

Abbildung 2.18: Eine Masse zwischen zwei Federn.

Ausgangslage zu **ziehen**. Dies ergibt das gleiche Kraftgesetz für beide Federn. Für $x < 0$ wird zwar die linke Feder komprimiert und die rechte gedehnt, aber die Kräfte sind wieder jeweils durch Gl. (2.104) gegeben, wie man sich leicht klar macht. Die Gesamtkraft, die auf die Masse wirkt, ist daher in allen Fällen $F = 2 F_H = -k x$ und die Bewegungsgleichung lautet

$$m \ddot{x} = F = -k x \iff m \ddot{x} + k x = 0 .$$

Division durch m ergibt Gl. (2.103), mit $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

3. Ein **elektrischer Schwingkreis** wird durch das in Abb. 2.19 dargestellte Schaltbild symbolisiert.

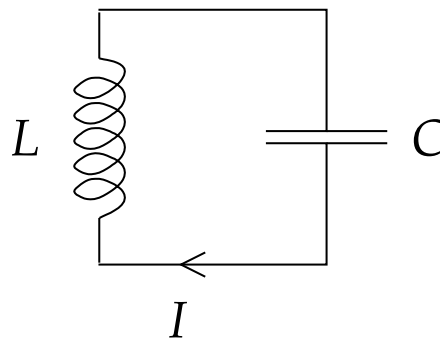


Abbildung 2.19: Ein elektrischer Schwingkreis.

Hierbei steht L für die **Induktivität** einer **Spule** und C für die **Kapazität** eines **Kondensators**. Der **Strom** I in diesem Schwingkreis erfüllt die Bewegungsgleichung

$$L \ddot{I} + \frac{1}{C} I = 0 .$$

Division durch L ergibt mit $x \equiv I$ und $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ wiederum die Bewegungsgleichung (2.103) des harmonischen Oszillators.

Wir wollen nun die Bewegungsgleichung (2.103) des harmonischen Oszillators mit Hilfe der **komplexen Zahlen** lösen. Wir wissen natürlich schon, dass die allgemeine Lösung die Gestalt (2.79) oder (2.83) haben wird. Wir machen den **Lösungsansatz**

$$x(t) = e^{\alpha t} \implies \dot{x}(t) = \alpha e^{\alpha t}, \quad \ddot{x}(t) = \alpha^2 e^{\alpha t}. \quad (2.105)$$

Eingesetzt in die Bewegungsgleichung (2.103) ergibt

$$(\alpha^2 + \omega_0^2) e^{\alpha t} = 0 \iff \alpha^2 = -\omega_0^2 \iff \alpha = \pm i \omega_0.$$

Es gibt also **zwei linear unabhängige Lösungen** der Form

$$x_{\pm}(t) = e^{\pm i \omega_0 t}.$$

Die **allgemeine Lösung** der homogenen linearen Differentialgleichung (2.103) lautet dementsprechend

$$x(t) = A_+ e^{i \omega_0 t} + A_- e^{-i \omega_0 t}. \quad (2.106)$$

Man muss an dieser Stelle beachten, dass $x(t) \in \mathbb{R}$, aber dass $e^{\pm i \omega_0 t} \in \mathbb{C}$. Mit Hilfe der Eulerschen Formel (2.96) führt dies zu einer zusätzlichen Bedingung für die Konstanten A_+ und A_- :

$$x(t) = (A_+ + A_-) \cos(\omega_0 t) + i(A_+ - A_-) \sin(\omega_0 t).$$

Um $x(t)$ reell zu machen, müssen wir also fordern, dass $A_+ = A_-$. Dann hat die allgemeine Lösung aber nur **einen** freien Parameter anstatt zwei, wie es für eine Differentialgleichung zweiter Ordnung sein muss. Der korrekte Ansatz ist, auch die Konstanten A_{\pm} als **komplex** anzusehen. A priori gibt es dann vier unabhängige Parameter, von denen man zwei mittels der Bedingung, dass $x(t) \in \mathbb{R}$, eliminieren kann:

$$\begin{aligned} x(t) &= (A_+ + A_-) \cos(\omega_0 t) + i(A_+ - A_-) \sin(\omega_0 t) \\ &= [(\operatorname{Re} A_+ + \operatorname{Re} A_-) \cos(\omega_0 t) - (\operatorname{Im} A_+ - \operatorname{Im} A_-) \sin(\omega_0 t)] \\ &\quad + i[(\operatorname{Im} A_+ + \operatorname{Im} A_-) \cos(\omega_0 t) + (\operatorname{Re} A_+ - \operatorname{Re} A_-) \sin(\omega_0 t)]. \end{aligned}$$

Da Sinus und Cosinus linear unabhängige Funktionen sind, verschwindet der Imaginärteil dieses Ausdrucks nur, wenn

$$\operatorname{Im} A_+ = -\operatorname{Im} A_- \quad \wedge \quad \operatorname{Re} A_+ = \operatorname{Re} A_-. \quad (2.107)$$

Dies bedeutet, dass

$$A_+ = A_-^*, \quad A_- = A_+^*.$$

Mit den Bedingungen (2.107) erhalten wir als Lösung

$$x(t) = 2 \operatorname{Re} A_+ \cos(\omega_0 t) + 2 \operatorname{Im} A_- \sin(\omega_0 t).$$

