2.4 Fundamentale Begriffe und Erhaltungssätze

16.1.2017

2.4.1 Arbeit

Gegeben sei ein beliebiges **Kraftfeld** $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$. Um einen Körper beim Punkt $\vec{r}$ um eine **infinitesimale** Wegstrecke $\mathrm{d}\vec{r}$ zu verschieben, ist die infinitesimale **Arbeit**

$$\delta W = -\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} \tag{2.133}$$

aufzuwenden.

Bemerkungen:

1. δW ist nicht notwendigerweise ein totales Differential, daher benutzen wir das Symbol δW anstelle von $\mathrm{d}W$.
2. Zum Vorzeichen in Gl. (2.133):
   (i) Geschieht die Verschiebung $\mathrm{d}\vec{r}$ **entgegen** der Richtung der Kraft, d.h. $\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} < 0$, so muss Arbeit von **außen** am Körper verrichtet werden. Diese wird **positiv** gezählt, $\delta W > 0$.
   (ii) Geschieht die Verschiebung **in** Richtung der Kraft, $\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} > 0$, so verrichtet der Körper **selbst** Arbeit. Diese wird **negativ** gezählt, $\delta W < 0$.
3. Falls $\vec{F} \perp \mathrm{d}\vec{r}$, also wenn die Verrückung **senkrecht** zum Kraftfeld geschieht, so wird **keine** Arbeit verrichtet, $\delta W = 0$.
4. Die **Einheit** der Arbeit ist **Joule**, $[W] = \mathrm{Nm} = \mathrm{kg\,m^2/s^2} \equiv \mathrm{J}$.

Falls die Wegstrecke nicht infinitesimal klein, sondern endlich groß ist, gilt

$$W_{21}(\mathcal{C}) = -\int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \ . \tag{2.134}$$

Hierbei ist $\mathcal{C}$ eine Kurve, die vom Punkt $\vec{r}_1$ zum Punkt $\vec{r}_2$ verläuft, vgl. Abb. 2.28. Das in Gl. (2.134) auftretende Integral ist ein sog. **Weg-**, **Kurven-** oder **Linienintegral**. Es hängt ab von

1. der **Form** des Kraftfeldes $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$.
2. dem **zeitlichen Bewegungsablauf**. Diese Abhängigkeit entfällt, falls $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$, also nur vom Ort, nicht aber von Geschwindigkeit und Zeit abhängt.
3. dem **Anfangs-** und **Endpunkt** $\vec{r}_1$ bzw. $\vec{r}_2$ der Kurve $\mathcal{C}$.
4. der **Form** der Kurve $\mathcal{C}$, auf der man von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$ gelangt. I.a. ist die Arbeit auf **unterschiedlichen** Wegen **verschieden**, selbst wenn Anfangs- und Endpunkt der Wege übereinstimmen,

$$W_{21}(\mathcal{C}_1) = -\int_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \neq -\int_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = W_{21}(\mathcal{C}_2) \ ,$$

   wobei $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ unterschiedliche Wege sind, um von $\vec{r}_1$ zu $\vec{r}_2$ zu gelangen, vgl. Abb. 2.29.

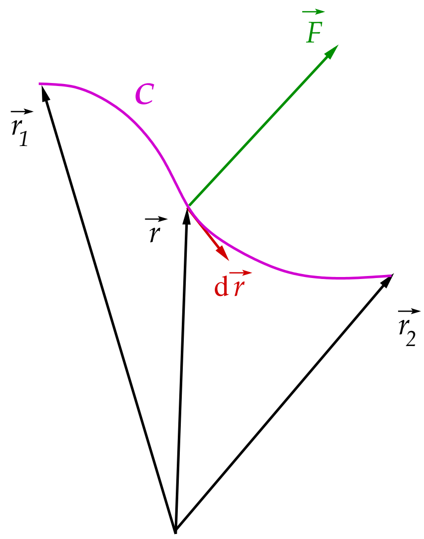

Abbildung 2.28: Zur Definition des Wegintegrals (2.134).

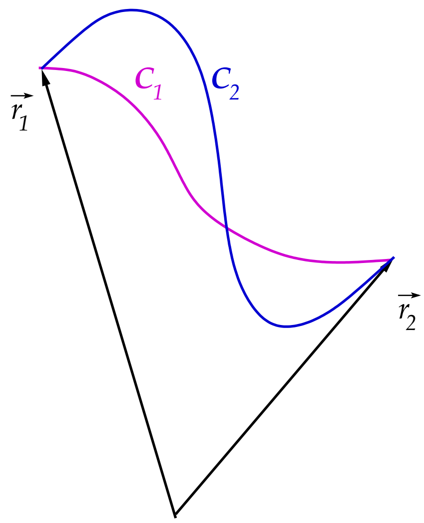

Abbildung 2.29: Zwei unterschiedliche Wege $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$, die von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$ führen.

Wir haben solche Linienintegrale schon berechnet, und zwar im Zusammenhang mit der **Bogenlänge** in Abschnitt 1.2.3. Zur Berechnung benötigt man lediglich eine geeignete **Parametrisierung** der Kurve $\mathcal{C}$,

$$\mathcal{C} = \{\vec{r}(\alpha), \, \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2\} \, .$$

Beispielsweise kann man die **natürliche Parametrisierung** der Kurve wählen, $\alpha - \alpha_1 = s$, wobei s die Bogenlänge der Kurve vom Anfangswert α_1 bis zu einem gegebenen $\alpha > \alpha_1$ ist. Die gesamte Bogenlänge der Kurve $\mathcal{C}$ ist $s_{\mathcal{C}} \equiv \alpha_2 - \alpha_1$. Eine weitere sinnvolle Parametrisierung ist durch die Zeit gegeben, $\alpha = t$.

