

fällt. Zunächst würde man vermuten, dass der Auftreffpunkt gegenüber dem Startpunkt entgegen der Erdrotation (also westlich) versetzt erscheint, weil sich die Erde während der Fallbewegung ein Stückchen weitergedreht hat. Dies ist zwar richtig, aber der Stein hat beim Loslassen auch eine nichtverschwindende Geschwindigkeitskomponente in Richtung der Erdrotation und diese ist auf der Turmspitze größer als am Fuß des Turms. Dies kehrt den Effekt um und sorgt für eine Ablenkung in Richtung der Erdrotation (also östlich).

2.2.5 Beliebig beschleunigte Bezugssysteme

Wir betrachten ein Inertialsystem $\Sigma = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ und ein sich **relativ dazu beliebig bewegendes** System $\Sigma' = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$. Diese Relativbewegung setzt sich aus einer **Translation** des Ursprungs und einer **Rotation** der Koordinatenachsen zusammen, vgl. Abb. [2.10](#).

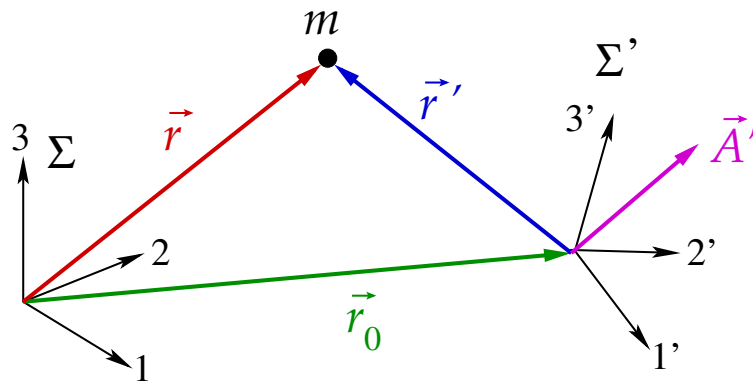


Abbildung 2.10: Das Inertialsystem Σ und das sich relativ dazu beliebig bewegende Nicht-Inertialsystem Σ' .

Wir betrachten einen beliebigen Vektor \vec{A}' im System Σ' ,

$$\vec{A}' = \sum_{i=1}^3 a'_i \vec{e}'_i,$$

und berechnen seine Zeitableitung, aber vom System Σ aus gesehen, in dem sich Σ' relativ zu Σ bewegt,

$$\left. \frac{d\vec{A}'}{dt} \right|_{\Sigma} = \sum_{i=1}^3 \left. \frac{da'_i}{dt} \right|_{\Sigma} \vec{e}'_i + \sum_{i=1}^3 a'_i \left. \frac{d\vec{e}'_i}{dt} \right|_{\Sigma}. \quad (2.44)$$

Der erste Term beschreibt die zeitliche Änderung von \vec{A}' von Σ' aus gesehen, denn dort sind die \vec{e}'_i als kartesische Einheitsvektoren konstant und nur die Komponenten (Koordinaten) des Vektors ändern sich,

$$\sum_{i=1}^3 \left. \frac{da'_i}{dt} \right|_{\Sigma} \vec{e}'_i \equiv \left. \frac{d\vec{A}'}{dt} \right|_{\Sigma'}. \quad (2.45)$$

Welche Bedeutung aber hat der zweite Term in Gl. (2.44)? Falls $\vec{A}' = \overrightarrow{const.}$ in Σ' , so wäre der erste Term in Gl. (2.44) null und der zweite Term gleich der gesamten Änderung von \vec{A}' pro Zeiteinheit dt von Σ aus gesehen. Diese resultiert nun allein aus der **Rotation** von Σ' relativ zu Σ , denn eine Translation ändert nichts an den Einheitsvektoren \vec{e}'_i des Systems Σ' (Vektoren lassen sich stets beliebig verschieben). Die Änderung von \vec{A}' aufgrund der Rotation läßt sich mit Hilfe des Vektors $\vec{\omega}$ der Winkelgeschwindigkeit ausdrücken. Dazu betrachten wir Abb. 2.11.

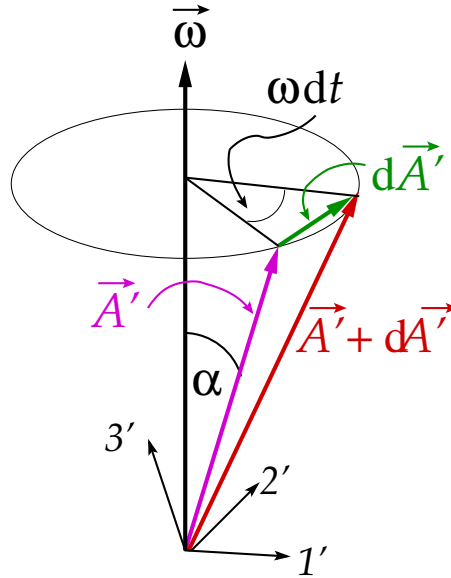


Abbildung 2.11: Die Rotation des Systems Σ' erzeugt von Σ aus betrachtet eine Änderung des Vektors \vec{A}' .

Offenbar ist $d\vec{A}' \perp \vec{A}'$ und $d\vec{A}' \perp \vec{\omega}$. Ferner ist der Betrag $dA' = A' \sin \alpha (\omega dt)$. Diese Tatsachen lassen sich als

$$d\vec{A}' = (\vec{\omega} \times \vec{A}') dt$$

ausdrücken, bzw. nach Division durch dt ,

$$\left. \frac{d\vec{A}'}{dt} \right|_{\text{Rotation}} = \vec{\omega} \times \vec{A}' . \quad (2.46)$$

Fassen wir beide Resultate (2.45) und (2.46) zusammen, so erhalten wir für Gl. (2.44) das Endresultat

$$\left. \frac{d\vec{A}'}{dt} \right|_{\Sigma} = \left. \frac{d\vec{A}'}{dt} \right|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \vec{A}' . \quad (2.47)$$

Dies gilt für beliebige Vektoren, also auch für den Ortsvektor $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_0$:

19.12.2016

$$\left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{\Sigma} - \left. \frac{d\vec{r}_0}{dt} \right|_{\Sigma} = \left. \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|_{\Sigma} = \left. \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \vec{r}' . \quad (2.48)$$

Nochmaliges Ableiten nach der Zeit, relativ vom System Σ aus gesehen, ergibt

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right|_{\Sigma} - \left. \frac{d^2 \vec{r}_0}{dt^2} \right|_{\Sigma} &= \left. \frac{d}{dt} \left(\left. \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \vec{r}' \right) \right|_{\Sigma} \\
 &= \left. \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} \right|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \left. \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|_{\Sigma'} + \left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_{\Sigma} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \left. \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|_{\Sigma} \\
 &= \left. \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} \right|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times \left. \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|_{\Sigma'} + \left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_{\Sigma} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \left. \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|_{\Sigma'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \\
 &= \left. \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} \right|_{\Sigma'} + 2\vec{\omega} \times \left. \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|_{\Sigma'} + \left. \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right|_{\Sigma} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') . \quad (2.49)
 \end{aligned}$$

Im folgenden bezeichnen wir zur Vereinfachung der Notation die Zeitableitung vom System Σ aus betrachtet wieder mit einem Punkt über der abzuleitenden Größe. Die Zeitableitung vom System Σ' aus betrachtet schreiben wir allerdings voll aus. Dann folgt aus Gl. (2.49) nach Multiplikation mit m und Umstellen der Terme für die Kraft im System Σ'

$$\vec{F}' = m \left. \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} \right|_{\Sigma'} = \vec{F} - m \ddot{\vec{r}}_0 - 2m\vec{\omega} \times \left. \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|_{\Sigma'} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' , \quad (2.50)$$

wobei wir $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$ benutzt haben. Der zweite Term auf der rechten Seite ist die Relativbeschleunigung der beiden Koordinatensysteme. Der dritte Term ist die Corioliskraft und der vierte die Zentrifugalkraft.

2.3 Einfache Probleme der Dynamik

2.3.1 Das Grundproblem der Dynamik

Das Grundproblem der Dynamik besteht in der Berechnung der **Raumkurve** eines Körpers mit Hilfe des 2. Newtonschen Axioms (2.17) bzw. der dynamischen Grundgleichung (2.19),

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\dot{\vec{v}} = m\ddot{\vec{r}} . \quad (2.51)$$

Nach Division durch m sieht dieses Problem formal genauso aus wie das Grundproblem der Kinematik: finde $\vec{r}(t)$ aus der Gleichung $\ddot{\vec{r}} = \vec{a} = \vec{F}/m$ für gegebenes \vec{a} bzw. \vec{F}/m . Man mag jetzt vermuten, dass die Lösung ähnlich einfach zu erhalten sein wird wie dort, nämlich durch zweimaliges Integrieren nach der Zeit. Dies trifft zu, wenn \vec{a} bzw. \vec{F} lediglich eine Funktion der Zeit ist, $\vec{a} = \vec{a}(t)$ bzw. $\vec{F} = \vec{F}(t)$. Beispiele dafür sind der freie Fall, der senkrechte Wurf oder der schräge Wurf, jeweils ohne Luftreibung. Diese Fälle werden ausgiebig in den Übungsaufgaben behandelt.

I.a. aber ist die Kraft nicht nur eine Funktion der Zeit, sondern auch des Ortes und ggfs. der Geschwindigkeit, $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$. In diesem Fall handelt es sich bei der dynamischen Grundgleichung (2.51) um eine **Differentialgleichung** für die Funktion $\vec{r}(t)$, die es zu lösen gilt. Um zu sehen, wie dies vonstatten geht, machen wir als nächstes einen mathematischen Einschub.

2.3.2 Lineare Differentialgleichungen

Wir bezeichnen die n -te Ableitung der Funktion $x(t)$ nach t mit

$$x^{(n)}(t) \equiv \frac{d^n x(t)}{dt^n} . \quad (2.52)$$

Definition: Eine Beziehung

$$f(x^{(n)}, x^{(n-1)}, \dots, \dot{x}, x, t) = 0 , \quad (2.53)$$

die t , x , sowie alle Ableitungen von $x(t)$ nach t bis zur maximal n -ten Ordnung miteinander verknüpft, heißt **Differentialgleichung n -ter Ordnung** für die Funktion $x(t)$.

Beispiele:

1. Die Newtonsche Bewegungsgleichung in einer Raumdimension,

$$f(\ddot{x}, \dot{x}, x, t) \equiv m \ddot{x} - F(x, \dot{x}, t) = 0 ,$$

ist eine **Differentialgleichung zweiter Ordnung** für die Funktion $x(t)$.

2. Die Newtonsche Bewegungsgleichung in drei Raumdimensionen,

$$\begin{aligned} m \ddot{\vec{r}} - \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) &= 0 , \\ \iff m \ddot{x}_i - F_i(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, t) &= 0 , \quad i = 1, 2, 3 , \end{aligned}$$

stellt ein **gekoppeltes System** von **drei** Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Funktionen $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ dar.

Die **allgemeine Lösung** einer Differentialgleichung n -ter Ordnung ist von der Gestalt

$$x(t \mid \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) ,$$

d.h. sie hängt von dem Satz n **unabhängiger** Parameter $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ ab. Jeder vorgegebene Satz spezifiziert eine **spezielle** Lösung der Differentialgleichung. Die Parameter γ_i können über die Anfangswerte $x(t_0)$, $\dot{x}(t_0)$, \dots , $x^{(n-1)}(t_0)$ festgelegt werden.

Definition: Eine **lineare Differentialgleichung** ist eine Differentialgleichung, in der die Ableitungen $x^{(j)}(t)$ höchstens in erster (linearer) Ordnung auftreten,

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j(t) x^{(j)}(t) = \beta(t) . \quad (2.54)$$

Falls $\beta(t) = 0$, so liegt eine **homogene** lineare Differentialgleichung vor, falls $\beta(t) \neq 0$, so heißt sie **inhomogen**.

Für homogene lineare Differentialgleichungen gilt das **Superpositionsprinzip**: Seien $x_1(t)$, $x_2(t)$ zwei Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung. Dann ist auch

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

mit beliebigen Koeffizienten c_1, c_2 eine Lösung.