Mit den Definitionen $B \equiv 2 \operatorname{Re} A_+$, $A \equiv 2 \operatorname{Im} A_-$, $\omega \equiv \omega_0$, $\varphi \equiv x$ haben wir also die wohlbekannteste allgemeine Lösung (2.79) reproduziert:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t). \quad (2.108)$$

2 Mechanik des freien Massenpunktes

Die Konstanten A, B werden durch die Anfangsbedingungen für $x(t)$ und $\dot{x}(t)$ festgelegt. Dazu berechnen wir noch

$$\dot{x}(t) = \omega_0 [A \cos(\omega_0 t) - B \sin(\omega_0 t)] . \quad (2.109)$$

Damit gilt $x(0) \equiv x_0 = B$ und $\dot{x}(0) \equiv v_0 = A\omega_0$, d.h. $A = v_0/\omega_0$. Wir erhalten also

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) . \quad (2.110)$$

Beispiele:

1. $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0 = 0$. Der Oszillator wird also anfänglich aus der Ruhelage ausgelenkt, aber nicht zusätzlich angestoßen, sondern einfach nur losgelassen. Die spezielle Lösung für diese Anfangsbedingungen lautet gemäß Gl. (2.110)

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) .$$

2. $x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0$. Der Oszillator wird also anfänglich nicht ausgelenkt, sondern nur angestoßen. Die spezielle Lösung für diese Anfangsbedingungen lautet gemäß Gl. (2.110)

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) .$$

2.3.7 Linearer harmonischer Oszillator mit Dämpfung

Jedes reale System, welches der Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators genügt, wird aufgrund von Reibungskräften zur Ruhe kommen. Mit Stokesscher Reibung lautet die Bewegungsgleichung

$$m \ddot{x} + \alpha \dot{x} + kx = 0 . \quad (2.111)$$

Dies läßt sich für das im letzten Abschnitt diskutierte mechanische System der zwischen zwei Federn eingespannten Masse realisieren, indem man die Masse in ein Bad mit einer viskosen Flüssigkeit eintaucht, vgl. Abb. 2.20.

Der elektrische Schwingkreis kann ebenfalls gedämpft werden, indem man einen elektrischen Widerstand einfügt, vgl. Abb. 2.21. Die Bewegungsgleichung lautet dann

$$L \ddot{I} + R \dot{I} + \frac{1}{C} I = 0 . \quad (2.112)$$

Wir wollen im folgenden Gleichungen vom Typ (2.111) oder (2.112) lösen. Wir dividieren Gl. (2.111) durch m ,

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 , \quad (2.113)$$

mit $\beta = \alpha/(2m)$ und $\omega_0^2 = k/m$. Dies ist wiederum eine **homogene lineare Differentialgleichung** für die Funktion $x(t)$. Ein vielversprechender **Lösungsansatz** ist wieder die Exponentialfunktion,

$$x(t) = e^{\lambda t} \implies \dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t} , \quad \ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t} . \quad (2.114)$$

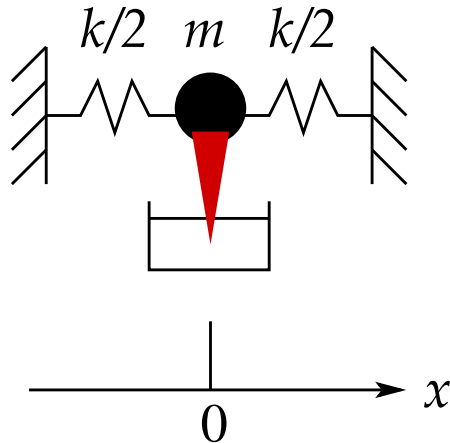


Abbildung 2.20: Eine zwischen zwei Federn eingespannte Masse, deren Bewegung durch eine viskose Flüssigkeit gedämpft wird.

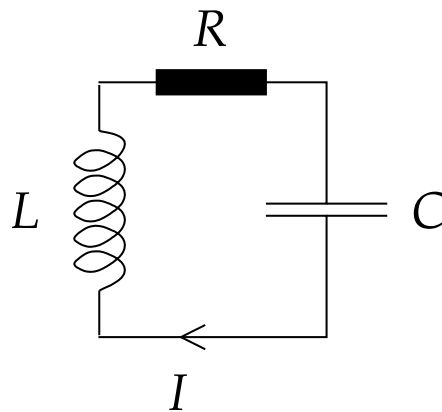


Abbildung 2.21: Der gedämpfte elektrische Schwingkreis.

Eingesetzt in Gl. (2.113) ergibt die Bedingung

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen

$$\lambda_{\pm} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}. \quad (2.115)$$

Die beiden linear unabhängigen Lösungen sind

$$x_{\pm}(t) = e^{\lambda_{\pm}t}$$

und die **allgemeine Lösung** der Differentialgleichung (2.113) lautet

$$x(t) = A_+ e^{\lambda_+ t} + A_- e^{\lambda_- t}. \quad (2.116)$$

Zur Diskussion der Lösung unterscheiden wir drei Fälle.

