12.12.2016

2 Mechanik des freien Massenpunktes

Wir kommen nun zum ersten wichtigen Thema der klassischen Mechanik: der Beschreibung der **Bewegung von Massenpunkten**. Ein **Massenpunkt** ist hierbei ein **physikalischer Körper** der **Masse** $\boldsymbol{m}$ mit **vernachlässigbarer Ausdehnung**. "Vernachlässigbare Ausdehnung" bedeutet, dass sie für das betrachtete Problem **irrelevant** ist.

Beispiel: Die Ausdehnung der Erde bezüglich der Bahnbewegung der Erde um die Sonne. Der Erdradius ist im Mittel $R_{\mathrm{Erde}} \simeq 6.371$ km, während der mittlere Abstand der Erde von der Sonne $d_{\mathrm{AE}} \simeq 149.597.870$ km $\equiv 1$ AE (Astronomische Einheit) beträgt. Es gilt also $R_{\mathrm{Erde}}/d_{\mathrm{AE}} \simeq 4,26 \cdot 10^{-5}$, d.h. $R_{\mathrm{Erde}} \ll d_{\mathrm{AE}}$. Dieses Beispiel macht deutlich, dass man sich bei einem gegebenen physikalischen Problem zunächst Klarheit über die Größen- bzw. Skalenverhältnisse verschaffen muss, damit man physikalische Körper als Massenpunkte behandeln kann.

Die **freie Bewegung** von Massenpunkten bedeutet eine Bewegung **ohne Zwangsbedingungen**. Bewegungen, die Zwangsbedingungen unterliegen, werden wir im zweiten Teil der Vorlesung (Mechanik II: Analytische Mechanik) ausführlich behandeln.

2.1 Kinematik

2.1.1 Das Grundproblem der Kinematik

Die **Kinematik** besteht aus der Beschreibung der Bahnbewegung, **ohne** nach den Ursachen für diese Bewegung zu fragen. Die **typische Aufgabenstellung** in der Kinematik ist die folgende: gegeben sei die **Beschleunigung** $\vec{a}(t)$ eines Massenpunktes. Zu bestimmen ist die daraus resultierende **Raumkurve** $\vec{r}(t)$. Da die Beschleunigung die zweite Ableitung von $\vec{r}(t)$ nach der Zeit ist, $\vec{a}(t) \equiv \ddot{\vec{r}}(t)$, besteht die Lösung des Problems im zweifachen Integrieren nach der Zeit:

$$\Longrightarrow \quad \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \, \vec{a}(t') \,, \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \vec{r}(t) &= \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \, \vec{v}(t') \\
&= \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \left[\vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t'} \mathrm{d}t'' \, \vec{a}(t'') \right] \\
&= \vec{r}(t_0) + \vec{v}(t_0)\,(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' \int_{t_0}^{t'} \mathrm{d}t'' \, \vec{a}(t'') \,.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Hierbei treten zwei **Integrationskonstanten** auf, die Geschwindigkeit $\vec{v}(t_0)$ und der Ort $\vec{r}(t_0)$ zum Anfangszeitpunkt t_0 der Integration. Eine eindeutige Lösung des kinematischen Problems erfordert die Kenntnis dieser beiden Integrationskonstanten. Im folgenden Abschnitt werden wir die allgemeine Lösung für einfache Bewegungsformen konstruieren, die aus einer speziellen Wahl für die Beschleunigung resultieren.

2.1.2 Einfache Bewegungsformen

1. **Geradlinig gleichförmige Bewegung:**
   In diesem Fall ist die Beschleunigung für alle Zeiten null, $\vec{a}(t) = 0 \quad \forall\ t$ und die Geschwindigkeit ist für alle Zeiten konstant, $\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) = \vec{v}_0 \quad \forall\ t$. Gemäß Gl. (2.2) erhalten wir:
$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}_0\,(t - t_0)\ . \tag{2.3}$$
   Diese Bewegungsform ist in Abb. 2.1 graphisch veranschaulicht.

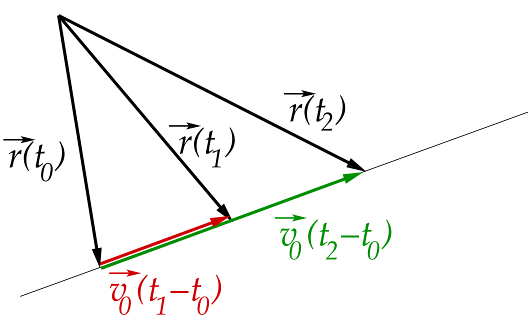

Abbildung 2.1: Die geradlinig gleichförmige Bewegung.

   Geradlinig bedeutet, dass die Bewegung zu allen Zeiten auf einer Geraden stattfindet, die **Bewegungsrichtung** $\sim \hat{v}_0$ also konstant bleibt. **Gleichförmig** bedeutet, dass in gleichen Zeitintervallen gleiche Wegstrecken zurückgelegt werden.

2. **Geradlinig gleichmäßig beschleunigte Bewegung:**
   In diesem Fall ist die Beschleunigung für alle Zeiten konstant, $\vec{a}(t) = \vec{a}_0 = \overrightarrow{const}.$ und entweder ist $\vec{v}(t_0) = 0$ oder $\hat{v}(t_0) = \hat{a}_0$. Wir betrachten zunächst $\vec{v}(t_0) = 0$; der Fall $\hat{v}(t_0) = \hat{a}_0$ wird bei der nächsten Bewegungsform diskutiert. Gemäß Glgen. (2.1), (2.2) erhalten wir:
$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \vec{a}_0\,(t - t_0)\ , && (2.4)\\ \vec{r}(t) &= \vec{r}(t_0) + \vec{a}_0 \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t'(t' - t_0) \\ &= \vec{r}(t_0) + \vec{a}_0 \int_0^{t-t_0} \mathrm{d}z\, z \\ &= \vec{r}(t_0) + \frac{1}{2}\,\vec{a}_0\,(t - t_0)^2\ , && (2.5) \end{aligned}$$
   wobei wir $z \equiv t' - t_0$ als Integrationsvariable substituiert haben.

