma m^2 M r_0 - L^2 &= 0 . \end{aligned}$$

Für  $E = 0$  folgt daraus

$$r_0 = \frac{L^2}{2\gamma m^2 M} \equiv R_u ,$$

wie es sein muss. Die Stammfunktion (2.189) an der unteren Integralgrenze  $1/r_0$  ist dann

$$\begin{aligned} -\frac{1}{L} \arcsin \frac{-2L^2/r_0 + 2\gamma m^2 M}{\sqrt{-\Delta}} &= -\frac{1}{L} \arcsin \frac{-4\gamma m^2 M + 2\gamma m^2 M}{2\gamma m^2 M} \\ &= -\frac{1}{L} \arcsin(-1) \equiv \frac{\pi}{2L} . \end{aligned}$$

Für  $E \neq 0$  erhalten wir durch Lösen der quadratischen Gleichung

$$r_0^2 + \frac{\gamma m M}{E} r_0 - \frac{L^2}{2m E} = 0$$

das Resultat

$$\begin{aligned} r_0 &= -\frac{\gamma m M}{2E} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma m M}{2E}\right)^2 + \frac{L^2}{2m E}} \\ &= \frac{1}{4m E} \left( -2\gamma m^2 M \pm \sqrt{(2\gamma m^2 M)^2 + 8L^2 m E} \right) \\ &\equiv \frac{1}{4m E} \left( -2\gamma m^2 M \pm \sqrt{-\Delta} \right) . \end{aligned}$$

Für  $E > 0$  ist das obere Vorzeichen zu wählen, um  $r_0 > 0$  zu erhalten. Für  $E < 0$  ist für  $r_0$  als sonnennächster Punkt der Bahn ebenfalls das obere Vorzeichen zu wählen (das

andere entspräche dem sonnenfernsten Punkt). Die Stammfunktion (2.189) an der unteren Integralgrenze ist

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{L} \arcsin \frac{-2L^2/r_0 + 2\gamma m^2 M}{\sqrt{-\Delta}} = -\frac{1}{L} \arcsin \frac{-2L^2 + 2\gamma m^2 M r_0}{r_0 \sqrt{-\Delta}} \\
 & = -\frac{1}{L} \arcsin \frac{-8L^2 m E + 2\gamma m^2 M (-2\gamma m^2 M + \sqrt{-\Delta})}{4m E r_0 \sqrt{-\Delta}} \\
 & = -\frac{1}{L} \arcsin \frac{-(-\Delta) + 2\gamma m^2 M \sqrt{-\Delta}}{(-2\gamma m^2 M + \sqrt{-\Delta})\sqrt{-\Delta}} \\
 & = -\frac{1}{L} \arcsin \frac{-\sqrt{-\Delta} + 2\gamma m^2 M}{-2\gamma m^2 M + \sqrt{-\Delta}} = -\frac{1}{L} \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2L},
 \end{aligned}$$

wie auch im Fall  $E = 0$ . Die Berechnung des Integrals in Gl. (2.188) führt also auf

$$\begin{aligned}
 \varphi(r) & = \mp L \left( -\frac{1}{L} \arcsin \frac{-2L^2/r + 2\gamma m^2 M}{2\sqrt{2L^2 m E + (\gamma m^2 M)^2}} - \frac{\pi}{2L} \right) \\
 & = \pm \arcsin \frac{-L^2/r + \gamma m^2 M}{\sqrt{2L^2 m E + (\gamma m^2 M)^2}} \pm \frac{\pi}{2} \\
 & \equiv \pm \arccos \frac{L^2/r - \gamma m^2 M}{\sqrt{2L^2 m E + (\gamma m^2 M)^2}}, \tag{2.190}
 \end{aligned}$$