1. Schwache Dämpfung (Schwingfall): $\beta < \omega_0$.

In diesem Fall ist das Argument der Wurzel in Gl. (2.115) negativ, d.h. mit Hilfe der imaginären Einheit gilt

$$\lambda_{\pm} = -\beta \pm i \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \equiv -\beta \pm i \omega, \quad (2.117)$$

mit der gegenüber ω_0 **verringerten** Eigenfrequenz $\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} < \omega_0$. Eingesetzt in die allgemeine Lösung (2.116) erhalten wir

$$x(t) = e^{-\beta t} (A_+ e^{i\omega t} + A_- e^{-i\omega t}) . \quad (2.118)$$

Der Term in Klammern ist von der Form identisch mit der allgemeinen Lösung (2.106) eines **ungedämpften** harmonischen Oszillators, allerdings mit der Eigenfrequenz $\omega < \omega_0$. Der Vorfaktor $e^{-\beta t}$ sorgt dafür, dass die Amplitude der Schwingung mit der Zeit exponentiell abklingt. Mit den gleichen Überlegungen wie im vorangegangenen Abschnitt bringen wir den Imaginärteil von Gl. (2.118) zum Verschwinden und erhalten die rein reelle Lösung

$$x(t) = e^{-\beta t} [A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)] , \quad (2.119)$$

mit $A \equiv 2 \operatorname{Im} A_-$, $B \equiv 2 \operatorname{Re} A_+$.

Die Konstanten lassen sich an die Anfangsbedingungen anpassen. Da

$$\dot{x}(t) = -e^{-\beta t} [(A\beta + B\omega) \sin(\omega t) - (A\omega - B\beta) \cos(\omega t)]$$

erhalten wir

$$x(0) \equiv x_0 = B, \quad \dot{x}_0 \equiv v_0 = A\omega - B\beta \implies A = \frac{v_0 + \beta x_0}{\omega} .$$

Wir erhalten damit aus Gl. (2.119)

$$x(t) = e^{-\beta t} \left[x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0 + \beta x_0}{\omega} \sin(\omega t) \right] . \quad (2.120)$$

Dies geht für verschwindende Reibung, $\beta = 0$, in Gl. (2.110) über.

Die Lösung (2.119) läßt sich auch wieder in Form einer phasenverschobenen Sinusschwingung schreiben, vgl. Gl. (2.83),

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \delta) \equiv A(t) \sin(\omega t + \delta) , \quad (2.121)$$

mit $A_0 = \sqrt{A^2 + B^2}$, $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$ und $\cos \delta = A/A_0$. In dieser Form ist die exponentiell abklingende Amplitude der Schwingung besonders offensichtlich. Die Form der Lösung (2.121) ist in Abb. 2.22 graphisch dargestellt.

Für die Periode der Schwingung gilt

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} > \frac{2\pi}{\omega_0} = T_0 ,$$

d.h. die Dämpfung verlängert die Schwingungsdauer.

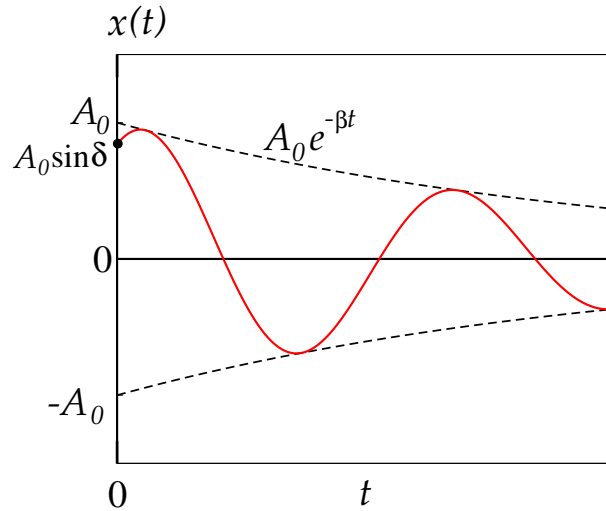


Abbildung 2.22: Die Lösung des gedämpften harmonischen Oszillators für den Schwingfall.

2. Kritische Dämpfung (aperiodischer Grenzfall): $\beta = \omega_0$.

In diesem Fall ist $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = 0$. Der Lösungsansatz (2.114) liefert nur **eine** spezielle Lösung,

$$x(t) = e^{-\beta t}.$$

Wir benötigen aber eine zweite, linear unabhängige Lösung. Wir erweitern daher den Lösungsansatz wie folgt:

$$\begin{aligned} x(t) &= \varphi(t) e^{-\beta t}, \\ \dot{x}(t) &= \dot{\varphi}(t) e^{-\beta t} - \beta \varphi(t) e^{-\beta t} = [\dot{\varphi}(t) - \beta \varphi(t)] e^{-\beta t}, \\ \ddot{x}(t) &= [\ddot{\varphi}(t) - \beta \dot{\varphi}(t)] e^{-\beta t} - \beta [\dot{\varphi}(t) - \beta \varphi(t)] e^{-\beta t} \\ &= [\ddot{\varphi}(t) - 2\beta \dot{\varphi}(t) + \beta^2 \varphi(t)] e^{-\beta t}. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung liefert