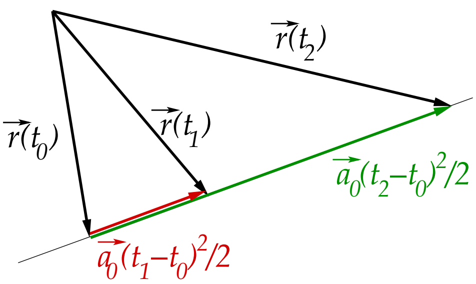

Abbildung 2.2: Die geradlinig gleichmäßig beschleunigte Bewegung.

Diese Bewegungsform ist in Abb. 2.2 graphisch veranschaulicht.

Die Bewegung ist **geradlinig**, da sie auf einer Geraden stattfindet, die parallel zu $\vec{a}_0$ ausgerichtet ist, die Bewegungsrichtung bleibt also konstant $\sim \hat{a}_0$. **Gleichmäßig** bedeutet, dass die Beschleunigung dem Betrag nach konstant ist.

3. **Gleichmäßig beschleunigte Bewegung:**
   Für diese Bewegungsform ist die Beschleunigung ebenfalls konstant, $\vec{a}(t) = \vec{a}_0 = \overrightarrow{const}.$, aber jetzt ist i.a. $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0 \neq 0$ und $\hat{v}_0 \neq \hat{a}_0$. Aus den Glgen. (2.1), (2.2) folgt:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}_0\,(t-t_0)\,, \tag{2.6}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{v}_0\,(t-t_0) + \frac{1}{2}\,\vec{a}_0\,(t-t_0)^2\,. \tag{2.7}$$

Ganz offensichtlich resultiert die Trajektorie aus der **Überlagerung** der beiden vorangegangenen Bewegungsformen der geradlinig gleichförmigen, Gl. (2.3), in Richtung der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0$ und der geradlinig gleichmäßig beschleunigten, Gl. (2.5), in Richtung der Beschleunigung $\vec{a}_0$, vgl. Abb. 2.3.

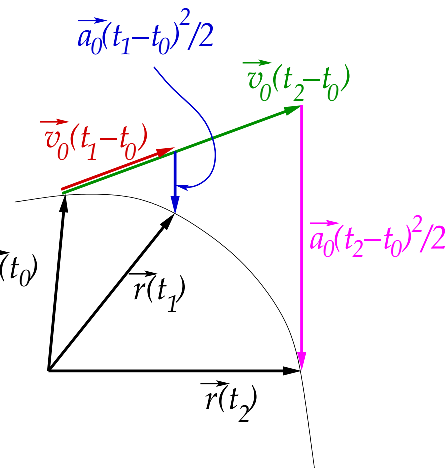

Abbildung 2.3: Die gleichmäßig beschleunigte Bewegung.

Die Trajektorie ist für $\hat{v}_0 \neq \hat{a}_0$ gekrümmt. Für $\hat{v}_0 \to \hat{a}_0$ geht diese Krümmung jedoch gegen null und wir erhalten eine geradlinig gleichmäßig beschleunigte Bewegung, der eine geradlinig gleichförmige Bewegung (in der gleichen Richtung) überlagert ist.

4. **Kreisbewegung:**
Zur Beschreibung dieser Bewegungsform bieten sich ebene Polarkoordinaten an. Wir nehmen an, dass der Radius des Kreises konstant bleibt, $r = const.$, also $\dot{r} = 0$. Dann folgt aus den Glgen. (1.164), (1.165) und (1.166):

$$\vec{r}(t) = r\,\vec{e}_r(t)\;, \tag{2.8}$$
$$\vec{v}(t) = r\,\dot{\varphi}(t)\,\vec{e}_\varphi(t)\;, \tag{2.9}$$
$$\vec{a}(t) = -r\,\dot{\varphi}^2(t)\,\vec{e}_r(t) + r\,\ddot{\varphi}(t)\,\vec{e}_\varphi(t)\;. \tag{2.10}$$

Hier haben wir die Zeitabhängigkeiten explizit ausgeschrieben. Die Zeitableitung des Polarwinkels bezeichnet man als **Winkelgeschwindigkeit**,

$$\omega(t) \equiv \dot{\varphi}(t)\;. \tag{2.11}$$

Damit gilt für den **Betrag** der Geschwindigkeit:

$$v(t) = r\,\omega(t)\;. \tag{2.12}$$

Die Radialkomponente der Beschleunigung ist identisch mit der im Zusammenhang mit den natürlichen Koordinaten eingeführten **Zentripetalbeschleunigung**,

$$a_r(t) = -r\,\omega^2(t)\;. \tag{2.13}$$

Das negative Vorzeichen besagt, dass sie zum Ursprung, also dem Kreismittelpunkt, zeigt. Die Polarkomponente der Beschleunigung ist die sog. **Tangentialbeschleunigung**,

$$a_\varphi(t) = r\,\dot{\omega}(t)\;. \tag{2.14}$$

Der Spezialfall der **gleichförmigen Kreisbewegung** ergibt sich für eine **konstante Winkelgeschwindigkeit**, $\omega = const.$, für den $a_\varphi = 0$, $a_r = -r\,\omega^2 = const.$ und $v = \omega\, r = const.$ folgt.

Man kann der Winkelgeschwindigkeit einen Vektor zuordnen, dessen Richtung die **Drehrichtung** charakterisiert. Dies muss dann ein **axialer Vektor** sein. Die Zuordnung ist so definiert, dass der Vektor in Richtung der $z-$Achse zeigt, $\vec{\omega}(t) = \omega(t)\,\vec{e}_z$, wenn die Drehung im mathematisch positiven Sinn (Gegenuhrzeigersinn) verläuft. Es gilt

$$\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t)\;, \tag{2.15}$$

vgl. Abb. 2.4.