wo wir im letzten Schritt  $\arcsin(-x) + \pi/2 = \arccos x$  ausgenutzt haben. Nun müssen wir noch nach  $r(\varphi)$  auflösen. Da  $\cos(-\varphi) = \cos \varphi$ , erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \frac{L^2}{r} & = \gamma m^2 M + \cos \varphi \sqrt{2L^2 m E + (\gamma m^2 M)^2} \\
 \iff \frac{1}{r} & = \frac{\gamma m^2 M}{L^2} + \cos \varphi \sqrt{\frac{2m E}{L^2} + \left(\frac{\gamma m^2 M}{L^2}\right)^2} \\
 \iff \frac{1}{r} & = \frac{1}{k} (1 + \epsilon \cos \varphi) \tag{2.191}
 \end{aligned}$$

$$\iff r(\varphi) = \frac{k}{1 + \epsilon \cos \varphi}, \tag{2.192}$$

wobei wir die Abkürzungen

$$k \equiv \frac{L^2}{\gamma m^2 M}, \quad \epsilon \equiv \sqrt{1 + \frac{2L^2 m E}{(\gamma m^2 M)^2}} \tag{2.193}$$

eingeführt haben. Offensichtlich ist der sog. **Halbparameter**  $k \equiv R_K$  gleich dem Radius der Kreisbahn. Man bezeichnet  $\epsilon$  als **numerische Exzentrizität**. Gleichung (2.192) beschreibt **Kegelschnitte** in Polarkoordinaten, vgl. Abb. 2.42. Hier betrachtet man die (eindimensionale) Schnittmenge einer (zweidimensionalen) Ebene mit einer (zweidimensionalen) Kegelfläche. Diese Schnittmenge ergibt eine Kurve, die je nach Neigung der Ebene, die den Kegel schneidet, identisch mit einem Kreis, einer Ellipse, einer Parabel, bzw. einer Hyperbel ist.

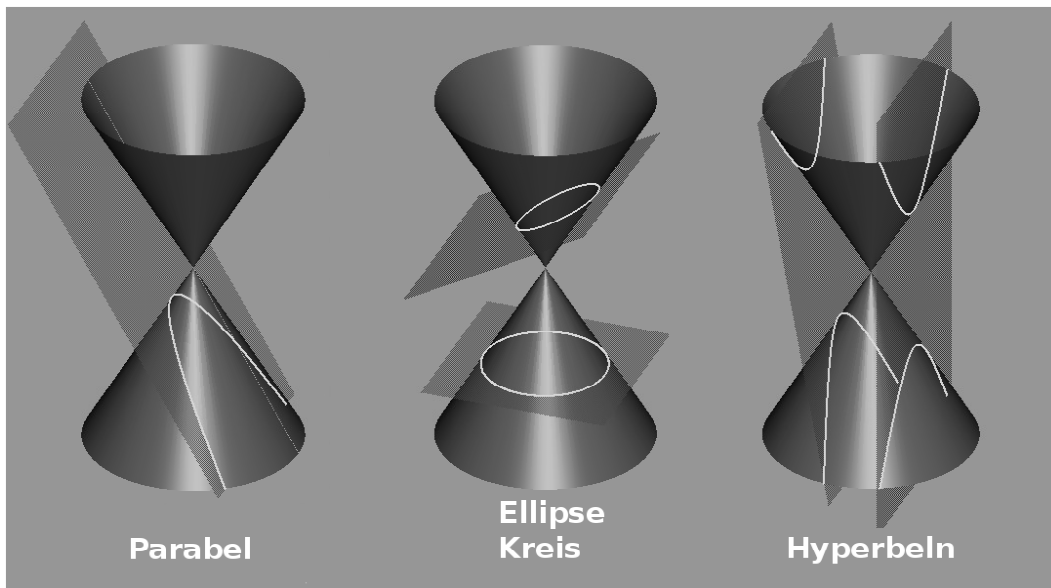


Abbildung 2.42: Kegelschnitte.

Wir unterscheiden vier Fälle:

1.  $\epsilon = 0$ : In diesem Fall ist  $r(\varphi) = k = R_K$ . Dies entspricht einer **Kreisbahn** mit Radius  $R_K$ . Der Abstand der Masse  $m$  (Planet) von der Zentralmasse  $M$  (Sonne) bleibt konstant, also gibt es keine  $\varphi$ -Abhängigkeit.
2.  $0 < \epsilon < 1$ : In diesem Fall handelt es sich um eine **Ellipse**, vgl. Abb. [2.43](#).