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}(t) - 2\beta \dot{\varphi}(t) + \beta^2 \varphi(t) + 2\beta [\dot{\varphi}(t) - \beta \varphi(t)] + \omega_0^2 \varphi(t) &= 0 \\ \iff \ddot{\varphi}(t) + (\omega_0^2 - \beta^2) \varphi(t) &= 0. \end{aligned}$$

Für den aperiodischen Grenzfall ist der zweite Term auf der linken Seite null, also gilt

$$\ddot{\varphi}(t) = 0 \implies \dot{\varphi}(t) = \text{const.} \equiv a_2 \implies \varphi(t) = a_1 + a_2 t.$$

Damit lautet die **allgemeine Lösung** in diesem Fall

$$x(t) = (a_1 + a_2 t) e^{-\beta t}. \quad (2.122)$$

Es findet keine Schwingung mehr statt. Dennoch hängt der Lösungsverlauf stark von den Anfangsbedingungen ab. Wir bestimmen die Konstanten a_1, a_2 aus den

Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} x(0) &\equiv x_0 = a_1, \\ \dot{x}(0) &\equiv v_0 = a_2 - \beta a_1 = a_2 - \beta x_0 \implies a_2 = v_0 + \beta x_0. \end{aligned}$$

Dies ergibt

$$x(t) = [x_0 + (v_0 + \beta x_0) t] e^{-\beta t}. \quad (2.123)$$

Wir betrachten eine gegebene Anfangsauslenkung $x_0 > 0$. Die Anfangsgeschwindigkeit mag null sein, $v_0 = 0$, oder aber auch von null verschieden sein. Im letzteren Fall kann sie in Richtung der Auslenkung zeigen, $v_0 > 0$, oder auch ihr entgegengesetzt, also in Richtung der Ruhelage zeigen, $v_0 < 0$. Solange $v_0 > -\beta x_0$, ist $x(t) > 0 \forall t \geq 0$. Falls jedoch $v_0 < -\beta x_0 < 0$, so gibt es einen Nulldurchgang bei der Zeit $t_N = x_0 / (|v_0| - \beta x_0)$. Dies bedeutet, dass man den Oszillator stark genug in Richtung der Ruhelage angestoßen hat, so dass er in der Lage ist, durch die Ruhelage durchzuschwingen, bevor er ihr sich wieder von der anderen Seite annähert. Die beiden verschiedenen Lösungstypen sind in Abb. 2.23 veranschaulicht.

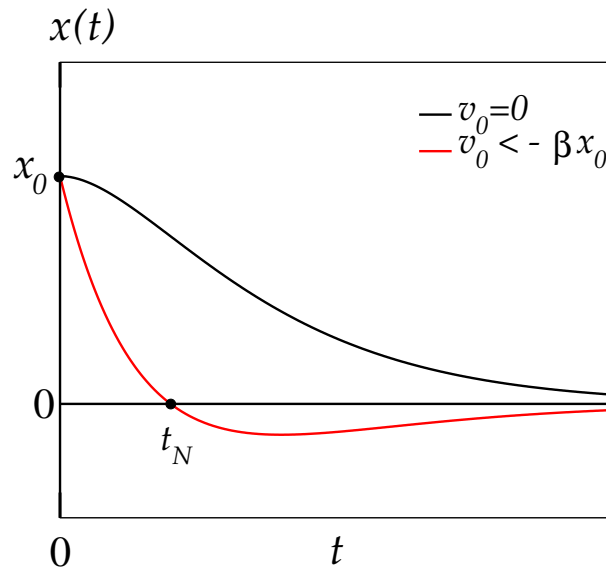


Abbildung 2.23: Die Lösung des gedämpften harmonischen Oszillators für den aperiodischen Grenzfall.

13.1.2017

3. Starke Dämpfung (Kriechfall): $\beta > \omega_0$.

Wir definieren $\gamma \equiv \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} < \beta$ und schreiben Gl. (2.115) als

$$\lambda_{\pm} = -\beta \pm \gamma.$$

Offenbar gilt $\lambda_- < \lambda_+ < 0$ und $\lambda_{\pm} \in \mathbb{R}$. Die allgemeine Lösung lautet, vgl. Gl. (2.116),

$$x(t) = e^{-\beta t} (A_+ e^{\gamma t} + A_- e^{-\gamma t}). \quad (2.124)$$

Die Geschwindigkeit ist dann

$$\dot{x}(t) = e^{-\beta t} [A_+ (-\beta + \gamma) e^{\gamma t} + A_- (-\beta - \gamma) e^{-\gamma t}] .$$

Die Konstanten A_{\pm} sind nun rein reell und können wieder mit Hilfe der Anfangsbedingungen bestimmt werden:

$$\left. \begin{aligned} x(0) &\equiv x_0 = A_+ + A_- \\ \dot{x}(0) &\equiv v_0 = -A_+(\beta - \gamma) - A_-(\beta + \gamma) \end{aligned} \right\} \iff A_{\pm} = \frac{1}{2} \left(x_0 \pm \frac{v_0 + \beta x_0}{\gamma} \right) .$$

Eingesetzt in die Lösung (2.124) erhalten wir mit $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$, $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$:

$$x(t) = e^{-\beta t} \left[x_0 \cosh(\gamma t) + \frac{v_0 + \beta x_0}{\gamma} \sinh(\gamma t) \right] . \quad (2.125)$$

Beachte, dass man mit der Ersetzung $\gamma \rightarrow i\omega$ und den Identitäten $\cosh(ix) = (e^{ix} + e^{-ix})/2 \equiv \cos x$ und $\sinh(ix) = (e^{ix} - e^{-ix})/2 = i \sin x$ die Lösung (2.120) des Schwingfalls erhält.