Wir überprüfen, dass diese Gleichung korrekt ist:

$$\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{r}(t) = \omega(t)\,r\,\vec{e}_z \times \vec{e}_r(t) = \omega(t)\,r\,\vec{e}_\varphi(t)\;,$$

wobei wir $\vec{e}_z \times \vec{e}_r(t) = \vec{e}_\varphi(t)$ benutzt haben, was aus Abb. 2.4 folgt. Die rechte Seite dieser Gleichung ist aber unter Benutzung von Gl. (2.12) identisch mit Gl. (2.9), woraus die Richtigkeit von Gl. (2.15) und damit die der Zuordnung der Richtung von $\vec{\omega}(t)$ folgt.

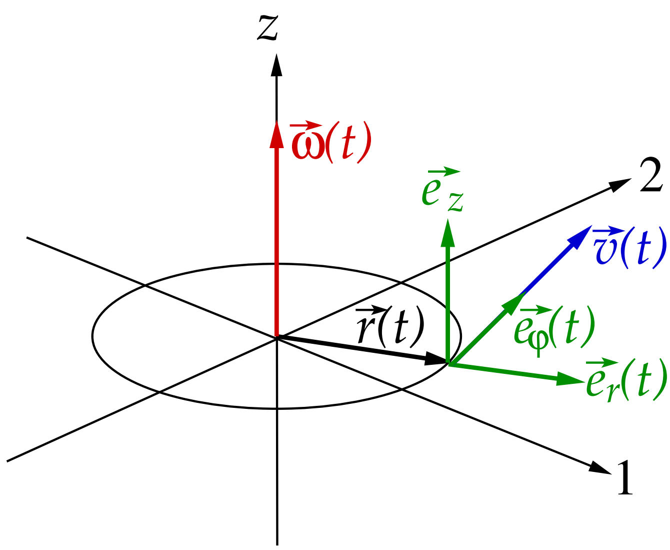

Abbildung 2.4: Zur Definition der Richtung von $\vec{\omega}(t)$.

2.2 Grundgesetze der Dynamik

Die **Dynamik** fragt im Gegensatz zur Kinematik nach der **Ursache** für eine Bewegung. Bei bekannter Ursache soll dann die Bahnkurve des Körpers berechnet werden.

Bevor wir mit der Diskussion der Grundgesetze der Dynamik beginnen, verschaffen wir uns kurz Klarheit über die **Struktur einer physikalischen Theorie**. In jeder Theorie gibt es **Definitionen**, die sich in **Basisdefinitionen** und **Folgedefinitionen** unterteilen. **Basisdefinitionen** beziehen sich auf Begriffe, die keiner weiteren Erläuterung bedürfen, z.B. der physikalische Ort eines Massenpunktes, beschrieben durch den Ortsvektor $\vec{r}(t)$. **Folgedefinitionen** beziehen sich auf Begriffe, die aus Basisdefinitionen abgeleitet werden, z.B. die Geschwindigkeit eines Massenpunktes, die sich aus der Zeitableitung des Ortsvektors ergibt, $\vec{v}(t) \equiv \dot{\vec{r}}(t)$.

In ähnlicher Weise unterteilt man die **Sätze** einer physikalischen Theorie. Es gibt **Axiome** bzw. **Prinzipien** oder **Postulate**, die die Theorie begründen und an deren Anfang stehen. Diese sind mathematisch unbeweisbar. Für die Klassische Mechanik sind dies die **Newtonschen Axiome**, die wir im nächsten Abschnitt vorstellen werden. Aus den Axiomen leiten sich **Theoreme** ab, d.h. sie sind unter Zuhilfenahme der Axiome, also im Rahmen der Klassischen Mechanik der Newtonschen Axiome, mathematisch beweisbar.

In der Physik entscheidet die Übereinstimmung mit der Naturbeobachtung über die Richtigkeit einer bestimmten Theorie. Die Klassische Mechanik hat sich für alle Naturphänomene auf der Größenskala der alltäglichen Erfahrung und z.T. auch darüberhinaus auf größeren Skalen in diesem Sinne als richtig erwiesen. Dies begründet ihre zentrale Rolle im Kanon der Grundvorlesungen der Theoretischen Physik.

2.2.1 Die Newtonschen Axiome

Die Newtonschen Axiome erfordern die Einführung der Begriffe **Kraft** und **träger Masse**, also zweier **Basisdefinitionen**.

1. **Kraft:** Die Kraft entspricht der Anstrengung, die nötig ist, um den **Bewegungszustand** eines Körpers zu **ändern**. Da die Bewegung eines Körpers üblicherweise in einer bestimmten Richtung erfolgt, und damit die **Änderung** eines Bewegungszustands ebenfalls in einer gewissen **Richtung** stattfinden muss, ist die Kraft eine **vektorielle Größe**, $\vec{F}$. Die **Einheit** der Kraft ist **Newton**, $[\vec{F}] = \mathrm{N}$.

   Dass die Kraft mit der **Änderung** eines Bewegungszustands einhergeht, ist beileibe nicht so selbstverständlich wie es klingt. Newtons Zeitgenossen waren nämlich der Auffassung, dass die Kraft die **Ursache** für die Bewegung von Körpern ist. Damit müßte selbst ein gleichförmig bewegter Körper ständig einer Kraft ausgesetzt sein, um seinen Bewegungszustand zu erhalten. Umgekehrt würde ein bewegter Körper, auf den keine Kraft ausgeübt wird, irgendwann zur Ruhe kommen. Dies entsprach der gängigen Meinung von Newtons Zeitgenossen, weil sie offenbar mit Beobachtungstatsachen zu begründen ist, z.B. dass eine Kutsche von Pferden gezogen werden muss, um eine konstante Reisegeschwindigkeit zu halten und irgendwann zum Stillstand kommt, wenn sie nicht mehr gezogen wird. Dies ist natürlich ein **Trugschluss**, denn die Kutsche hört aufgrund von **Reibungskräften** auf zu rollen und muss gezogen werden, um diese Reibungskräfte auszugleichen. In der Tat ist es gerade die **Einwirkung** der **Reibungskräfte**, die den Bewegungszustand einer rollenden, nicht von Pferden gezogenen Kutsche **ändert**, ganz im Sinne der obigen Definition der Kraft.