Nach Anwendung der Kettenregel

$$\mathrm{d}\vec{r} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}\,\mathrm{d}\alpha$$

wird aus Gl. (2.134)

$$W_{21}(\mathcal{C}) = -\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \mathrm{d}\alpha\, \frac{\mathrm{d}\vec{r}(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} \cdot \vec{F}(\vec{r}(\alpha), \dot{\vec{r}}(\alpha), t(\alpha)) \;. \tag{2.135}$$

Dies ist ein **gewöhnliches Integral** über eine **skalare Funktion** der Integrationsvariablen α. Die Form des gewählten Weges $\mathcal{C}$ manifestiert sich im Term $\mathrm{d}\vec{r}(\alpha)/\mathrm{d}\alpha$. Man beachte, dass man neben der Parametrisierung der Kurve $\vec{r}(\alpha)$ auch den Zusammenhang zwischen der Zeit t und dem Parameter α kennen muss, $t(\alpha)$, also welche Position der Körper auf der Kurve zu welchem Zeitpunkt innehat. Diese zusätzliche Information wird nicht benötigt, wenn die Zeit selbst der Kurvenparameter ist, oder wenn die Kraft nicht explizit von der Zeit abhängt.

Als Anwendung und um die Wegabhängigkeit des Arbeitsintegrals zu demonstrieren, betrachten wir das folgende einfache

Beispiel: Gegeben sei das Kraftfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = c\,(y^2, 0, 0)^T \;, \tag{2.136}$$

wobei die Konstante c dafür sorgt, dass die Kraft $\vec{F}$ die korrekte Dimension besitzt, und y die kartesische $y-$Koordinate ist. Das Kraftfeld hat die in Abb. 2.30 dargestellte Form: es zeigt ausschließlich in $x-$Richtung und sein Betrag wächst quadratisch mit y an. Wir berechnen die Arbeit auf den in Abb. 2.30 dargestellten Wegen $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$, um vom Ursprung $(0,0,0)^T$ zum Punkt $(1,1,0)^T$ zu gelangen.

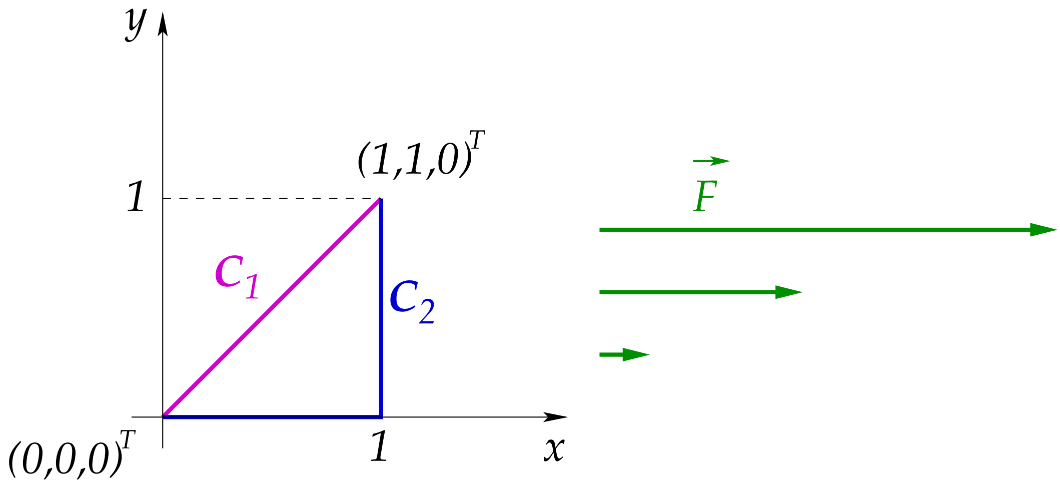

Abbildung 2.30: Zur Wegabhängigkeit des Arbeitsintegrals.

Eine geeignete Parametrisierung für $\mathcal{C}_1$ ist:

$$\mathcal{C}_1 = \{\vec{r}(\alpha) = (\alpha, \alpha, 0)^T,\, 0 \le \alpha \le 1\} \;,$$

woraus wir sofort

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = (1,1,0)^T \;, \quad \vec{F}(\vec{r}(\alpha)) = c\,(\alpha^2,0,0)^T \;, \quad \frac{\mathrm{d}\vec{r}(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}\cdot\vec{F} = c\,\alpha^2$$

berechnen. Damit ist das Arbeitsintegral auf dem Weg $\mathcal{C}_1$:

$$W(\mathcal{C}_1) = -\int_0^1 \mathrm{d}\alpha\, c\,\alpha^2 = -\frac{c}{3}\;.$$