Lösungen $x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)$ einer Differentialgleichung heißen **linear unabhängig**, falls die Gleichung

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j x_j(t) = 0$$

nur für $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$ erfüllt wird.

Sei m die **maximale Zahl** linear unabhängiger Lösungsfunktionen. Die allgemeine Lösung einer homogenen linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung kann man als **Linearkombination** dieser m linear unabhängigen Lösungsfunktionen schreiben,

$$x(t | \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) = \sum_{j=1}^m \alpha_j x_j(t). \quad (2.55)$$

Dies zeigt man am besten durch einen Widerspruchsbeweis: Wir nehmen an, dass dies nicht möglich wäre. Das bedeutet dann aber, dass die linke Seite von den anderen Lösungen linear **unabhängig** ist, weil man sie nicht als Linearkombination der linear unabhängigen Lösungen schreiben kann. Dann wiederum ist m nicht die maximale Zahl linear unabhängiger Lösungen, was aber ein Widerspruch ist, q.e.d..

Auf der rechten Seite der Gl. (2.55) treten m Parameter α_j auf, auf der linken dagegen n Parameter γ_j . Die Zahl m der Parameter α_j darf nicht kleiner als n sein, also $m \geq n$, denn die allgemeine Lösung $x(t | \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ benötigt **mindestens** n Parameter. Andererseits muss auch $m \leq n$ gelten, denn sonst hinge $x(t | \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ von **mehr** als n Parametern ab. Beide Bedingungen lassen sich nur für $m = n$ erfüllen,

$$x(t | \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j(t). \quad (2.56)$$

Die allgemeine Lösung einer homogenen linearen Differentialgleichung n -ter Ordnung läßt sich als Linearkombination von n linear unabhängigen Lösungsfunktionen darstellen. Für eine Differentialgleichung n -ter Ordnung existieren maximal n linear unabhängige Lösungsfunktionen. Es besteht ein eindeutiger Zusammenhang zwischen den α_j und den γ_j , z.B. $\alpha_j = \gamma_j$.

Die Lösung einer **inhomogenen linearen Differentialgleichung** besteht aus einer Superposition der **allgemeinen Lösung** $x(t | \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ der **homogenen** Differentialgleichung und einer **speziellen Lösung** $x_0(t)$ der **inhomogenen** Differentialgleichung,

$$\bar{x}(t | \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) = x(t | \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) + x_0(t). \quad (2.57)$$

2.3.3 Bewegung im homogenen Schwerfeld mit Reibung

Als erstes Anwendungsbeispiel für das Lösen von Differentialgleichungen betrachten wir den freien Fall unter dem Einfluss von Luftreibung. Wir setzen hierzu die geschwindigkeitsabhängige Reibungskraft (2.29) zusammen mit der Schwerkraft (2.23) in die dynamische Grundgleichung (2.51) ein,

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_s + \vec{F}_R = m \vec{g} - \alpha(|\dot{\vec{r}}|) \dot{\vec{r}} = m \ddot{\vec{r}} \\ \iff m \ddot{\vec{r}} + \alpha(|\dot{\vec{r}}|) \dot{\vec{r}} &= m \vec{g}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Hier haben wir $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ geschrieben, um die Abhängigkeit von den Zeitableitungen von \vec{r} deutlich zu machen. Offenbar handelt es sich um eine **inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung** für die Funktion $\vec{r}(t)$.

Für **Newtonsche Reibung**, $\alpha(|\dot{\vec{r}}|) = \beta |\dot{\vec{r}}|$, ist diese Differentialgleichung **nichtlinear**, denn es tritt eine **transzendente Funktion** der ersten Ableitung $\dot{\vec{r}}$ auf, $|\dot{\vec{r}}| \equiv \sqrt{\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}}$, die darüberhinaus noch mit $\dot{\vec{r}}$ multipliziert wird. Wir beschränken uns daher auf den Fall **Stokesscher Reibung**, $\alpha(|\dot{\vec{r}}|) = \alpha = \text{const.}$. In diesem Fall handelt es sich um eine **inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung** für die Funktion $\vec{r}(t)$,

$$m \ddot{\vec{r}} + \alpha \dot{\vec{r}} = m \vec{g}. \quad (2.59)$$

Die allgemeine Lösung setzt sich gemäß Gl. (2.57) aus der allgemeinen Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung und einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung zusammen.

Lösen wir also zunächst die homogene Differentialgleichung

$$m \ddot{x}_i + \alpha \dot{x}_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.60)$$

Offenbar ist die Lösung eine Funktion, für die bis auf das Vorzeichen und Vorfaktoren die zweite Ableitung nach der Zeit gleich der ersten Ableitung nach der Zeit ist. Eine Funktion, die sich beim Ableiten stets selbst reproduziert, ist bekannterweise die **Exponentialfunktion**. Wir machen daher den **Lösungsansatz**

$$x_i = e^{\gamma t} \implies \dot{x}_i = \gamma e^{\gamma t} \implies \ddot{x}_i = \gamma^2 e^{\gamma t}. \quad (2.61)$$

Einsetzen in Gl. (2.60) ergibt

$$m \gamma^2 e^{\gamma t} + \alpha \gamma e^{\gamma t} = (m \gamma + \alpha) \gamma e^{\gamma t} = 0 \implies \gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = -\frac{\alpha}{m}.$$

Die beiden (es gibt nur zwei!) **linear unabhängigen** Lösungen der homogenen Differentialgleichung (2.60) sind also

$$x_i^{(1)}(t) = 1, \quad x_i^{(2)}(t) = e^{-\alpha t/m}. \quad (2.62)$$

Die **allgemeine** Lösung der homogenen Differentialgleichung ist dann

$$x_i^{(a)}(t) = a_i^{(1)} + a_i^{(2)} e^{-\alpha t/m}, \quad (2.63)$$

mit beliebigen Koeffizienten $a_i^{(1)}, a_i^{(2)}$. Diese ist in Abb. 2.12 skizziert.