2. **Träge Masse:** Die träge Masse ist der **Widerstand** eines Körpers gegen **Änderungen** seines Bewegungszustands. Da dieser Widerstand i.a. unabhängig von der Richtung der Änderung des Bewegungszustands ist, ist die träge Masse eine **skalare Größe**, m_t. Sie ist **reell** und **positiv definit**, $m_t \in \mathbb{R}$, $m_t > 0$. Die **Einheit** der Masse ist **Kilogramm**, $[m_t] = \mathrm{kg}$.

   Offenbar müssen wir für verschiedene Körper unterschiedliche Kraftanstrengungen aufbringen, um sie in einen Zustand der Bewegung zu versetzen, selbst wenn sie die gleiche Größe, d.h. das gleiche Volumen, besitzen, z.B. ein Stück Eisen im Vergleich zu einem Stück Holz gleicher Größe. Diese Körper unterscheiden sich in ihrer trägen Masse, die träge Masse ist also eine **Materialeigenschaft**.

Aus diesen Basisdefinitionen leiten sich folgende **Folgedefinitionen** ab:

1. **Kräftefreier Körper:** Ein kräftefreier Körper ist ein Körper, auf den **keine äußeren Kräfte wirken**.

   Dies ist im Grunde eine Modellvorstellung, die niemals exakt zu realisieren ist, da man einen solchen Körper vollständig von seiner Umgebung und deren Einflüssen isolieren müßte. Nach gegenwärtigem Kenntnisstand der Naturkräfte ist dies nicht möglich.

2. **Inertialsystem:** Ein Inertialsystem ist ein **Koordinatensystem**, in dem ein kräftefreier Körper im Zustand der **Ruhe** oder der **geradlinig gleichförmigen** Bewegung verharrt.

   Dies bedeutet, dass der Körper **nicht beschleunigt** wird, $\vec{a}(t) = 0 \;\; \forall\, t$.

3. **Impuls:** Der Impuls ist das Produkt aus träger Masse und Geschwindigkeit eines Körpers,

$$\vec{p} = m_t\, \vec{v}\ . \tag{2.16}$$

   Wie die Geschwindigkeit ist er eine vektorielle Größe. Als Produkt einer Basisgröße (m_t) und einer abgeleiteten Größe ($\vec{v} = \dot{\vec{r}}$) ist er ebenfalls eine abgeleitete Größe. Dadurch dass der Impuls sowohl zur Geschwindigkeit wie auch zur trägen Masse eines Körpers proportional ist, charakterisiert er einerseits dessen Bewegungszustand und andererseits auch dessen Widerstand gegen Änderungen dieses Bewegungszustandes.

Nach diesen Definitionen sind wir nun in der Lage, die **Newtonschen Axiome** anzugeben:

1. Newtonsches Axiom (Galileisches Trägheitsgesetz):

Jeder Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, wenn er nicht durch äußere Kräfte gezwungen wird, seinen Bewegungszustand zu ändern.

Unter Zuhilfenahme des Begriffs des kräftefreien Körpers läßt sich das 1. Newtonsche Axiom auch als **Definition des Inertialsystems** verstehen, s. oben.

2. Newtonsches Axiom (Bewegungsgesetz):

In einem Inertialsystem ist die Änderung des Impulses gleich der Kraft, die diese Änderung hervorruft,

$$\boldsymbol{\vec{F} = \dot{\vec{p}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_t\, \vec{v}\right)}\ . \tag{2.17}$$

Bemerkungen:

(i) Aus der Produktregel folgt

$$\vec{F} = \dot{m}_t\, \vec{v} + m_t\, \dot{\vec{v}} = \dot{m}_t\, \vec{v} + m_t\, \vec{a}\ . \tag{2.18}$$

Falls $m_t = const.$, so ist $\dot{m}_t = 0$ und

$$\vec{F} = m_t\, \vec{a}\ . \tag{2.19}$$

Dies ist die **dynamische Grundgleichung der klassischen Mechanik**. Es ist aber stets zu bedenken, dass sie **ausschließlich** für Körper gilt, deren träge Masse **zeitlich konstant** ist.

Bei näherer Betrachtung ist dies für **alle** Fortbewegungsmittel, die Treibstoff verbrauchen, den sie selbst mitführen, wie z.B. Autos, Flugzeuge, Raketen etc. **nicht** der Fall, nicht einmal für Radfahrer, Läufer oder Fußgänger. Für alle diese Fälle gilt (in der Regel, d.h. bis zum nächsten Auftanken) $\dot{m}_t < 0$, also $m_t \neq const.$.

(ii) Die dynamische Grundgleichung (2.19) läßt sich nach der Beschleunigung auflösen,

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_t} \ .$$

Damit bestimmt das Verhältnis von Kraft zu träger Masse die **Trajektorie** $\vec{r}(t)$, denn diese kann man im Prinzip durch zweimaliges Integrieren nach der Zeit (und Angabe von zwei Integrationskonstanten) aus der Beschleunigung berechnen, wie in Abschnitt 2.1.1 ausführlich diskutiert.

(iii) Mit Hilfe des 2. Newtonschen Axioms läßt sich die Kraft als **Folgedefinition** auffassen, die aus der trägen Masse (einer Basisgröße) und der Beschleunigung (eine aus der Basisgröße Ort abgeleitete Größe) abgeleitet wird. Newton als Einheit der Kraft kann dann durch die Einheiten von träger Masse, Länge und Zeit ausgedrückt werden:

$$[\vec{F}] = \mathrm{N} = \left[m_t \, \frac{\vec{r}}{t^2} \right] = \mathrm{kg} \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \ .$$

3. Newtonsches Axiom (Reaktionsprinzip, actio = reactio):

Gegeben seien zwei Körper. Sei $\vec{F}_{12}$ die Kraft, die der zweite Körper auf den ersten ausübt, und $\vec{F}_{21}$ die Kraft, die der erste auf den zweiten ausübt. Dann gilt:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \ . \tag{2.20}$$

Beispiel: Eine Kugel, die auf einer Tischplatte liegt, übt auf die Platte eine Kraft aus. Umgekehrt übt die Tischplatte eine Kraft auf die Kugel aus, vgl. Abb. 2.5.