Die Form der Lösung ist ganz ähnlich der des aperiodischen Grenzfalls, vgl. Abb. 2.23. Sie besitzt allerdings keinen Term $\sim t e^{-\beta t}$ sondern ist stets rein exponentiell abklingend. Interessanterweise ist dieser exponentielle Abfall für große Zeiten $\sim e^{-(\beta-\gamma)t}$ (die zweite Exponentialfunktion $\sim e^{-(\beta+\gamma)t}$ klingt schneller auf null ab). Damit ist der Rückgang der Auslenkung in die Ruhelage **langsamer** als beim aperiodischen Grenzfall, wo er $\sim e^{-\beta t} < e^{-(\beta-\gamma)t}$ ist. Wenn man also einen Oszillator haben möchte, der **möglichst rasch** ohne zu schwingen in die Ruhelage zurückkehrt, muss man den aperiodischen Grenzfall $\beta \rightarrow \omega_0$ anstreben, d.h. die Reibung so einstellen, dass sie mit der Eigenfrequenz ω_0 des ungedämpften Oszillators möglichst gut übereinstimmt (sie aber nicht unterschreitet).

Auch im Kriechfall kann es, wie beim aperiodischen Grenzfall, vgl. Abb. 2.23, einen Nulldurchgang geben, nämlich wenn man den Oszillator nach Auslenkung aus der Ruhelage um x_0 genügend stark in Richtung der Ruhelage anstößt. Dies geschieht zu einer Zeit t_N , die durch die Gleichung

$$\gamma x_0 \cosh(\gamma t_N) = -(v_0 + \beta x_0) \sinh(\gamma t_N) \iff \tanh(\gamma t_N) = \frac{\gamma x_0}{-v_0 - \beta x_0}$$

gegeben ist. Damit die Zeit t_N im physikalischen Bereich $0 \leq t_N < \infty$ liegt, für den $0 \leq \tanh(\gamma t_N) < 1$, muss also gelten

$$0 \leq \frac{\gamma x_0}{-v_0 - \beta x_0} < 1 .$$

Damit die linke Seite der Ungleichung gilt, muss $-v_0 - \beta x_0 > 0$ sein, also $v_0 < -\beta x_0$. Damit auch die rechte Seite gilt, muss gelten ($-v_0 - \beta x_0 > 0$, wie wir gerade gesehen hatten)

$$-v_0 - \beta x_0 > \gamma x_0 \iff v_0 < -(\beta + \gamma)x_0 .$$

Dies setzt eine obere Grenze für die Anfangsgeschwindigkeit (bzw. eine untere Grenze für ihren Betrag $|v_0|$), für die ein Nulldurchgang erreicht wird. Dann dauert es gerade unendlich lange, bis ein Nulldurchgang geschieht, $t_N \rightarrow \infty$. **Für kleinere Werte von v_0 (bzw. betragsmäßig größere Werte) wird die Zeit t_N immer kleiner und geht für $|v_0| \rightarrow \infty$ gegen null.**

2.3.8 Der gedämpfte lineare Oszillator unter dem Einfluss einer äußeren Kraft

Reibung ist in realen physikalischen Systemen unvermeidlich. Daher ist jeder Schwingungsvorgang exponentiell gedämpft, es sei denn, eine **äußere Kraft** kompensiert die Reibung. Der gedämpfte harmonische Oszillator unter dem Einfluß einer **zeitabhängigen** äußeren Kraft $F_{\text{ext}}(t)$ folgt der Bewegungsgleichung

$$m \ddot{x} + \alpha \dot{x} + k x = F_{\text{ext}} .$$

Wir nehmen an, dass die äußere Kraft periodisch ist,

$$F_{\text{ext}}(t) \equiv m f \cos(\bar{\omega} t) ,$$

und dividieren durch m . Wir erhalten mit $\beta = \alpha/(2m)$, $\omega_0^2 = k/m$:

$$\ddot{x} + 2\beta \dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos(\bar{\omega} t) . \quad (2.126)$$

Für das in den beiden vorangegangenen Abschnitten diskutierte mechanische System der zwischen zwei Federn eingespannten Masse ist in Abb. [2.24](#) eine mögliche Realisierung dargestellt.

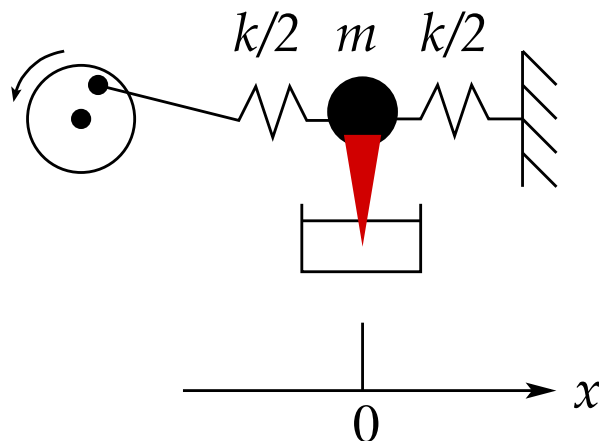


Abbildung 2.24: Realisierung einer periodischen äußeren Kraft für die zwischen zwei Federn eingespannte Masse.