Eine geeignete Parametrisierung für $\mathcal{C}_2$ ist:

$$\mathcal{C}_2 = \{\vec{r}(\alpha) = (\alpha,0,0)^T,\; 0 \leq \alpha \leq 1\} \;\cup\; \{\vec{r}(\alpha) = (1,\alpha-1,0)^T,\; 1 < \alpha \leq 2\}\;.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\vec{r}(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} &= \begin{cases} (1,0,0)^T\,, & 0 \leq \alpha \leq 1 \\ (0,1,0)^T\,, & 1 < \alpha \leq 2 \end{cases}\;,\\
\vec{F}(\vec{r}(\alpha)) &= c\begin{cases} (0,0,0)^T\,, & 0 \leq \alpha \leq 1 \\ ((\alpha-1)^2,0,0)^T\,, & 1 < \alpha \leq 2 \end{cases}\;,\\
\frac{\mathrm{d}\vec{r}(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha}\cdot\vec{F} &= c\begin{cases} 0\,, & 0 \leq \alpha \leq 1 \\ 0\,, & 1 < \alpha \leq 2 \end{cases}\;,
\end{aligned}$$

woraus wir

$$W(\mathcal{C}_2) = 0$$

erhalten. Dieses Resultat wird sofort klar, wenn wir bedenken, dass die Kraft auf dem ersten Teilstück des Weges $\mathcal{C}_2$, für $0 \leq \alpha \leq 1$, verschwindet, während sie auf dem zweiten Teilstück stets senkrecht zum Weg steht, also das Skalarprodukt zwischen $\mathrm{d}\vec{r}$ und $\vec{F}$ verschwindet. Offensichtlich erhalten wir für das Kraftfeld (2.136) zwei unterschiedliche Werte für das Arbeitsintegral, je nachdem welchen Weg wir wählen.

2.4.2 Leistung

Die **Leistung** ist die pro Zeiteinheit verrichtete Arbeit,

$$P = \frac{\delta W}{\mathrm{d}t}\;. \tag{2.137}$$

Wenn wir die infinitesimale Arbeit (2.133) einsetzen, erhalten wir

$$P = -\vec{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \equiv -\vec{F}\cdot\vec{v}\;. \tag{2.138}$$

Abgesehen vom Vorzeichen ist die Leistung also das Skalarprodukt aus Geschwindigkeit und Kraft. Damit ist die Leistung unabhängig vom Kraftfeld, also für **alle** Kraftfelder, vom zeitlichen Ablauf der Bewegung abhängig.

Die **Einheit** der Leistung ist **Watt**, $[P] = \mathrm{J/s} = \mathrm{N\,m/s} = \mathrm{kg\,m^2/s^3} = \mathrm{W}$.

2.4.3 Kinetische Energie

Wir multiplizieren die Newtonsche Bewegungsgleichung skalar mit der Geschwindigkeit,

$$m\,\ddot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}} \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\,m\,\dot{\vec{r}}^{\,2}\right) = \vec{F}\cdot\dot{\vec{r}} = -P\;. \tag{2.139}$$

Die Größe

$$T = \frac{1}{2}\,m\,\dot{\vec{r}}^{\,2} \tag{2.140}$$

bezeichnet man als **kinetische Energie**. Gleichung (2.139) schreibt sich dann kompakt als

$$P = -\dot{T}\;, \tag{2.141}$$

d.h. Leistung ist mit einer Änderung der kinetischen Energie als Funktion der Zeit verknüpft. **Positive** Leistung entspricht dabei einer **Abnahme** der kinetischen Energie und **negative** Leistung einer **Zunahme**. Nach der Definition (2.137) der Leistung gilt aber auch

$$-\,\dot{T} = +\frac{\delta W}{\mathrm{d}t}\;, \tag{2.142}$$

d.h. die **Ab-** bzw. **Zunahme** der kinetischen Energie ist mit einer **Zu-** bzw. **Abnahme** von Arbeit verknüpft. Integrieren wir Gl. (2.142) nach der Zeit, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\,\frac{\delta W}{\mathrm{d}t} &= -\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\,\vec{F}(\vec{r}(t),\dot{\vec{r}}(t),t)\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} \equiv W_{21} \\
&= -\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\,\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -T_2 + T_1 = \frac{m}{2}\left[\dot{\vec{r}}(t_1)^2 - \dot{\vec{r}}(t_2)^2\right]\;.
\end{aligned}$$

Hier haben wir in der ersten Zeile die Parameterdarstellung (2.135) des Arbeitsintegrals verwendet, mit der Zeit t als Parameter. Geleistete Arbeit $W_{21} \neq 0$ ist damit mit einer **Änderung** des Bewegungszustandes verknüpft, $\dot{\vec{r}}(t_1) \neq \dot{\vec{r}}(t_2)$.

Aus der letzten Gleichung wird außerdem sofort ersichtlich, dass kinetische Energie und Arbeit dieselbe **Einheit** besitzen, $[T] = [W] = \mathrm{Nm} = \mathrm{kg\,m^2/s^2} = \mathrm{J}$.

2.4.4 Potentielle Energie und konservative Kräfte

In den letzten beiden Abschnitten haben wir besondere Sorgfalt darauf verwendet, die infinitesimale Arbeit δW nicht als totales Differential $\mathrm{d}W$ zu schreiben. Dies ist in der Tat nur unter bestimmten Bedingungen möglich, die in diesem Abschnitt erläutert werden.

Falls eine Funktion $V(\vec{r})$ existiert, die

$$\frac{\mathrm{d}V(\vec{r})}{\mathrm{d}t} \equiv -\vec{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = P \tag{2.143}$$

erfüllt, so nennt man diese Funktion das **Potential** oder die **potentielle Energie** der Kraft $\vec{F}$. Multiplikation von Gl. (2.143) mit $\mathrm{d}t$ und Vergleich mit Gl. (2.133) ergibt, dass $\delta W \equiv \mathrm{d}V$, d.h. in diesem Fall gibt es ein totales Differential der Arbeit W, welches identisch ist mit dem totalen Differential der potentiellen Energie, $\mathrm{d}W \equiv \mathrm{d}V$. Kräfte, für die dies zutrifft, nennt man **konservative Kräfte**. Die **Einheit** des Potentials bzw. der potentiellen Energie ist mit der Einheit der Arbeit bzw. der kinetischen Energie identisch, $[V] = [W] = [T] = \mathrm{Nm} = \mathrm{kg\,m^2/s^2} = \mathrm{J}$.