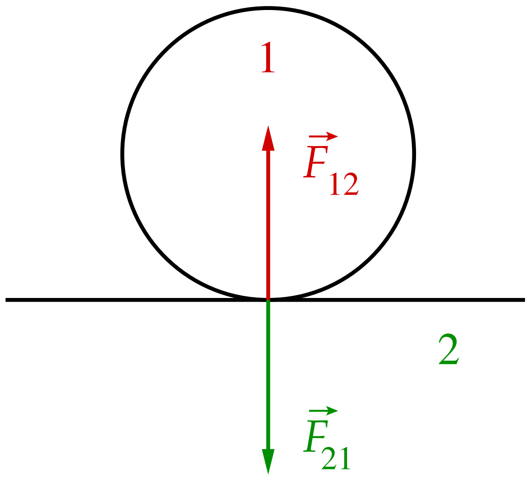

Abbildung 2.5: Beispiel für das 3. Newtonsche Axiom.

Mit Hilfe des 3. Newtonschen Axioms läßt sich eine **Meßvorschrift** für die träge Masse definieren. Für zwei Massenpunkte mit den trägen Massen $m_{t,1}$ und $m_{t,2}$, die aufeinander Kräfte ausüben, aber ansonsten keiner anderen Kraft ausgesetzt sind, gilt

$$m_{t,1} \, \vec{a}_1 = -m_{t,2} \, \vec{a}_2 \quad \Longrightarrow \quad m_{t,1} \, a_1 = m_{t,2} \, a_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{m_{t,1}}{m_{t,2}} = \frac{a_2}{a_1} \ . \tag{2.21}$$

Beschleunigungen sind gut meßbare Größen; man benötigt lediglich Zeit- und Ortsmessungen, um sie festzulegen, aber braucht die Kräfte, die die Beschleunigungen verursachen, nicht zu kennen. Das Verhältnis der Beschleunigungen und damit auch das Verhältnis der trägen Massen ist damit unabhängig von den wirkenden Kräften. Dies macht noch einmal deutlich, dass die träge Masse eine Materialeigenschaft ist.

Durch die Einführung eines **Massennormals**, d.h. einer Testmasse, deren Wert wir frei festlegen können, kann man alle anderen Massen durch Vergleich mit dieser Testmasse bestimmen. Die Testmasse habe den Wert 1 kg. Damit werden alle anderen Massen in Einheiten von kg festgelegt, z.B. nach Gl. (2.21) für $m_{t,1} = 1$ kg als Testmasse:

$$m_{t,2} = \frac{a_1}{a_2}\,\mathrm{kg}\ .$$

Die Maßzahl a_1/a_2 der Masse $m_{t,2}$ muss nun noch durch ein geeignetes Experiment, welches das Verhältnis der Beschleunigungen festlegt, bestimmt werden.

4. **Newtonsches Axiom (Superpositionsprinzip):**

   Wirken auf einen Körper mehrere Kräfte $\vec{F}_1, \ldots, \vec{F}_n$, so addieren sich diese wie Vektoren,

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\ . \tag{2.22}$$

2.2.2 Kräfte

Kräfte sind i.a. nicht überall in Raum und Zeit konstant, sondern variieren mit $\vec{r}$ und t. Sie sind also im mathematischen Sinn **Kraftfelder**. Sie können darüberhinaus auch von der Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}$ abhängen; eine Abhängigkeit von der Beschleunigung $\ddot{\vec{r}}$ ist aber in der Regel auszuschließen,

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)\ .$$

Beispiele:

1. **Gewichtskraft, Schwerkraft:**

$$\vec{F}_s = m_s\,\vec{g}\ . \tag{2.23}$$

   Hierbei ist m_s die sog. **schwere Masse** und $\vec{g}$ die **Erdbeschleunigung**. In einem kartesischen Koordinatensystem, in dem die $z-$Achse senkrecht zur Erdoberfläche steht, ist $\vec{g} = (0, 0, -g)^T$, wobei $g \simeq 9,81\,\mathrm{m/s^2}$ der (mittlere) Wert der Beschleunigung an der Erdoberfläche ist. Die Einheit der schweren Masse ist dieselbe wie die der trägen Masse, $[m_s] = \mathrm{kg}$.

   Das sog. **Gewicht**, welches man im Alltagsgebrauch gerne in kg angibt, ist streng genommen keine Masse, sondern eine Kraft, nämlich die **Gewichtskraft** bzw. **Schwerkraft** (2.23), die auf eine Masse an der Erdoberfläche einwirkt. Eine schwere Masse $m_s = 1$ kg erfährt aufgrund dieser Gewichtskraft die Beschleunigung von 9,81 $\mathrm{m/s^2}$. Die Gewichtskraft bzw. Schwerkraft beträgt also eigentlich 9,81 N, und nicht 1 kg (was schon aufgrund der Einheit keine Kraft sein kann).

Was ist die Relation zwischen schwerer Masse und träger Masse? Die Beschleunigung $\vec{a}$, die ein Körper der trägen Masse m_t im Schwerefeld der Erde erfährt, ist aufgrund des 2. Newtonschen Axioms und Gl. (2.23) mit seiner schweren Masse verknüpft:

$$F = m_t\, a = F_s = m_s\, g = const. \implies a = \frac{m_s}{m_t}\, g = const. \implies \frac{m_s}{m_t} = const. \implies m_s \sim m_t \; .$$

Träge Masse und schwere Masse sind also zumindest zueinander proportional. Aber was ist der Wert der Proportionalitätskonstanten? Diese Frage beantwortet das sog. **Einsteinsche Äquivalenzprinzip**. Es besagt, dass die beiden folgende Situationen hinsichtlich des Meßergebnisses prinzipiell ununterscheidbar sind:

(i) Eine Person führt in einem fensterlosen Raumschiff, welches sich mit Beschleunigung $\vec{a} = (0, 0, a)$ durch den kräftefreien Raum bewegt, eine Messung der trägen Masse m_t eines Körpers durch.