Eine der beiden Federn ist nicht an einer festen Wand befestigt, sondern wird durch eine mit einem Schwungrad verbundene Pleuelstange angetrieben. Die Winkelgeschwindigkeit des Schwungrads beträgt $\bar{\omega}$.

Für den elektrischen Schwingkreis ist die Realisierung durch Anlegen einer Wechselspannung $U_{\text{ext}}(t) = U_0 \sin(\bar{\omega} t)$ gegeben, vgl. Abb. [2.25](#). Die Bewegungsgleichung für den elektrischen Strom lautet wegen $I_{\text{ext}} = \dot{U}_{\text{ext}}$

$$L \ddot{I} + R \dot{I} + \frac{1}{C} I = U_0 \bar{\omega} \cos(\bar{\omega} t) .$$

Mit $I \equiv x$, $\beta = R/(2L)$, $\omega_0^2 = 1/(LC)$, $f = U_0 \bar{\omega}/L$ ergibt dies genau Gl. [\(2.126\)](#).

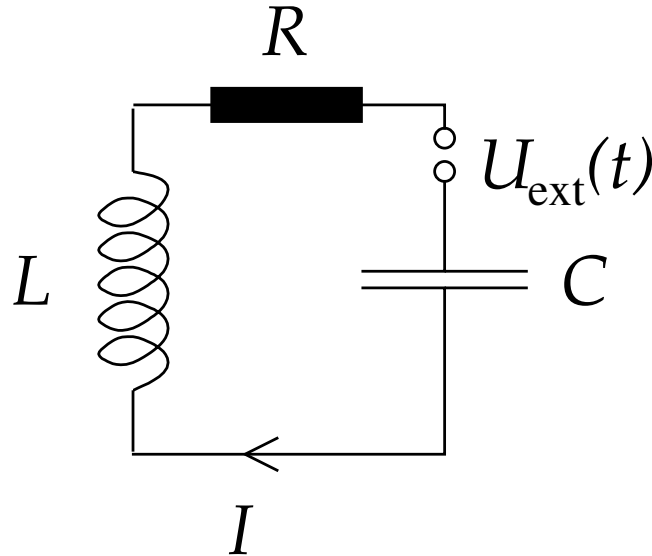


Abbildung 2.25: Realisierung einer periodischen äußeren Kraft für den elektrischen Schwingkreis.

Die zu lösende Differentialgleichung (2.126) ist eine **inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung**. Bekanntlich ist die allgemeine Lösung die Summe aus der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung, vgl. Gl. (2.57). Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist schon bekannt; dies ist Gl. (2.116). Wir benötigen also nur noch eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Diese beschaffen wir uns wie folgt. Wir erweitern zunächst die Differentialgleichung (2.126) ins Komplexe,

$$\ddot{z} + 2\beta \dot{z} + \omega_0^2 z = f e^{i\bar{\omega}t}. \quad (2.127)$$

Natürlich sind physikalische Kräfte, Auslenkungen einer Masse aus der Ruhelage oder Ströme reellwertige Größen. Es läßt sich jedoch bei periodischen Bewegungen wegen der einfachen Differentiationsregeln besser mit der (komplexen) Exponentialfunktion rechnen als mit den trigonometrischen Funktionen. Am Schluß der Rechnung muss man den Realteil der Lösung nehmen, um das physikalisch relevante Resultat zu erhalten. Wegen der Linearität der Differentialgleichung mischen Real- und Imaginärteile der Lösung nicht miteinander.

Um die spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (2.127) zu erhalten, argumentieren wir, dass der Oszillator nach einer gewissen **Einschwingzeit** der periodischen äußeren Kraft $F_{\text{ext}}(t)$ folgen und mit der gleichen Frequenz $\bar{\omega}$ schwingen wird. Wir machen daher den **Lösungsansatz**:

$$z(t) = A e^{i\bar{\omega}t}. \quad (2.128)$$

Einsetzen in die Differentialgleichung (2.127) ergibt

$$\begin{aligned} [(-\bar{\omega}^2 + 2i\beta\bar{\omega} + \omega_0^2)A - f] e^{i\bar{\omega}t} &= 0 \\ \implies A &= -\frac{f}{\bar{\omega}^2 - \omega_0^2 - 2i\beta\bar{\omega}} = -f \frac{\bar{\omega}^2 - \omega_0^2 + 2i\beta\bar{\omega}}{(\bar{\omega}^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\bar{\omega}^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} A &= -f \frac{\bar{\omega}^2 - \omega_0^2}{(\bar{\omega}^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \bar{\omega}^2}, \\
 \operatorname{Im} A &= -\frac{2f\beta\bar{\omega}}{(\bar{\omega}^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \bar{\omega}^2} < 0, \\
 |A| &= \sqrt{f^2 \frac{(\bar{\omega}^2 - \omega_0^2)^2}{[(\bar{\omega}^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \bar{\omega}^2]^2} + \frac{4f^2\beta^2\bar{\omega}^2}{[(\bar{\omega}^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \bar{\omega}^2]^2}} \\
 &= f \frac{\sqrt{(\bar{\omega}^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \bar{\omega}^2}}{(\bar{\omega}^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \bar{\omega}^2} = \frac{f}{\sqrt{(\bar{\omega}^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \bar{\omega}^2}}. \quad (2.129)
 \end{aligned}$$