Konservative Kräfte lassen sich direkt aus der potentiellen Energie berechnen. Das totale Differential der potentiellen Energie lautet

$$\mathrm{d}V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i = \vec{\nabla} V(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}\,. \tag{2.144}$$

Division durch $\mathrm{d}t$ ergibt

$$\dot{V}(\vec{r}) \equiv \frac{\mathrm{d}V(\vec{r})}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial x_i}\,\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \vec{\nabla} V(\vec{r}) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \equiv \vec{\nabla} V(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}}\,. \tag{2.145}$$

Der Vergleich mit Gleichung (2.143) ergibt den gesuchten Zusammenhang zwischen Kraft und Potential

$$\vec{F}(\vec{r}) \equiv -\vec{\nabla} V(\vec{r})\,. \tag{2.146}$$

Da $V(\vec{r})$ lediglich eine Funktion des Ortes $\vec{r}$ ist, kann auch die Kraft $\vec{F}(\vec{r})$ nur vom Ort, nicht aber von der Geschwindigkeit oder explizit von der Zeit abhängen. Eine implizite Zeitabhängigkeit besteht dagegen schon, denn wenn wir die Kraft entlang der Bahnkurve $\vec{r}(t)$ eines Körpers berechnen, so taucht die Zeitabhängigkeit der Bahnkurve implizit in der Kraft auf, $\vec{F}(\vec{r}(t))$. Aus der Tatsache, dass konservative Kräfte nicht von der Geschwindigkeit abhängen dürfen, folgern wir, dass **Reibungskräfte nicht konservativ** sind. I.a. gibt es für nicht-konservative Kräfte kein Potential, aus dem man sie ableiten könnte.

Die Bedingung, dass die Kraft nur vom Ort abhängt, ist eine **notwendige Bedingung** dafür, dass sie konservativ ist, d.h. dass ein Potential existiert. Sie ist aber nicht **hinreichend**, denn nicht alle Felder, die nur vom Ort abhängen, lassen sich automatisch auch als Gradient einer skalaren Funktion darstellen. Eine hinreichende Bedingung für die Existenz eines Potentials und damit dafür, dass die Kraft konservativ ist, ergibt sich aus folgender Überlegung. I.a. ist das Potential $V(\vec{r})$ wenigstens (fast) überall zweimal stetig differenzierbar, d.h.

$$\frac{\partial^2 V(\vec{r})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 V(\vec{r})}{\partial x_j \partial x_i}\,, \quad i,j = 1,2,3\,.$$

Dies bedeutet aber mit $F_i = -\partial V/\partial x_i$, dass

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial F_j}{\partial x_i} - \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = 0\,, \quad i,j = 1,2,3\,.$$

Daraus ergibt sich der folgende

Satz: Ein Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ ist **genau dann konservativ, falls**

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = 0\,. \tag{2.147}$$

Beweis: "Genau dann" bedeutet, dass man die Behauptung in beide Richtungen beweisen muss, d.h.

1. Wir nehmen an, dass $\vec{F}(\vec{r})$ konservativ ist. Zu zeigen ist, dass $\vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{r}) = 0$. Für konservative Kraftfelder existiert per Definition ein Potential $V(\vec{r})$ mit $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$. Die Rotation eines Gradientenfeldes verschwindet aber immer gemäß Gl. (1.85).

2. Wir nehmen an, dass die Rotation von $\vec{F}(\vec{r})$ verschwindet. Es ist zu zeigen, dass die Kraft dann konservativ ist, d.h., dass ein Potential $V(\vec{r})$ existiert mit $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$. Der Beweis stützt sich auf den sog. **Helmholtzschen Zerlegungssatz**, den wir hier aber nicht beweisen werden, sondern erst in der Vorlesung "Theoretische Physik III: Elektrodynamik". Der Zerlegungssatz besagt, dass man jedes Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r})$ als Summe eines Gradientenfeldes und eines Wirbelfeldes schreiben kann,

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) + \vec{\nabla}\times\vec{f}(\vec{r})\;, \tag{2.148}$$

wobei das skalare Feld $\varphi(\vec{r})$ und das Vektorfeld $\vec{f}(\vec{r})$ eindeutig aus $\vec{F}(\vec{r})$ berechenbar sind (die entsprechenden Formeln sind aber hier nicht weiter von Bedeutung, weshalb wir sie nicht explizit angeben). Die Bedingung $\vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{r}) = 0$ führt wegen $\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) = 0$ auf

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\left[\vec{\nabla}\times\vec{f}(\vec{r})\right] = \vec{\nabla}\left[\vec{\nabla}\cdot\vec{f}(\vec{r})\right] - \Delta\,\vec{f}(\vec{r}) = 0\;,$$

wobei wir Gl. (1.89) benutzt haben. Diese Gleichung ist i.a. nur für konstantes $\vec{f}$ erfüllbar. Konstante Vektorfelder haben aber ein verschwindendes Wirbelfeld, $\vec{\nabla}\times\vec{f} = 0$, und der Zerlegungssatz (2.148) liefert

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\varphi(\vec{r})\;.$$

Mit $\varphi(\vec{r}) \equiv -V(\vec{r})$ folgt die Behauptung, q.e.d.