(ii) Eine Person führt in einem fensterlosen und bis auf die Schwerkraft kräftefreien Raum auf der Erdoberfläche eine Messung der schweren Masse m_s desselben Körpers durch.

Dies ist in Abb. 2.6 noch einmal bildlich dargestellt. Da beide Personen keinen Bezugspunkt außerhalb des Raumes haben, mit dessen Hilfe sie entscheiden könnten, ob sie sich im Raumschiff oder auf der Erde befinden, ist die Schlußfolgerung aus der Messung der beiden Massen

$$m_s = m_t = m \; . \tag{2.24}$$

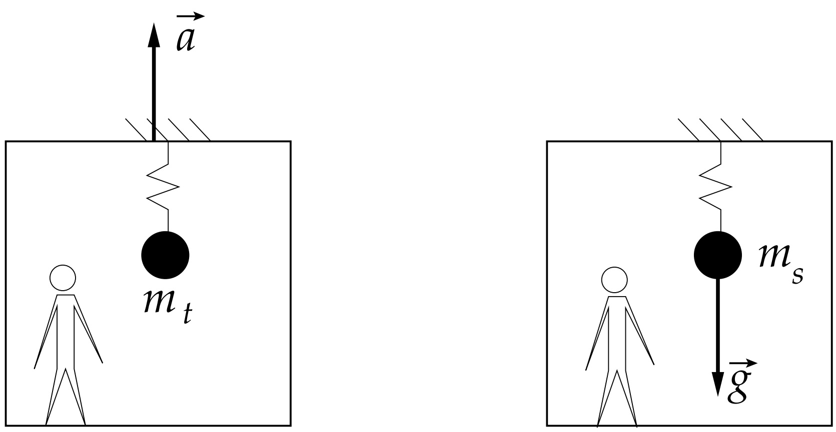

Abbildung 2.6: Zum Einsteinschen Äquivalenzprinzip.

2. **Zentralkräfte:**

$$\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)\, \vec{e}_r \; . \tag{2.25}$$

Die Kraft wirkt immer radial vom Ursprung weg ($f > 0$) bzw. zum Ursprung hin ($f < 0$).

Beispiele:

(i) **Gravitationskraft**, die von einer Masse M im Koordinatenursprung auf eine Masse m am Ort $\vec{r}$ ausgeübt wird, vgl. Abb. 2.7,

$$f(r) = -\gamma \frac{m\,M}{r^2} \; . \tag{2.26}$$

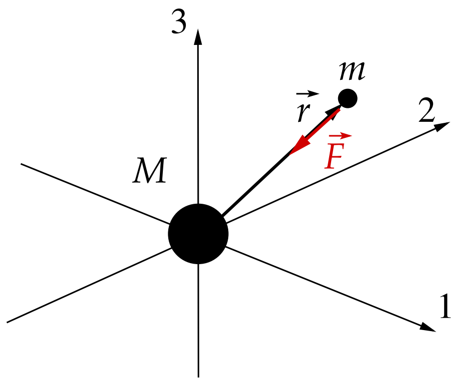

Abbildung 2.7: Zu der von der Masse M auf die Masse m ausgeübten Gravitationskraft.

Die Konstante $\gamma \simeq 6,674 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N(m/kg)}^2$ heißt **Newtonsche Gravitationskonstante**.

(ii) **Coulombkraft,** die von einer Ladung Q im Koordinatenursprung auf eine Ladung q am Ort $\vec{r}$ ausgeübt wird,

$$f(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q\,Q}{r^2} \; . \tag{2.27}$$

Die Konstante $\epsilon_0 \simeq 8,854 \cdot 10^{-12}$ As/Vm ist die sog. **Dielektrizitätskonstante** des Vakuums.

3. **Lorentzkraft**, die ein Teilchen der Ladung q in einem elektromagnetischen Feld erfährt,

$$\vec{F} = q\left[\vec{E}(\vec{r},t) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r},t)\right] \; . \tag{2.28}$$

Hierbei ist $\vec{v}$ die Teilchengeschwindigkeit, $\vec{E}$ die elektrische Feldstärke und $\vec{B}$ die magnetische Induktion. Die Lorentzkraft ist i.a. eine **geschwindigkeitsabhängige** Kraft.

4. **Reibungskräfte**, die der Geschwindigkeit eines sich bewegenden Körpers entgegenwirken und ihn zur Ruhe bringen möchten:

$$\vec{F}_R = -\alpha(v)\,\vec{v} \; , \quad \alpha(v) > 0 \; . \tag{2.29}$$

Man unterscheidet

(i) **Stokessche Reibung:** $\alpha(v) = \alpha = const.$.

(ii) **Newtonsche Reibung:** $\alpha(v) = \beta\, v \; , \;\; \beta = const.$.

Auch Reibungskräfte sind, wie die Lorentzkraft, **geschwindigkeitsabhängig**.

16.12.2016

2.2.3 Inertialsysteme, Galilei-Transformation

Die Verschiebung oder Drehung eines Koordinatensystems hat keinen Einfluss auf die Bahnbewegung eines Körpers. Man wählt günstigerweise dasjenige Koordinatensystem, in dem die Berechnung der Bahnbewegung besonders einfach wird.

Die Frage ist, was mit der Beschreibung der Bahnbewegung passiert, wenn wir von einem Koordinatensystem Σ in ein Koordinatensystem Σ' transformieren, das sich relativ zu Σ mit **konstanter Geschwindigkeit** bewegt, vgl. Abb. 2.8. Der Einfachheit halber wählen wir kartesische Koordinaten.