Nun müssen wir noch eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung konstruieren. Die Inhomogenität tritt aber nur in der x_3 -Komponente auf, da $\vec{g} = (0, 0, -g)^T$ ist,

$$m \ddot{x}_3 + \alpha \dot{x}_3 = -m g. \quad (2.64)$$

Wir erhalten eine spezielle Lösung aus folgender Überlegung. Die Schwerkraft erhöht die Geschwindigkeit des Körpers so lange, bis die damit ebenfalls anwachsende Reibungskraft der Schwerkraft das Gleichgewicht hält,

$$F_{R,3} + F_{s,3} = 0 \iff F_{R,3} = -\alpha \dot{x}_3^{(s)} = m g = -F_{s,3}. \quad (2.65)$$

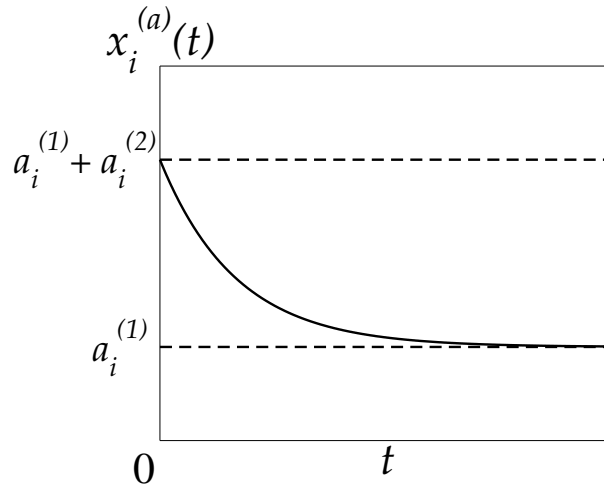


Abbildung 2.12: Die allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung (2.60).

Dann ist der Körper **kräftefrei**, $m \ddot{x}_3^{(s)} = 0$. Die Zeitableitung der speziellen Lösung ergibt sich aus der Bedingung (2.65) für das Kräftegleichgewicht,

$$\dot{x}_3^{(s)} = -\frac{m}{\alpha} g .$$

Dies ist die **Grenzgeschwindigkeit** eines Körpers für den freien Fall mit Luftreibung. Einmaliges Integrieren nach der Zeit von 0 bis t ergibt

$$x_3^{(s)}(t) = -\frac{m}{\alpha} g t . \quad (2.66)$$

Die Anfangsbedingung dieser speziellen Lösung können wir ohne weiteres zu $x_3^{(s)}(0) = 0$ wählen, denn wir werden die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ohnehin an die Anfangsbedingungen anpassen müssen. Dazu dienen die Parameter $a_i^{(1)}$ und $a_i^{(2)}$ der allgemeinen Lösung (2.63) der homogenen Differentialgleichung.

Gemäß Gl. (2.57) ergibt sich nun die **allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung** (2.59) aus der Addition von (2.63) und (2.66),

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a_1^{(1)} + a_1^{(2)} e^{-\alpha t/m} , \\ x_2(t) &= a_2^{(1)} + a_2^{(2)} e^{-\alpha t/m} , \\ x_3(t) &= a_3^{(1)} + a_3^{(2)} e^{-\alpha t/m} - \frac{m}{\alpha} g t . \end{aligned} \quad (2.67)$$

Für die Geschwindigkeiten gilt

$$\begin{aligned} v_1(t) = \dot{x}_1(t) &= -\frac{\alpha}{m} a_1^{(2)} e^{-\alpha t/m} , \\ v_2(t) = \dot{x}_2(t) &= -\frac{\alpha}{m} a_2^{(2)} e^{-\alpha t/m} , \\ v_3(t) = \dot{x}_3(t) &= -\frac{\alpha}{m} a_3^{(2)} e^{-\alpha t/m} - \frac{m}{\alpha} g . \end{aligned} \quad (2.68)$$

2 Mechanik des freien Massenpunktes

Diese zeigen das korrekte asymptotische Verhalten, nämlich $v_{1,2}(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) und $v_3(t) \rightarrow -mg/\alpha \equiv \dot{x}_3^{(s)}$ ($t \rightarrow \infty$), die oben diskutierte Grenzggeschwindigkeit für den freien Fall.

Wir passen nun die sechs Parameter $a_i^{(1)}, a_i^{(2)}, i = 1, 2, 3$, an die Anfangsbedingungen für ein spezielles Problem an, z.B. den freien Fall aus der Höhe h mit verschwindender Anfangsgeschwindigkeit, $\vec{r}(0) = (0, 0, h)^T$, $\vec{v}(0) = 0$. Eingesetzt in die Glgen. (2.67) und (2.68) ergibt dies

$$\begin{aligned} 0 &= a_1^{(1)} + a_1^{(2)}, & 0 &= -\frac{\alpha}{m} a_1^{(2)}, \\ 0 &= a_2^{(1)} + a_2^{(2)}, & 0 &= -\frac{\alpha}{m} a_2^{(2)}, \\ h &= a_3^{(1)} + a_3^{(2)}, & 0 &= -\frac{\alpha}{m} a_3^{(2)} - \frac{m}{\alpha} g. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$a_1^{(1)} = a_1^{(2)} = a_2^{(1)} = a_2^{(2)} = 0, \quad a_3^{(1)} = h + \frac{m^2}{\alpha^2} g, \quad a_3^{(2)} = -\frac{m^2}{\alpha^2} g.$$

Wir erhalten also die Lösung

23.12.2016

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 0, & v_1(t) &= 0, \\ x_2(t) &= 0, & v_2(t) &= 0, \\ x_3(t) &= h + \frac{m}{\alpha} g \left[\frac{m}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t/m}) - t \right], & v_3(t) &= \frac{m}{\alpha} g (e^{-\alpha t/m} - 1). \end{aligned}$$

Die z -Komponente der Geschwindigkeit ist in Abb. 2.13 als Funktion der Zeit dargestellt.