20.1.2017

Wir leiten nun einen wichtigen Zusammenhang zwischen der Arbeit und der potentiellen Energie her. Wir formen das Arbeitsintegral (2.135) für konservative Kräfte $\vec{F}(\vec{r}(t))$ mit der Zeit als Parameter und unter Zuhilfenahme von Glgen. (2.145) und (2.146) in folgender Weise um:

$$\begin{aligned} W_{21} &= -\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\,\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\,\vec{\nabla}V(\vec{r}(t))\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} \\ &= \int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\,\frac{\mathrm{d}V(\vec{r}(t))}{\mathrm{d}t} = \int_{V_1}^{V_2}\mathrm{d}V \equiv V_2 - V_1\;, \end{aligned} \tag{2.149}$$

wobei wir $V_i = V(\vec{r}(t_i))$, $i = 1, 2$, definiert haben. Gleichung (2.149) besagt, dass die bei Verschiebung eines Körpers von $\vec{r}_1 \equiv \vec{r}(t_1)$ nach $\vec{r}_2 \equiv \vec{r}(t_2)$ geleistete Arbeit identisch mit der **Potentialdifferenz** $V_2 - V_1$ ist. Da dieses Ergebnis nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges der Verschiebung abhängt, nicht aber von der Form des Weges selbst, ist für **konservative Kräfte die Arbeit vom gewählten Weg unabhängig**. Wir wollen diese Tatsache im folgenden genauer untersuchen.

Wir integrieren den Gradienten des Potentials über einen **geschlossenen Weg**, vgl. Abb. 2.31. Dann gilt:

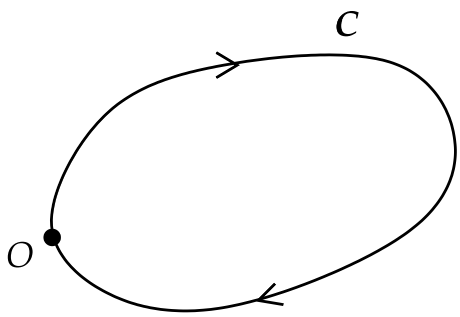

Abbildung 2.31: Zum Arbeitsintegral über einen geschlossenen Weg.

$$\begin{aligned}\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{\nabla} V(\vec{r}) &= \int_{s_a}^{s_e} \mathrm{d}s \, \frac{\mathrm{d}\vec{r}(s)}{\mathrm{d}s} \cdot \vec{\nabla} V(\vec{r}(s)) = \int_{s_a}^{s_e} \mathrm{d}s \, \frac{\mathrm{d}V(\vec{r}(s))}{\mathrm{d}s} \\ &= \int_{V_0}^{V_0} \mathrm{d}V = V_0 - V_0 = 0 \, , \end{aligned} \tag{2.150}$$

wobei wir Gl. (2.144) für das totale Differential und $V_0 \equiv V(\vec{r}(s_a)) = V(\vec{r}(s_e))$ benutzt haben. Auf dieser Tatsache beruht der folgende

Satz: Eine Kraft ist **genau dann konservativ, wenn** das Arbeitsintegral über einen geschlossenen Weg verschwindet,

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = 0 \, . \tag{2.151}$$

Beweis: Es gilt wieder, Hin- und Rückrichtung getrennt zu beweisen.

1. Falls die Kraft konservativ ist, gilt $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$, und damit folgt die Behauptung sofort aus Gl. (2.150).

2. Wir nehmen an, dass Gl. (2.151) gilt. Nun gilt für jedes beliebige, hinreichend oft differenzierbare Vektorfeld $\vec{a}(\vec{r})$ das sog. **Stokessche Theorem**, welches wir erst in der Vorlesung "Theoretische Physik III: Elektrodynamik" beweisen werden:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{a}(\vec{r}) = \int_S \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{a}(\vec{r}) \, , \tag{2.152}$$

   wobei das Integral auf der rechten Seite über die von der Kurve $\mathcal{C}$ eingeschlossene Fläche zu führen ist und $\mathrm{d}\vec{S}$ der Normalenvektor auf dieser Fläche ist. Angewendet auf Gl. (2.151) folgern wir, dass

$$0 = \int_S \mathrm{d}\vec{S} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) \, .$$

   Da die geschlossene Kurve $\mathcal{C}$ beliebig war, können wir sie auch zu einem Punkt zusammenziehen, woraus

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = 0$$

   folgt. Dies war aber gerade das vormals bewiesene Kriterium dafür, dass die Kraft konservativ ist, q.e.d.

Mit Gl. (2.134) bedeutet der gerade bewiesene Satz, dass eine **konservative Kraft** auf einem **geschlossenen Weg keine Arbeit leistet**. Die schon oben diskutierte **Wegunabhängigkeit** des Arbeitsintegral für konservative Kräfte läßt sich ebenfalls leicht aus diesem Satz ableiten. Dazu betrachten wir zwei Wege $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$, die die zwei Punkte P_1 und P_2 verbinden, vgl. Abb. 2.32.

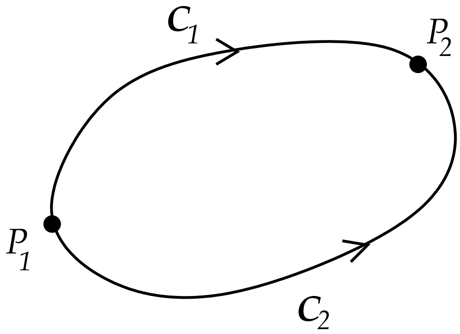

Abbildung 2.32: Zur Wegunabhängigkeit des Arbeitsintegrals für konservative Kräfte.