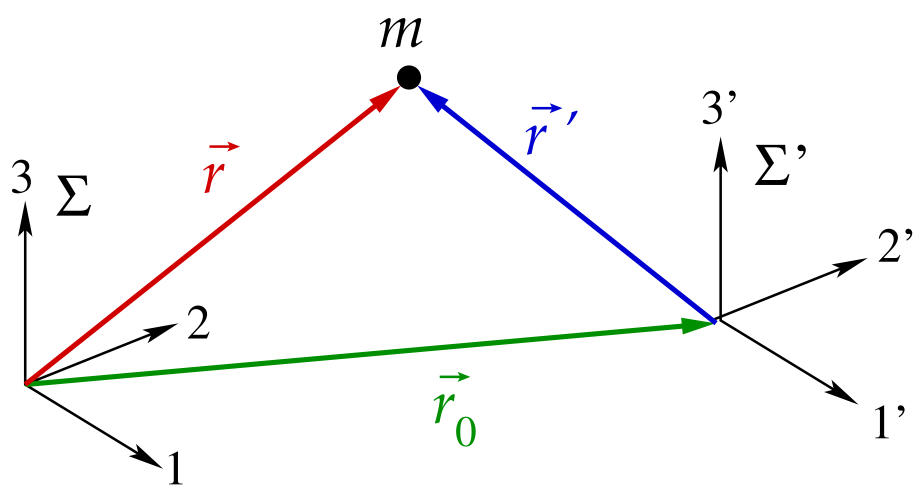

Abbildung 2.8: Galilei-Transformation.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ mögen die Ursprünge der beiden Koordinatensysteme übereinstimmen. Da sich der Ursprung von Σ' in Σ mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}_0 = \overrightarrow{const}.$ bewegt, gilt

$$\vec{r}_0(t) = \vec{v}_0\, t \implies \vec{v}_0(t) \equiv \dot{\vec{r}}_0(t) = \vec{v}_0 = \overrightarrow{const}. \implies \vec{a}_0(t) \equiv \dot{\vec{v}}_0(t) = \ddot{\vec{r}}_0(t) = \dot{\vec{v}}_0 \equiv 0\,.$$

Offenbar gilt dann

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \vec{r}\,'(t) + \vec{r}_0(t)\,, && (2.30)\\ \vec{v}(t) \equiv \dot{\vec{r}}(t) &= \dot{\vec{r}}\,'(t) + \dot{\vec{r}}_0(t) \equiv \vec{v}\,'(t) + \vec{v}_0\,, && (2.31)\\ \vec{a}(t) \equiv \ddot{\vec{r}}(t) &= \ddot{\vec{r}}\,'(t) + \ddot{\vec{r}}_0(t) = \vec{a}\,'(t)\,. && (2.32) \end{aligned}$$

Damit gilt aber auch

$$\vec{F} = m\,\vec{a} = m\,\vec{a}\,' = \vec{F}\,'\,, \tag{2.33}$$

d.h. die Kräfte, die in Σ und in Σ' auf die Masse m wirken, sind identisch. Insbesondere ist ein **kräftefreier Körper** in Σ, $\vec{F} = m\,\vec{a} = 0$, auch ein kräftefreier Körper in Σ', $\vec{F}\,' = m\,\vec{a}\,' = 0$. Mit anderen Worten, falls Σ ein **Inertialsystem** ist, so ist auch Σ' ein Inertialsystem und umgekehrt.

Offenbar ist Σ' genau dann ein Inertialsystem, wenn Σ ein Inertialsystem ist und wenn $\vec{r}_0(t) = \vec{v}_0\, t$, mit $\vec{v}_0 = \overrightarrow{const}$.. Da $\vec{v}_0$ beliebig ist, gibt es **unendlich viele** Inertialsysteme. Die Transformation (2.30) – (2.32), welche ein Inertialsystem in ein anderes transformiert, heißt **Galilei-Transformation**. Dabei nimmt man an, dass es eine **absolute Zeit** gibt, die sich bei der Transformation nicht ändert,

$$t = t' \; .$$

Diese Annahme wird später in der speziellen Relativitätstheorie widerlegt werden; anstelle der Galilei-Transformation tritt die **Lorentz-Transformation**.

2.2.4 Rotierende Bezugssysteme, Scheinkräfte

Aus dem letzten Abschnitt ist klar, dass ein relativ zu einem Inertialsystem **rotierendes** Koordinatensystem **kein** Inertialsystem darstellt, da hier $\vec{v}_0(t) \neq \overrightarrow{const}$. ist. Die Gleichungen (2.31) und (2.32) werden ersetzt durch

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \vec{v}\,'(t) + \vec{v}_0(t) \; , \\ \vec{a}(t) &= \vec{a}\,'(t) + \dot{\vec{v}}_0(t) \neq \vec{a}\,'(t) \; . \end{aligned}$$

Damit ist ein im System Σ kräftefreier Körper **nicht mehr kräftefrei** im System Σ',

$$\frac{\vec{F}}{m} = \vec{a} = 0 = \dot{\vec{v}}_0(t) + \vec{a}\,'(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\vec{F}\,'(t)}{m} = \vec{a}\,'(t) = -\dot{\vec{v}}_0(t) \neq 0 \; ,$$

d.h., er erfährt in Σ' eine Beschleunigung $\vec{a}\,'(t) \neq 0$, auch wenn er in Σ beschleunigungsfrei ist.

Wir machen uns dies anhand eines Beispiels klar. Wir betrachten ein **Inertialsystem** Σ und ein relativ dazu mit **konstanter Winkelgeschwindigkeit** $\omega = const.$ rotierendes **Nicht-Inertialsystem** Σ', vgl. Abb. 2.9.