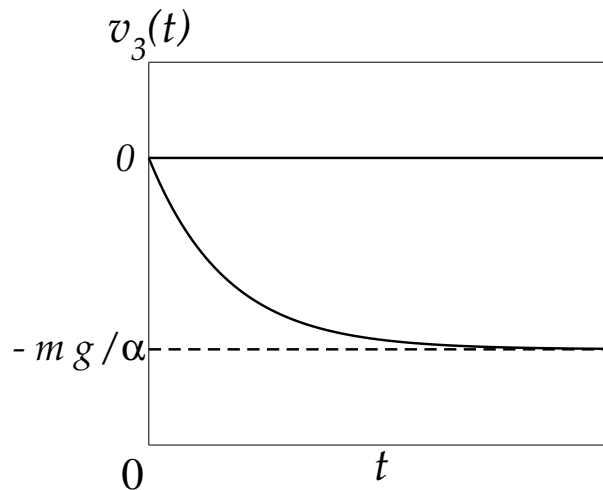


Abbildung 2.13: Die z -Komponente der Geschwindigkeit für den freien Fall.

Die Fallzeit t_F ergibt sich aus der Bedingung

$$x_3(t_F) = 0 = h + \frac{m}{\alpha} g \left[\frac{m}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t_F/m}) - t_F \right].$$

Dies ist eine transzendente Gleichung für t_F , die Lösung ist also nicht analytisch angebar.

2.3.4 Das Fadenpendel

Wir betrachten die Bewegung einer Masse m , welche an einem masselosen Faden der Länge ℓ befestigt ist, vgl. Abb. 2.14. Die Masse bewegt sich ganz offensichtlich auf einem Kreisbogen mit Radius ℓ . Es bietet sich daher an, für die Diskussion dieses Problems **ebene Polarkoordinaten** zu verwenden.

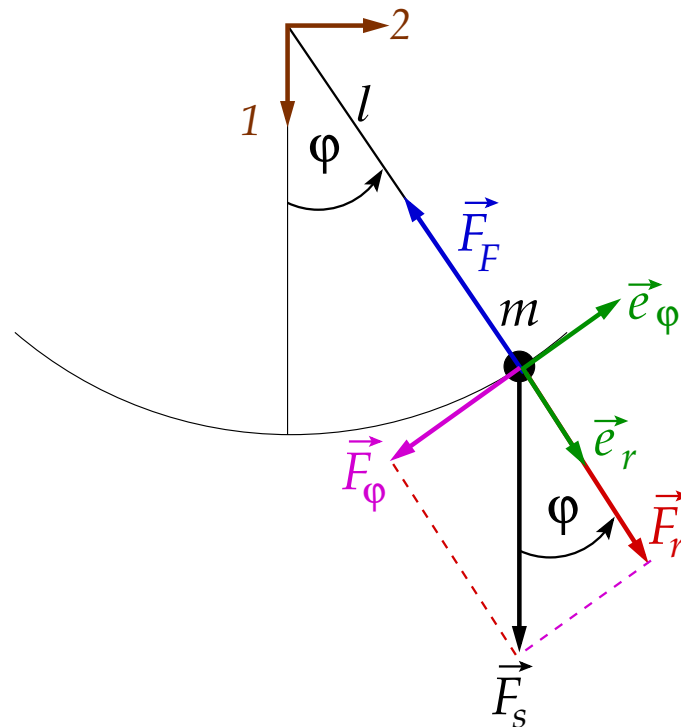


Abbildung 2.14: Das Fadenpendel.

Welche Kräfte wirken auf m ?

1. **Schwerkraft:**

$$\vec{F}_s = m \vec{g} = \vec{F}_r + \vec{F}_\varphi = F_r \vec{e}_r + F_\varphi \vec{e}_\varphi \quad (2.69)$$

Aus Abb. 2.14 ergibt sich

$$F_r = m g \cos \varphi, \quad F_\varphi = -m g \sin \varphi. \quad (2.70)$$

2. **Fadenspannung:** \vec{F}_F . Sie sorgt dafür, dass der Faden stets gespannt bleibt, aber nicht reißt. Dies **zwingt** die Masse m auf einen Kreisbogen mit konstantem Radius

$$r = \ell = \text{const.}, \quad \implies \dot{r} = \ddot{r} = 0. \quad (2.71)$$

Es handelt sich hierbei um eine **Zwangsbedingung**, die Fadenspannung ist eine sog. **Zwangskraft**.

Die dynamische Grundgleichung lautet in ebenen Polarkoordinaten

$$m \vec{r}'' = m [(\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \vec{e}_r + (r \ddot{\varphi} + 2\dot{r} \dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi] = \vec{F} = \vec{F}_s + \vec{F}_F = (F_r - F_F) \vec{e}_r + F_\varphi \vec{e}_\varphi . \quad (2.72)$$

In Komponenten und unter Ausnutzung der Zwangsbedingung (2.71) ergibt sich

$$\begin{aligned} -m \ell \dot{\varphi}^2 &= F_r - F_F = m g \cos \varphi - F_F , \\ m \ell \ddot{\varphi} &= F_\varphi = -m g \sin \varphi . \end{aligned} \quad (2.73)$$

Die erste dieser Gleichungen legt die Zwangskraft fest,

$$F_F = m g \cos \varphi + m \ell \dot{\varphi}^2 . \quad (2.74)$$

Hierbei ist der erste Term auf der rechten Seite die **radiale Komponente der Gewichtskraft** und der zweite die durch die Drehbewegung der Masse entstehende **Zentrifugalkraft**. Beide Kräfte werden von der Fadenspannung kompensiert, so dass die Länge ℓ des Fadens konstant bleibt, d.h. keine Bewegung in radialer Richtung stattfindet, $\dot{r} = 0$.

Die zu lösende Bewegungsgleichung ist die zweite Gl. (2.73),

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell} \sin \varphi = 0 . \quad (2.75)$$

Dies ist eine **nichtlineare** Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Funktion $\varphi(t)$, also den Winkel der Auslenkung aus der Ruhelage. Diese Differentialgleichung vereinfacht sich in der Näherung **kleiner Pendelausschläge**. Dann können wir nämlich $\sin \varphi$ durch den ersten Term seiner **Reihenentwicklung** ersetzen,

$$\sin \varphi = \varphi - \frac{1}{3!} \varphi^3 + \frac{1}{5!} \varphi^5 - \dots \simeq \varphi + O(\varphi^3) .$$

Mit der Definition

$$\omega^2 \equiv \frac{g}{\ell} \quad (2.76)$$

ergibt sich

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0 . \quad (2.77)$$

Dies ist eine **homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung**.