Der Betrag $|A|$ der komplexen Amplitude A ist in Abb. 2.26 als Funktion von $\bar{\omega}$ für verschiedene Werte des Reibungskoeffizienten β dargestellt.

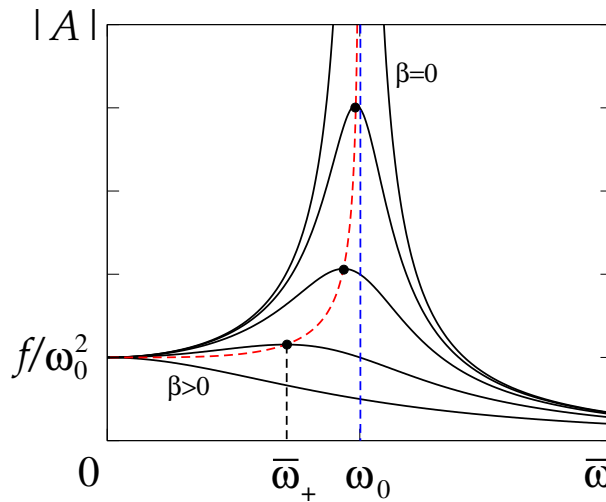


Abbildung 2.26: Der Betrag $|A|$ der komplexen Amplitude A der speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung für verschiedene Werte des Reibungskoeffizienten β .

Wir diskutieren die Lösung für $|A|$.

1. Zunächst ist zu bemerken, dass wir nur den Bereich $\bar{\omega} \geq 0$ betrachten müssen, da die Funktion $|A|$ symmetrisch in $\bar{\omega}$ ist, d.h. $|A|(\bar{\omega}) = |A|(-\bar{\omega})$.
2. Für $\bar{\omega} \rightarrow 0$ ist der Wert von $|A|$ von β unabhängig,

$$\bar{\omega} \rightarrow 0 : |A| \rightarrow \frac{f}{\omega_0^2}.$$

Für verschwindende Kreisfrequenz der antreibenden Kraft (stillstehendes Schwungrad) ist die Auslenkung des Oszillators konstant.

3. Für $\bar{\omega} \rightarrow \infty$ wird $|A|$ ebenfalls unabhängig von β :

$$\bar{\omega} \rightarrow \infty : |A| \rightarrow \frac{f}{\bar{\omega}^2} \rightarrow 0 .$$

Der Oszillator schwingt nicht; die äußere Kraft ändert sich so schnell, dass er ihr nicht mehr folgen kann und weder in die eine noch in die andere Richtung ausgelenkt wird.

4. Die Extremwerte der Funktion $|A|(\bar{\omega})$ berechnen sich aus der Bedingung:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d|A|}{d\bar{\omega}} = -\frac{f}{2\sqrt{(\bar{\omega}^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2\bar{\omega}^2}^3} [4(\bar{\omega}^2 - \omega_0^2)\bar{\omega} + 8\beta^2\bar{\omega}] \\ \iff 0 &= \bar{\omega} (\bar{\omega}^2 - \omega_0^2 + 2\beta^2) . \end{aligned}$$

Die Nullstellen dieser Gleichung, d.h. die Extrema der Funktion $|A|(\bar{\omega})$, sind also

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_0 &= 0 , \\ \bar{\omega}_{\pm} &= \pm \bar{\omega}_* , \quad \bar{\omega}_* \equiv \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \leq \omega_0 . \end{aligned}$$

Fallunterscheidung:

- (i) $\omega_0 < \sqrt{2}\beta$: $\bar{\omega}_*$ ist imaginär und $\bar{\omega}_{\pm}$ entfallen als mögliche Extrema der reellwertigen Funktion $|A|(\bar{\omega})$. Die verbleibende Lösung ist $\bar{\omega}_0 = 0$. Dies ist ein **Maximum**, da $|A| \geq 0$ für $\bar{\omega} \rightarrow \pm\infty$ gegen null strebt.
- (ii) $\omega_0 > \sqrt{2}\beta$: Da $\bar{\omega}_- = -\bar{\omega}_* < \bar{\omega}_0 = 0 < \bar{\omega}_+ = \bar{\omega}_*$ und die Funktion $|A|$ für $\bar{\omega} \rightarrow \pm\infty$ gegen null geht, ist $\bar{\omega}_0$ ein **Minimum** und $\bar{\omega}_{\pm}$ sind zwei symmetrisch zum Ursprung angeordnete **Maxima**.