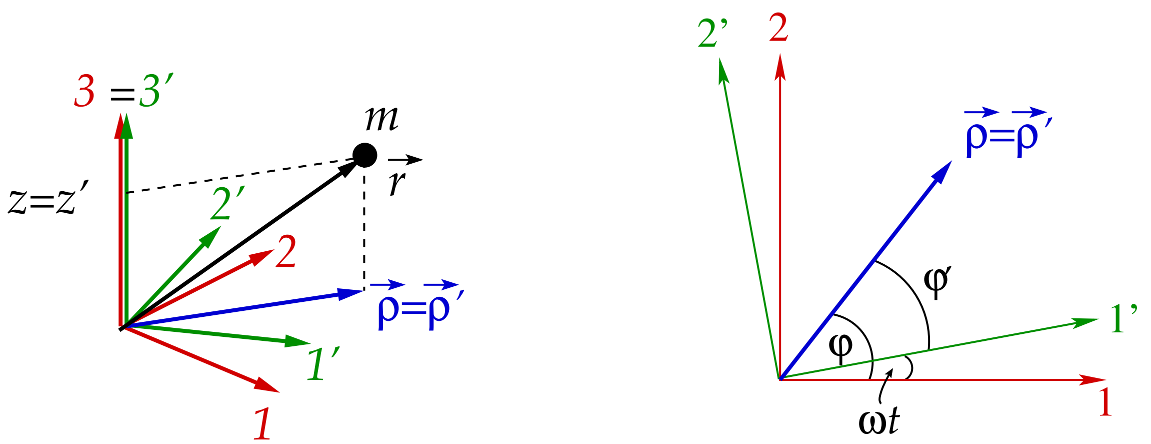

Abbildung 2.9: Das Inertialsystem Σ und das relativ dazu rotierende Nicht-Inertialsystem Σ'.

Die beiden Koordinatensysteme mögen denselben Ursprung und dieselben 3−Achsen haben, $\vec{e}_3 = \vec{e}_3'$. Die Rotationsachse sei die z−Achse, d.h. die $(1', 2')$−Achsen von Σ' rotieren in der $(1, 2)$−Ebene mit konstanter Winkelgeschwindigkeit. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sollen die $(1', 2')$−Achsen gerade mit den $(1, 2)$−Achsen identisch sein. Es ist vorteilhaft, für die weitere Betrachtung Zylinderkoordinaten zu benutzen. Dann gilt

$$\begin{aligned} \rho &= \rho' , \\ \varphi &= \varphi' + \omega\, t , \\ z &= z' . \end{aligned} \tag{2.34}$$

Die Beschleunigung in Zylinderkoordinaten ist durch Gl. (1.163) gegeben, woraus wir für die Komponenten der Kraft im System Σ erhalten

$$F_\rho = m\, a_\rho = m \left(\ddot{\rho} - \rho\, \dot{\varphi}^2\right) , \tag{2.35}$$
$$F_\varphi = m\, a_\varphi = m \left(\rho\, \ddot{\varphi} + 2\, \dot{\rho}\, \dot{\varphi}\right) , \tag{2.36}$$
$$F_z = m\, a_z = m\, \ddot{z} . \tag{2.37}$$

Im System Σ' erhalten wir dagegen mit den Beziehungen (2.34)

$$\begin{aligned} F_\rho' &= m\, a_\rho' = m \left(\ddot{\rho}' - \rho'\, \dot{\varphi}'^2\right) = m \left[\ddot{\rho} - \rho\, (\dot{\varphi} - \omega)^2\right] \\ &= m \left(\ddot{\rho} - \rho\, \dot{\varphi}^2\right) + m\, \rho\, \omega\, (2\, \dot{\varphi} - \omega) = F_\rho + m\, \rho\, \omega\, (2\, \dot{\varphi}' + \omega) , \end{aligned} \tag{2.38}$$
$$\begin{aligned} F_\varphi' &= m\, a_\varphi' = m \left(\rho'\, \ddot{\varphi}' + 2\, \dot{\rho}'\, \dot{\varphi}'\right) = m \left[\rho\, \ddot{\varphi} + 2\, \dot{\rho}\, (\dot{\varphi} - \omega)\right] , \\ &= F_\varphi - 2\, m\, \dot{\rho}\, \omega , \end{aligned} \tag{2.39}$$
$$F_z' = m\, a_z' = m\, \ddot{z}' = m\, \ddot{z} = F_z . \tag{2.40}$$

Für einen in Σ kräftefreien Körper gilt $F_\rho = F_\varphi = F_z = 0$, aber in Σ' gilt dann für denselben Körper

$$F_\rho' = 2\, m\, \rho\, \omega\, \dot{\varphi}' + m\, \rho\, \omega^2 , \tag{2.41}$$
$$F_\varphi' = -2\, m\, \dot{\rho}\, \omega , \tag{2.42}$$
$$F_z' = 0 . \tag{2.43}$$

Der Körper ist nicht mehr kräftefrei in Σ', welches damit offensichtlich **kein** Inertialsystem mehr ist. Auf den Körper wirken sog. **Scheinkräfte**. Die beiden wichtigsten davon sind

1. die **Zentrifugalkraft**, entsprechend dem zweiten Term in Gl. (2.41). Falls die Masse m in Σ' ruht, so dass $\dot{\varphi}' = 0$, dann ist $F_\rho' = m\, \rho\, \omega^2$. Diese Kraftkomponente, die vom Ursprung weg in radialer Richtung wirkt, spürt man beispielsweise im Auto bei der Fahrt durch eine Kurve. Im System Σ' des Autos scheint die Zentrifugalkraft den Fahrer nach außen zu drücken. Dies ist eine Scheinkraft, da die Ursache der Beschleunigung eigentlich das Bestreben des Fahrers ist, in seinem ursprünglichen Bewegungszustand (geradlinige Bewegung) zu verharren. In einer Raumstation kann man mit Hilfe der Zentrifugalkraft eine künstliche Schwerkraftwirkung erzeugen.

2. die **Corioliskraft** (2.42). Diese Kraftkomponente bewirkt, dass ein Stein, den man von einem Turm auf der (rotierenden) Erde fallen läßt, nicht senkrecht nach unten