Wegen $\ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi$ muss $\varphi(t)$ eine Funktion sein, die sich bis auf das Vorzeichen und den Vorfaktor ω^2 bei zweimaligem Ableiten nach der Zeit selbst reproduziert. Es sind aber gerade die **trigonometrischen Funktionen**, die diese Eigenschaft besitzen. Wir machen daher den **Lösungsansatz**

$$\varphi_1(t) = \sin(\omega t) , \quad \varphi_2(t) = \cos(\omega t) . \quad (2.78)$$

Man bezeichnet die trigonometrischen Funktionen auch als **harmonische Funktionen** und diesen Lösungsansatz als **harmonische Schwingung**. Die Näherung kleiner Pendelausschläge nennt sich auch **harmonische Näherung**. In der Tat löst der Ansatz (2.78) die Differentialgleichung (2.77),

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= \omega \cos(\omega t) , & \dot{\varphi}_2 &= -\omega \sin(\omega t) , \\ \ddot{\varphi}_1 &= -\omega^2 \sin(\omega t) = -\omega^2 \varphi_1 , & \ddot{\varphi}_2 &= -\omega^2 \cos(\omega t) = -\omega^2 \varphi_2 . \end{aligned}$$

Ferner sind $\sin(\omega t)$ und $\cos(\omega t)$ **linear unabhängige** Lösungen (man kann nicht die eine Funktion als Linearkombination der anderen ausdrücken). Daher lautet die **allgemeine Lösung** der Differentialgleichung (2.77)

$$\varphi(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t), \quad (2.79)$$

mit Konstanten A, B , die durch die Anfangsbedingung für $\varphi(t)$ und $\dot{\varphi}(t)$ festgelegt werden, also durch $\varphi(0)$ und $\dot{\varphi}(0)$:

$$\varphi(0) = B, \quad \dot{\varphi}(0) = A\omega \iff A = \frac{\dot{\varphi}(0)}{\omega}. \quad (2.80)$$

Die **Schwingungsdauer** T errechnet sich aus der Bedingung $\omega T = 2\pi$, d.h. wenn $\sin(\omega t)$ und $\cos(\omega t)$ eine volle **Periode** durchlaufen haben,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}. \quad (2.81)$$

Dies ist die Zeit, die vergeht, wenn das Pendel einmal hin, zurück, durch die Nullage, in die entgegengesetzte Richtung und wieder zurück geschwungen ist. Die **Schwingungsfrequenz** ist das Inverse der Schwingungsdauer,

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\ell}}. \quad (2.82)$$

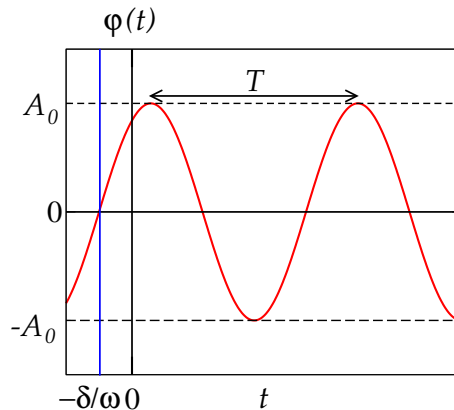


Abbildung 2.15: Die phasenverschobene harmonische Schwingung.

Mit den Definitionen

$$A_0 \equiv \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \cos \delta \equiv \frac{A}{A_0}, \quad \sin \delta = \sqrt{1 - \cos^2 \delta} = \frac{\sqrt{A_0^2 - A^2}}{A_0} = \frac{B}{A_0}$$

können wir eine **alternative Form** der allgemeinen Lösung angeben,

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= A_0 [\cos \delta \sin(\omega t) + \sin \delta \cos(\omega t)] \\ &= A_0 \sin(\omega t + \delta). \end{aligned} \quad (2.83)$$

Die Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen ist eine harmonische Schwingung mit **derselben** Schwingungsfrequenz, aber mit einer **Phasenverschiebung** δ , vgl. Abb. [2.15](#).

2.3.5 Komplexe Zahlen

Bewegungsgleichungen, die harmonische Schwingungen beschreiben, lassen sich sehr einfach mit Hilfe von **komplexen Zahlen** lösen. Dazu führen wir zunächst das Konzept der sog. **imaginären Zahlen** ein.

Imaginäre Zahlen

Quadratische Gleichungen vom Typ $x^2 - \beta^2 = 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, lassen sich sehr einfach lösen: $x = \pm\beta$. Was aber passiert, wenn man das Vorzeichen von β^2 umdreht? Wie kann man eine Gleichung vom Typ $x^2 + \beta^2 = 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ lösen? Es gibt sicherlich keine Lösung im Raum der reellen Zahlen, da man die Wurzel aus einer negativen Zahl ziehen müsste, $x^2 = -\beta^2 < 0$. Man kann sie aber dennoch lösen, wenn man den reellen Zahlenraum zum **Raum der komplexen Zahlen** erweitert.

Definition: Eine Zahl α heißt **imaginäre Zahl**, falls $\alpha^2 < 0$.

Definition: Die **Einheit** i der imaginären Zahlen erfüllt die Gleichung $i^2 = -1$, d.h.

$$i = \sqrt{-1} . \quad (2.84)$$

Diese Gleichung ist symbolisch zu verstehen, denn eigentlich kann man keine Wurzel aus einer negativen Zahl ziehen.

Mit Hilfe der Einheit der imaginären Zahlen läßt sich **jede** imaginäre Zahl wie folgt schreiben:

$$\alpha = i y , \quad y \in \mathbb{R} .$$

Beispiel: $\alpha^2 = -4 = i^2 \cdot 4 \implies \alpha = \pm\sqrt{-4} = \pm i \cdot 2$, d.h. $y = \pm 2$.