Die Parametrisierung für den Weg $\mathcal{C}_1$ laute:

$$\mathcal{C}_1 = \{\vec{r}(s),\, 0 \leq s \leq 1\}\ ,$$

wobei $\vec{r}_1 = \vec{r}(0)$ und $\vec{r}_2 = \vec{r}(1)$ die Ortsvektoren der Punkte P_1 und P_2 darstellen. Für den Weg $\mathcal{C}_2$ schreiben wir

$$\mathcal{C}_2 = \{\vec{r}(t),\, -1 \leq t \leq 0\}\ ,$$

wobei $\vec{r}_1 = \vec{r}(-1)$ und $\vec{r}_2 = \vec{r}(0)$ die Ortsvektoren der Punkte P_1 und P_2 darstellen.

Nun betrachten wir den **geschlossenen Weg** $\mathcal{C}$, der sich dadurch ergibt, dass wir $\mathcal{C}_1$ von P_1 nach P_2 und $\mathcal{C}_2$ in **umgekehrter Richtung**, also von P_2 nach P_1 durchlaufen. Wir parametrisieren diesen Weg wie folgt:

$$\mathcal{C} = \{\vec{r}(s),\, 0 \leq s \leq 1\} \cup \{\vec{r}(s),\, 1 \leq s \leq 2\}\ ,$$

wobei $\vec{r}_1 = \vec{r}(0)$, $\vec{r}_2 = \vec{r}(1)$ und $\vec{r}_1 = \vec{r}(2)$ ist. Auf dem zweiten Teilstück ersetzen wir nun den Parameter s durch $t = 1 - s$. Der Parameter t läuft von 0 bis -1, wenn s von 1 bis 2 läuft, also entlang des umgekehrten Weges $\mathcal{C}_2$. Für konservative Kräfte gilt dann

$$\begin{aligned}
0 &= \oint_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_0^1 \mathrm{d}s\, \frac{\mathrm{d}\vec{r}(s)}{\mathrm{d}s} \cdot \vec{F}(\vec{r}(s)) + \int_1^2 \mathrm{d}s\, \frac{\mathrm{d}\vec{r}(s)}{\mathrm{d}s} \cdot \vec{F}(\vec{r}(s)) \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}s\, \frac{\mathrm{d}\vec{r}(s)}{\mathrm{d}s} \cdot \vec{F}(\vec{r}(s)) + \int_0^{-1} \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{F}(\vec{r}(t)) \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}s\, \frac{\mathrm{d}\vec{r}(s)}{\mathrm{d}s} \cdot \vec{F}(\vec{r}(s)) - \int_{-1}^{0} \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{F}(\vec{r}(t)) \\
\Longleftrightarrow \quad & \int_0^1 \mathrm{d}s\, \frac{\mathrm{d}\vec{r}(s)}{\mathrm{d}s} \cdot \vec{F}(\vec{r}(s)) = \int_{-1}^{0} \mathrm{d}t\, \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{F}(\vec{r}(t)) \\
\Longleftrightarrow \quad & \int_{\mathcal{C}_1} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_{\mathcal{C}_2} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r})\ . \qquad (2.153)
\end{aligned}$$

Für konservative Kräfte hat das Arbeitsintegral zwischen den Punkten P_1 und P_2 also immer den gleichen Wert, unabhängig vom durchlaufenen Weg.

Die Wegunabhängigkeit des Arbeitsintegrals liefert ein **konstruktives Kriterium** zur Berechnung des Potentials $V(\vec{r})$ bei vorgegebener konservativer Kraft $\vec{F}(\vec{r})$. Gleichung (2.149) besagt, dass das Potential im Punkt P (charakterisiert durch den Ortsvektor $\vec{r}$) den Wert

$$V(\vec{r}) = -\int_{P_0}^{P} \mathrm{d}\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) \tag{2.154}$$

annimmt, falls der Punkt P_0 (charakterisiert durch den Ortsvektor $\vec{r}_0$) so gewählt wird, dass $V(\vec{r}_0) = 0$.

Beispiel: Eindimensionaler harmonischer Oszillator

In einer Dimension gibt es nur einen möglichen Weg, um von $P_0 \equiv x_0$ zu $P \equiv x$ zu gelangen. Wir wählen $x_0 = 0$ und erhalten mit dem Hookeschen Kraftgesetz $F(x) = -kx$

$$V(x) = -\int_0^x \mathrm{d}x'\, F(x') = k \int_0^x \mathrm{d}x'\, x' = \frac{1}{2}\, k x^2\, . \tag{2.155}$$

In der Tat ist $V(0) = 0$, so dass keine weitere Integrationskonstante im Potential auftritt.

Zur Berechnung von $V(\vec{r})$ bei mehrdimensionalen Problemen kann man den **rechnerisch günstigsten** Weg wählen, da das Wegintegral für konservative Kräfte unabhängig vom Weg immer denselben Wert annimmt.