Die Maxima im zweiten Fall bedeuten, dass das System eine **Resonanz** aufweist: es gibt eine Anregungsfrequenz $\bar{\omega}_* \leq \omega_0$, bei der die Schwingungsamplitude besonders groß wird. Für kleiner werdendes β nähert sich $\bar{\omega}_*$ der Eigenfrequenz ω_0 des ungedämpften harmonischen Oszillators an und die zugehörigen Maxima werden immer höher. Die Höhe der Maxima ist durch die rot gestrichelte Kurve in Abb. 2.26 gegeben. Für verschwindende Reibung geht $\bar{\omega}_* \rightarrow \omega_0$ und die Funktion $|A|$ hat einen Pol bei ω_0 (blau gestrichelte Kurve in Abb. 2.26):

$$\beta \rightarrow 0 : |A| \rightarrow \frac{f}{|\bar{\omega}^2 - \omega_0^2|} .$$

Für $\bar{\omega} = \omega_0$, also für eine Antriebsfrequenz, die mit der Eigenfrequenz des ungedämpften Oszillators übereinstimmt, kommt es zur sog. **Resonanzkatastrophe**: die Amplitude der Schwingung geht gegen unendlich (was nichts anderes bedeutet, als dass die Federn reißen, oder der Schwingkreis verschmort).

Mittels der Exponentialdarstellung der komplexen Amplitude, $A = |A| e^{i\bar{\varphi}}$ definiert man ihre Phase,

$$\bar{\varphi} \equiv \arg A = \arctan \left(\frac{\text{Im } A}{\text{Re } A} \right) = \arctan \left(\frac{2\beta\bar{\omega}}{\bar{\omega}^2 - \omega_0^2} \right) . \quad (2.130)$$

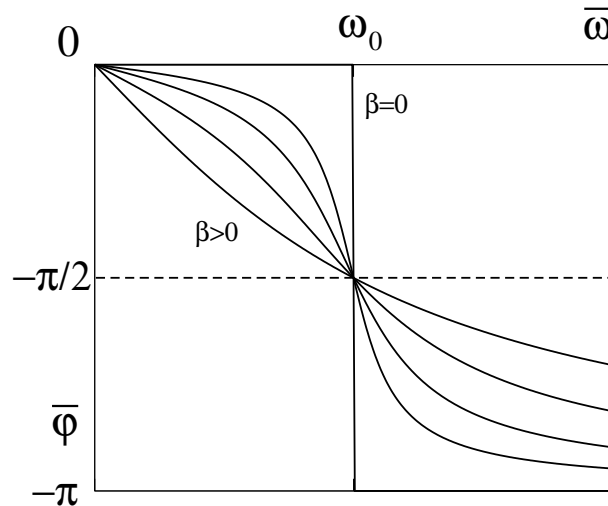


Abbildung 2.27: Die Phase $\bar{\varphi}$ der komplexen Amplitude A der speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung für verschiedene Werte des Reibungskoeffizienten β .

Da $\text{Im } A < 0$, liegt die Phase $\bar{\varphi}$ zwischen π und 2π , bzw. wegen der Periodizität der komplexen Zahlen zwischen $-\pi$ und 0 . Die Phase ist in Abb. 2.27 für verschiedene Werte von β als Funktion von $\bar{\omega}$ dargestellt.

Die spezielle Lösung des Oszillators lautet

$$z^{(s)}(t) = A e^{i\bar{\omega}t} = |A| e^{i\bar{\varphi}} e^{i\bar{\omega}t} = |A| e^{i(\bar{\omega}t + \bar{\varphi})}. \quad (2.131)$$

Ihre Phase $\bar{\omega}t + \bar{\varphi}$ “hinkt” wegen $-\pi \leq \bar{\varphi} \leq 0$ der Phase $\bar{\omega}t$ der treibenden Kraft hinterher. Das Maximum der Auslenkung wird erst **nach** dem Maximum der treibenden Kraft erreicht.

Der physikalisch relevante Anteil der Lösung (2.131) ist der Realteil dieser Gleichung,

$$x^{(s)}(t) = |A| \cos(\bar{\omega}t + \bar{\varphi}).$$

Die **allgemeine** Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (2.126) lautet nun

$$\begin{aligned} x(t) &= x^{(a)}(t) + x^{(s)}(t), \\ x^{(a)}(t) &= \text{Re} (A_+ e^{\lambda_+ t} + A_- e^{\lambda_- t}) \sim e^{-\beta t}. \end{aligned} \quad (2.132)$$

Da die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung **immer** exponentiell gedämpft ist, unabhängig davon, ob der Schwingfall, der aperiodische Grenzfall oder der Kriechfall vorliegt, wird nach einer gewissen **Einschwingzeit** $t \gg 1/\beta$ diese Lösung ausgedämpft sein und die allgemeine Lösung folgt der speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung,

$$x(t) \simeq x^{(s)}(t), \quad t \gg 1/\beta.$$

Die homogene Lösung spielt also lediglich während des **Einschwingvorgangs** eine Rolle. Sie wird nur benötigt, um die Anfangsbedingungen zu erfüllen. Für große Zeiten $t \gg 1/\beta$ schwingt das System mit der Kreisfrequenz $\bar{\omega}$ der äußeren treibenden Kraft und ist von den Anfangsbedingungen unabhängig.