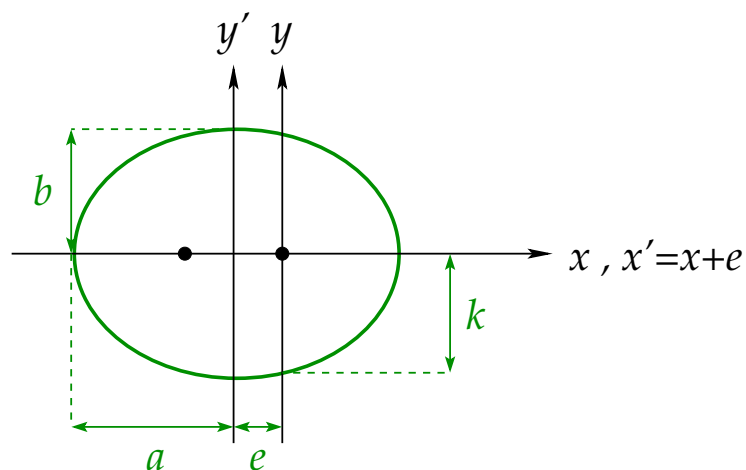


Abbildung 2.43: Ellipse.

Die **große Halbachse** der Ellipse ist  $a$ , die **kleine Halbachse** ist  $b$ , und die sog. **lineare Exzentrizität** ist  $e$ . Es gilt offensichtlich folgender Zusammenhang zwischen

$a$ ,  $e$  und  $k$ ,  $\epsilon$ :

$$r(0) = \frac{k}{1+\epsilon} = a - e, \quad r(\pi) = \frac{k}{1-\epsilon} = a + e.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \left( \frac{k}{1+\epsilon} + \frac{k}{1-\epsilon} \right) = \frac{k}{1-\epsilon^2} = -\frac{\gamma m M}{2 E}, \\ e &= \frac{1}{2} \left( \frac{k}{1-\epsilon} - \frac{k}{1+\epsilon} \right) = \frac{k \epsilon}{1-\epsilon^2} = a \epsilon \\ &= -\frac{\gamma m M}{2 E} \sqrt{1 + \frac{2 L^2 m E}{(\gamma m^2 M)^2}} = -\frac{1}{2 m E} \sqrt{2 L^2 m E + (\gamma m^2 M)^2}. \end{aligned}$$

Die kleine Halbachse läßt sich aus der **Ellipsennormalform** berechnen,

$$1 = \frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2}.$$

Für den Punkt  $x' = e$ ,  $y' = k$  gilt dann

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{e^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} = \epsilon^2 + \frac{k^2}{b^2} \\ \Leftrightarrow \frac{k^2}{b^2} &= 1 - \epsilon^2 = \frac{k}{a} \\ \Leftrightarrow b^2 &= a k = -\frac{\gamma m M}{2 E} \frac{L^2}{\gamma m^2 M} = -\frac{L^2}{2 m E} \\ \Rightarrow b &= \frac{L}{\sqrt{-2 m E}}. \end{aligned} \tag{2.194}$$

**30.1.2017**

3.  $\epsilon = 1$ : Dies entspricht der **Parabel**. Wir sehen dies am schnellsten, indem wir die Darstellung (2.192) in ebenen Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten zurücktransformieren:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi = \frac{k \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}, \\ y &= r \sin \varphi = \frac{k \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}}{1 + \cos \varphi} = k \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$x = \frac{k}{2} \left( \frac{1 + \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} - \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} \right) = \frac{k}{2} - \frac{k}{2} \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} = \frac{k}{2} - \frac{y^2}{2 k} \equiv R_u - \frac{y^2}{2 k}.$$

In der  $(x, y)$ -Ebene ist dies eine auf der Seite liegende, nach links geöffnete Parabel, vgl. Abb. 2.44.