Bemerkung:

$$i^3 = i \cdot i^2 = -i , \quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)^2 = 1 . \quad (2.85)$$

Komplexe Zahlen

Definition: Eine **komplexe Zahl** z ist die Summe aus einer reellen Zahl und einer imaginären Zahl,

$$z = x + i y , \quad x, y \in \mathbb{R} . \quad (2.86)$$

Man bezeichnet x als den **Realteil** von z und y als den **Imaginärteil** von z ,

$$x = \operatorname{Re} z , \quad y = \operatorname{Im} z . \quad (2.87)$$

Für die Zahl $z = 0$ verschwindet sowohl der Realteil wie auch der Imaginärteil,

$$z = 0 \iff x = 0 \wedge y = 0 .$$

Definition: Die zu z **komplex konjugierte Zahl** ist

$$z^* = x - i y . \quad (2.88)$$

Offenbar gilt

$$\operatorname{Re} z = x = \frac{1}{2}(z + z^*), \quad \operatorname{Im} z = y = \frac{1}{2i}(z - z^*). \quad (2.89)$$

Definition: Der **Absolutbetrag** einer komplexen Zahl ist

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}. \quad (2.90)$$

Wir bezeichnen die **Menge der komplexen Zahlen** mit \mathbb{C} . Die Menge der reellen (imaginären) Zahlen bilden eine Untermenge der komplexen Zahlen, nämlich die mit verschwindendem Imaginärteil (Realteil),

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\subset \mathbb{C}, & \mathbb{R} &= \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z = 0\}, \\ \mathbb{I} &\subset \mathbb{C}, & \mathbb{I} &= \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z = 0\}, \end{aligned}$$

Rechenregeln

Seien $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ komplexe Zahlen.

1. Addition:

$$z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2).$$

2. Multiplikation:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i x_2 y_1 + i^2 y_1 y_2 \\ &= x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned}$$

Das Produkt verschwindet, wenn eine der beiden komplexen Zahlen null ist,

$$z_1 z_2 = 0 \iff z_1 = 0 \vee z_2 = 0.$$

Spezialfall:

$$z z^* = x^2 + y^2 + i(-xy + xy) = x^2 + y^2 \implies |z| = \sqrt{z z^*}.$$

3. Division: $\forall z_2 \neq 0$ gilt

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{-x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Beispiel:

$$\frac{1}{i} = \frac{-i}{i(-i)} = \frac{-i}{-i^2} = -i.$$

Komplexe Zahlenebene

Man kann Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl als Komponenten eines **zweidimensionalen Vektors** auffassen,

$$z = x + i y = (x, y) .$$

Die Basisvektoren sind

$$1 = (1, 0) , \quad i = (0, 1) .$$

Diese spannen die sog. **komplexe Zahlenebene** auf, vgl. Abb. [2.16](#).

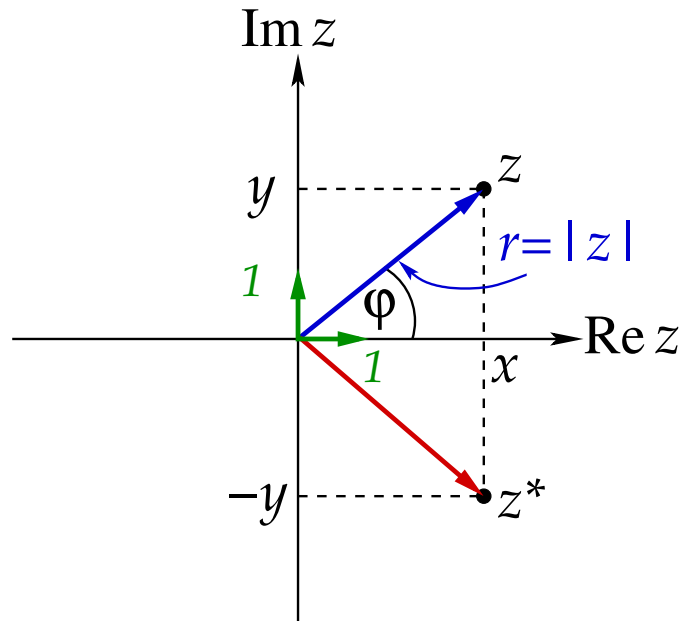


Abbildung 2.16: Die Darstellung einer komplexen Zahl in der komplexen Zahlenebene.

Der Basisvektor $(1, 0)$ zeigt in Richtung der **reellen Achse**, der Basisvektor $(0, 1)$ in Richtung der **imaginären Achse**. Die komplex konjugierte Zahl z^* ergibt sich aus z durch **Spiegelung** an der reellen Achse.

Aus der Darstellung von komplexen Zahlen in der komplexen Ebene ergibt sich auch deren **Polardarstellung**:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi , & \implies & & r &= |z| = \sqrt{x^2 + y^2} , \\ y &= r \sin \varphi , & & & \varphi &= \arg(z) = \arctan \frac{y}{x} . \end{aligned} \quad (2.91)$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} z &= r (\cos \varphi + i \sin \varphi) , \\ z^* &= r (\cos \varphi - i \sin \varphi) . \end{aligned} \quad (2.92)$$

Es sei noch auf eine Zweideutigkeit in der Polardarstellung ([2.91](#)) hingewiesen. Wir erhalten zwar stets $\tan \varphi$ durch Division von y durch x , aber es erhebt sich die Frage, welchem

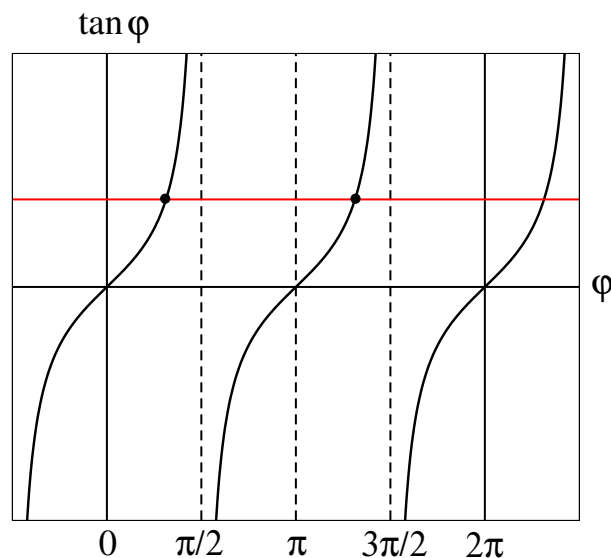


Abbildung 2.17: Der Tangens.