2.4.5 Energieerhaltungssatz

Wir zerlegen die Gesamtkraft in einen **konservativen** und in einen **nicht-konservativen**, d.h. einen sog. **dissipativen** Anteil,

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{kons}} + \vec{F}_{\text{diss}}\, .$$

Mit den Glgen. (2.139), (2.141), (2.145) und (2.146) für den konservativen Anteil der Kraft gilt dann

$$\begin{aligned} \dot{T} &= -P = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F} = \dot{\vec{r}} \cdot \left(-\vec{\nabla} V + \vec{F}_{\text{diss}}\right) \\ \Longleftrightarrow \quad \dot{T} + \vec{\nabla} V \cdot \dot{\vec{r}} &= \dot{T} + \dot{V} = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}_{\text{diss}} \\ \Longleftrightarrow \quad \dot{E} &\equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+V) = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}_{\text{diss}}\, . \end{aligned} \tag{2.156}$$

Dies ist der sog. **Energiesatz**. Hier haben wir die **totale mechanische Energie** als

$$E \equiv T + V = \frac{1}{2}\, m\, \dot{\vec{r}}^{\,2} + V(\vec{r}) \tag{2.157}$$

eingeführt.

Da dissipative Kräfte der Bewegung eines Körpers entgegenwirken, ist $\dot{\vec{r}} \cdot \vec{F}_{\text{diss}} < 0$. Dissipative Kräfte sorgen damit gemäß dem Energiesatz (2.156) für einen **Verlust** an

mechanischer Energie, $\dot{E} < 0$. Falls alle Kräfte **konservativ** sind, d.h. falls der dissipative Anteil der Kraft verschwindet, $\vec{F}_{\rm diss} = 0$, so folgt aus Gl. (2.156) der **Energieerhaltungssatz**

$$\dot{E} = 0 \iff E = T + V = const. \tag{2.158}$$

Dissipative Kräfte wie z.B. Reibungskräfte führen mechanische Energie in eine andere Energieform, z.B. Wärme, über. Erweitert man die Definition der Energie um diese Energieformen, dann bleibt die **Gesamtenergie** (d.h. inklusive der Wärmeenergie bzw. anderer Energieformen) wieder erhalten. Wir werden uns damit in der Vorlesung “Theoretische Physik V: Statistische Mechanik und Thermodynamik” näher beschäftigen.

2.4.6 Drehimpuls, Drehmoment

Wir definieren den sog. **Drehimpuls** als

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\,\vec{r} \times \dot{\vec{r}} \tag{2.159}$$

und das sog. **Drehmoment** als

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}\;. \tag{2.160}$$

Wir können einen Zusammenhang zwischen Drehimpuls und Drehmoment herleiten, indem wir die Newtonsche Bewegungsgleichung vektoriell (von links) mit dem Ortsvektor multiplizieren,

$$m\,\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{F}\;. \tag{2.161}$$

Nun ist die linke Seite dieser Gleichung identisch mit der Zeitableitung des Drehimpulses,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = m\left(\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}\right) = m\,\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}\,,$$

da das Kreuzprodukt identischer Vektoren verschwindet. Die rechte Seite von Gl. (2.161) ist dagegen identisch mit dem Drehmoment (2.160), so dass wir den sog. **Drehimpulssatz** erhalten,

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M}\;. \tag{2.162}$$

Falls das Drehmoment verschwindet, $\vec{M} = 0$, ist der Drehimpuls erhalten,

$$\vec{M} = 0 \implies \dot{\vec{L}} = 0 \implies \vec{L} = \overrightarrow{const.}\;. \tag{2.163}$$

Dies ist der **Drehimpulserhaltungssatz**.

Ein verschwindendes Drehmoment erreicht man nach Gl. (2.160) entweder durch verschwindende Kräfte, $\vec{F} = 0$, oder aber durch Kräfte, die **parallel** zum Ortsvektor gerichtet sind, $\vec{F} \parallel \vec{r}$. Dies sind aber die schon in Gl. (2.25) eingeführten **Zentralkraftfelder**. Wir schließen daraus, dass der **Drehimpuls** in **Zentralkraftfeldern** eine **Erhaltungsgröße** ist.

Die kräftefreie Bewegung ist geradlinig gleichförmig, vgl. Abb. 2.33. Der dieser Bewegung zugeordnete Drehimpuls hat den Betrag $L = |\vec{L}| = mvd$. Wie kann es sein, dass einer **gerad**linigen Bewegung überhaupt ein **Dreh**impuls zugeordnet werden kann?

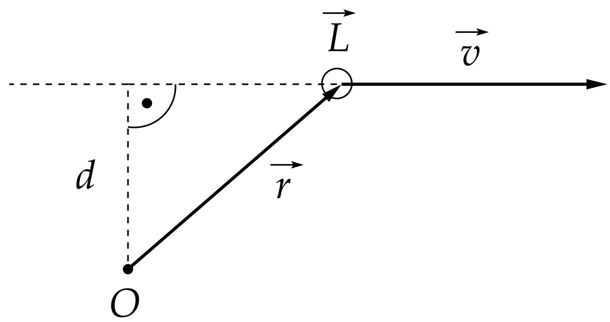

Abbildung 2.33: Geradlinig gleichförmige Bewegung. Der dieser Bewegung zugeordnete Drehimpuls zeigt in die Papierebene hinein.