Wert von φ dies entspricht. Für $\tan \varphi = y/x \in (-\infty, \infty)$ gibt es stets **zwei** Werte von $\varphi \in [0, 2\pi]$, vgl. Abb. [2.17](#).

Dies liegt daran, dass $\tan \varphi = y/x = (-y)/(-x)$, so dass neben φ auch $\varphi + \pi$ den gleichen Wert für $\tan \varphi$ liefert. Die Lösung besteht darin, den Wert für φ zu wählen, der in Gl. [\(2.92\)](#) eingesetzt die richtigen Werte für x und y liefert.

Exponentialdarstellung von komplexen Zahlen

Die **Reihenentwicklung der Exponentialfunktion** lautet

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (2.93)$$

Die **Reihenentwicklungen der trigonometrischen Funktionen** lauten

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad (2.94)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \quad (2.95)$$

Daraus leitet man die **Eulersche Formel** ab:

$$\begin{aligned}
 e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{x^n}{n!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} i^{2n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
 &= \cos x + i \sin x .
 \end{aligned} \tag{2.96}$$

Offenbar gilt

$$\operatorname{Re} e^{ix} = \cos x , \quad \operatorname{Im} e^{ix} = \sin x , \quad |e^{ix}| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1 . \tag{2.97}$$

Spezielle Werte: $e^{i\pi/2} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{3i\pi/2} = -i$.

Aufgrund von Gl. (2.92) und der Eulerschen Formel (2.96) kann man komplexe Zahlen auch als

$$z = r e^{i\varphi} = |z| e^{i\varphi} \tag{2.98}$$

darstellen. Dies ist die sog. **Exponentialdarstellung** einer komplexen Zahl z . Man bezeichnet $\varphi = \arg(z)$ auch als **Phase** einer komplexen Zahl und $e^{i\varphi}$ als **komplexen Phasenfaktor**. Wegen $\cos(-\varphi) = \cos \varphi$ und $\sin(-\varphi) = -\sin \varphi$ gilt

$$z^* = |z| e^{-i\varphi} , \tag{2.99}$$

vgl. Gl. (2.92).

Die **Umkehrformeln** zur Eulerschen Formel lauten mit den Gln. (2.89) und (2.97)

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) , \quad \sin \varphi = \frac{1}{2i} (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) , \tag{2.100}$$

Die **Periodizität** der trigonometrischen Funktionen überträgt sich aufgrund der Eulerschen Formel auch auf den komplexen Phasenfaktor:

$$e^{2\pi ni} = \cos(2\pi n) + i \sin(2\pi n) = 1 + i \cdot 0 = 1 , \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{2.101}$$

Daraus folgt, dass komplexe Zahlen **periodisch** in φ sind mit der Periode 2π ,

$$z = |z| e^{i\varphi} = |z| e^{i\varphi} e^{2\pi ni} = |z| e^{i(\varphi+2\pi n)} . \tag{2.102}$$

Rechenregeln für die Exponentialdarstellung

1. Multiplikation:

$$z \equiv z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \equiv |z| e^{i\varphi} \implies |z| = |z_1| |z_2| , \quad \varphi = \arg(z) = \varphi_1 + \varphi_2 .$$

2. **Division:**

$$z \equiv \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \equiv |z| e^{i\varphi} \implies |z| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2.$$

3. **Potenzieren:**

$$z \equiv z_1^n = |z_1|^n e^{in\varphi_1} \equiv |z| e^{i\varphi} \implies |z| = |z_1|^n, \quad \varphi = n\varphi_1.$$

4. **Radizieren (“Wurzelziehen”):**

$$z \equiv \sqrt[n]{z_1} = |z_1|^{1/n} e^{i\varphi_1/n} \equiv |z| e^{i\varphi} \implies |z| = |z_1|^{1/n}, \quad \varphi = \varphi_1/n.$$

5. **Komplexer Logarithmus:**

$$\ln z = \ln [|z| e^{i(\varphi + 2\pi n)}] = \ln |z| + \ln e^{i(\varphi + 2\pi n)} = \ln |z| + i(\varphi + 2\pi n).$$

Für $n = 0$ erhalten wir den sog. **Hauptwert**, für $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ die sog. **Nebenwerte**.

Beispiel: Mit $e^{i\pi} = -1$ ist $z = -5 = 5 e^{i\pi}$, also $\ln(-5) = \ln 5 + i(2n + 1)\pi$.

2.3.6 Der lineare harmonische Oszillator

9.1.2017

Der lineare harmonische Oszillator ist das wichtigste Modellsystem der Theoretischen Physik. Er wird uns immer wieder begegnen. Seine angenehmste Eigenschaft ist, dass seine Bewegungsgleichung **exakt lösbar** ist. Diese lautet

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (2.103)$$

Hierbei ist ω_0 die sog. **Eigenfrequenz** des Oszillators.

Im folgenden sind drei Beispiele genannt, deren Bewegungsgleichung der des linearen harmonischen Oszillators entsprechen.

1. Die Bewegungsgleichung für das **Fadenpendel** in der **Näherung kleiner Ausschläge** $\varphi \equiv x$. Die Eigenfrequenz ist $\omega_0 = \sqrt{g/l}$.
2. Eine Masse zwischen zwei Federn mit Federkonstanten $k/2$, vgl. Abb. [2.18](#).

Die **Rückstellkraft** der beiden Federn ist jeweils durch das sog. **Hookesche Gesetz** gegeben,

$$F_H = -\frac{k}{2} x. \quad (2.104)$$

Es besagt, dass die Feder bei einer Auslenkung x der Masse m eine Kraft ausübt, die dem Betrag $|x|$ der Auslenkung proportional und ihr entgegengesetzt ist. Betrachten wir dies einmal im Detail: für positive Auslenkungen $x > 0$ der Masse m wird die rechte Feder **komprimiert** und versucht, die Masse wieder in die Ausgangslage, $x = 0$, zu **drücken**. Dies erklärt das negative Vorzeichen von F_R . Für $x > 0$ wird außerdem die linke Feder **gedehnt** und versucht daher, die Masse wieder in die