Offenbar ist $\vec{L} = 0$, falls $\vec{r} \parallel \dot{\vec{r}}$, also wenn die Bewegung entlang einer Geraden erfolgt, die durch den Ursprung des Koordinatensystems geht. Es wird damit offensichtlich, dass der Drehimpuls von der **Wahl des Bezugssystems** abhängt. Verschiebt man den Ursprung um einen **konstanten** Vektor $\vec{a} = \overrightarrow{const}.$, so dass

$$\vec{r}\,' = \vec{r} + \vec{a}\ , \quad \dot{\vec{r}}\,' = \dot{\vec{r}}\ ,$$

so ändert sich auch der Drehimpuls,

$$\vec{L}\,' = m\,\vec{r}\,' \times \dot{\vec{r}}\,' = m\,\vec{r} \times \dot{\vec{r}} + m\,\vec{a} \times \dot{\vec{r}} = \vec{L} + \vec{a} \times \vec{p}\ .$$

Aus dem Verschwinden des Drehimpulses in einem bestimmten Bezugssystem, $\vec{L} = 0$, folgt also i.a. nicht das Verschwinden des Drehimpulses in einem anderen System, $\vec{L}\,' \neq 0$. Die **Drehimpulserhaltung** folgt **nur**, wenn auch der **Impuls** erhalten ist, da

$$\dot{\vec{L}}\,' = \dot{\vec{L}} + \dot{\vec{a}} \times \vec{p} + \vec{a} \times \dot{\vec{p}} = \dot{\vec{L}} + \vec{a} \times \dot{\vec{p}} \implies \dot{\vec{L}}\,' = \dot{\vec{L}} = 0 \;\;\text{nur, falls}\;\; \dot{\vec{p}} = 0\ , \;\;\text{d.h.}\;\; \vec{p} = \overrightarrow{const}.\ . \tag{2.164}$$

Die Drehimpulserhaltung schränkt die Bewegung eines Massenpunktes stark ein. Offenbar gilt allgemein

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = m\,\vec{r} \cdot \left(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\right) = 0\ , \tag{2.165}$$

da das Spatprodukt mit zwei identischen Vektoren verschwindet. Dies bedeutet, dass der Drehimpuls immer **senkrecht** auf dem Ortsvektor steht, $\vec{r} \perp \vec{L}$. Falls nun $\vec{L} = \overrightarrow{const}.$, dann muss die Bewegung **stets** in einer **Ebene** stattfinden, auf der $\vec{L}$ senkrecht steht. Z.B. ist für $\vec{L} = L\,\vec{e}_z$ die Bewegung auf die $(x, y)-$Ebene beschränkt, vgl. Abb. 2.34.

Es gilt außerdem der sog.

Flächensatz: Der Ortsvektor überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Fächen.

Beweis:

Wir betrachten Abb. 2.35. Es gilt $\vec{r}(t + \mathrm{d}t) = \vec{r}(t) + \mathrm{d}\vec{r}(t)$ und $\mathrm{d}\vec{r}(t) = [\mathrm{d}\vec{r}(t)/\mathrm{d}t]\,\mathrm{d}t = \dot{\vec{r}}(t)\,\mathrm{d}t$. Die Fläche $\mathrm{d}S$ ist gerade gleich der Hälfte der Fläche des durch die Vektoren $\vec{r}(t)$ und $\vec{r}(t + \mathrm{d}t)$ aufgespannten Parallelogramms, d.h.

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{2}\,|\vec{r}(t) \times \vec{r}(t + \mathrm{d}t)| = \frac{1}{2}\left|\vec{r}(t) \times \left(\vec{r}(t) + \dot{\vec{r}}(t)\,\mathrm{d}t\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{r}(t) \times \dot{\vec{r}}(t)\right|\mathrm{d}t = \frac{1}{2m}\,|\vec{L}|\,\mathrm{d}t\ ,$$

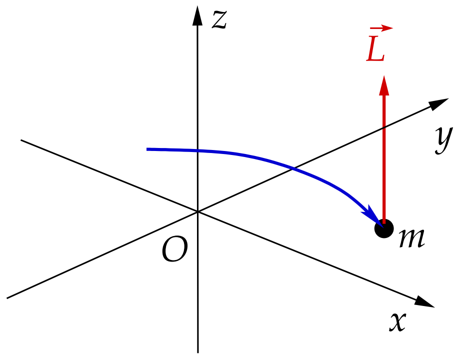

Abbildung 2.34: Im Fall der Drehimpulserhaltung findet die Bewegung eines Körpers stets in einer Ebene statt, auf der der Drehimpuls senkrecht steht.

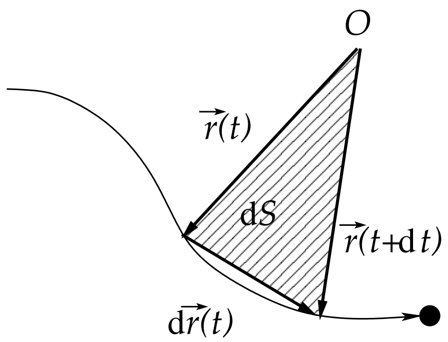

Abbildung 2.35: Zum Flächensatz.

also

$$\dot{S} = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{L}{2m} \; . \tag{2.166}$$

Falls $\vec{L} = \overrightarrow{const.}$, so ist $\dot{S} = const.$, also ist die zeitliche Änderung der vom Ortsvektor überstrichenen Fläche konstant. Dies ist gerade die Behauptung.

2.4.7 Zentralkraftfelder

23.1.2017

Zentralkraftfelder zeigen an jedem Punkt des Raumes in Richtung des Ortsvektors, vgl. Gl. (2.25)

$$\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)\, \vec{e}_r \; . \tag{2.167}$$

Für Zentralkraftfelder gilt, wie im vorangegangenen Abschnitt gezeigt, **Drehimpulserhaltung**. Es gilt der folgende

Satz: Ein Zentralkraftfeld $\vec{F}$ ist **genau dann konservativ, falls**

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\, \vec{e}_r \; , \tag{2.168}$$