

erhalten wir für die Divergenz von \vec{a} in einer krummlinig-orthonormalen Basis:

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \vec{a} &= \sum_{i,j=1}^3 \left(\vec{e}_{y_i} b_{y_i}^{-1} \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \cdot (a_{y_j} \vec{e}_{y_j}) \\
 &= \sum_{i,j=1}^3 b_{y_i}^{-1} \left(\frac{\partial a_{y_j}}{\partial y_i} \vec{e}_{y_i} \cdot \vec{e}_{y_j} + a_{y_j} \vec{e}_{y_i} \cdot \frac{\partial \vec{e}_{y_j}}{\partial y_i} \right) \\
 &= \sum_{i,j=1}^3 b_{y_i}^{-1} \left(\frac{\partial a_{y_j}}{\partial y_i} \delta_{ij} + a_{y_j} \vec{e}_{y_i} \cdot \frac{\partial \vec{e}_{y_j}}{\partial y_i} \right). \tag{1.141}
 \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck läßt sich noch weiter auswerten, indem man folgende Zwischenrechnung macht. Wegen der zweifachen stetigen Differenzierbarkeit des Ortsvektors gilt

$$\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial y_i \partial y_j} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial y_j \partial y_i}.$$

Dies kann man mit $\partial \vec{r} / \partial y_j = b_{y_j} \vec{e}_{y_j}$, s. Gl. (1.134), schreiben als

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial y_i} (b_{y_j} \vec{e}_{y_j}) &= \frac{\partial}{\partial y_j} (b_{y_i} \vec{e}_{y_i}) \\
 \iff \frac{\partial b_{y_j}}{\partial y_i} \vec{e}_{y_j} + b_{y_j} \frac{\partial \vec{e}_{y_j}}{\partial y_i} &= \frac{\partial b_{y_i}}{\partial y_j} \vec{e}_{y_i} + b_{y_i} \frac{\partial \vec{e}_{y_i}}{\partial y_j}.
 \end{aligned}$$

5.12.2016

Skalare Multiplikation mit \vec{e}_{y_i} ergibt:

$$\frac{\partial b_{y_j}}{\partial y_i} \delta_{ij} + b_{y_j} \vec{e}_{y_i} \cdot \frac{\partial \vec{e}_{y_j}}{\partial y_i} = \frac{\partial b_{y_i}}{\partial y_j} + b_{y_i} \vec{e}_{y_i} \cdot \frac{\partial \vec{e}_{y_i}}{\partial y_j} = \frac{\partial b_{y_i}}{\partial y_j},$$

denn der letzte Term im Ausdruck zwischen den Gleichheitszeichen verschwindet wegen $0 = d(\vec{e}_{y_i} \cdot \vec{e}_{y_i}) = 2 \vec{e}_{y_i} \cdot d\vec{e}_{y_i}$. Etwas umgestellt erhalten wir das Resultat

$$\vec{e}_{y_i} \cdot \frac{\partial \vec{e}_{y_j}}{\partial y_i} = b_{y_j}^{-1} \left(\frac{\partial b_{y_i}}{\partial y_j} - \delta_{ij} \frac{\partial b_{y_j}}{\partial y_i} \right) = b_{y_j}^{-1} \frac{\partial b_{y_i}}{\partial y_j} (1 - \delta_{ij}),$$

wobei wir im letzten Schritt die Indizes i und j im zweiten Term vertauscht haben (dies ist wegen des Kronecker-Deltas erlaubt, da dieses $i = j$ erzwingt). Dieses Resultat setzen wir nun in Gl. (1.141) ein:

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \vec{a} &= \sum_{i,j=1}^3 b_{y_i}^{-1} \left[\frac{\partial a_{y_j}}{\partial y_i} \delta_{ij} + a_{y_j} b_{y_j}^{-1} \frac{\partial b_{y_i}}{\partial y_j} (1 - \delta_{ij}) \right] \\
 &= \sum_{i=1}^3 b_{y_i}^{-1} \frac{\partial a_{y_i}}{\partial y_i} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 a_{y_i} b_{y_i}^{-1} b_{y_j}^{-1} \frac{\partial b_{y_j}}{\partial y_i}, \tag{1.142}
 \end{aligned}$$

wobei wir von der ersten zur zweiten Zeile die Indizes i und j im zweiten Term vertauscht haben. Man überzeugt sich durch explizites Ausschreiben der Summen, dass dies identisch ist mit

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \frac{1}{b_{y_1} b_{y_2} b_{y_3}} \left[\frac{\partial}{\partial y_1} (b_{y_2} b_{y_3} a_{y_1}) + \frac{\partial}{\partial y_2} (b_{y_1} b_{y_3} a_{y_2}) + \frac{\partial}{\partial y_3} (b_{y_1} b_{y_2} a_{y_3}) \right], \quad (1.143)$$

wenn man in diesem Ausdruck die partielle Differentiation per Produktregel ausführt.

3. **Laplace-Operator:** Der Laplace-Operator folgt sofort aus Gl. (1.143) mit Gl. (1.138):

$$\Delta = \frac{1}{b_{y_1} b_{y_2} b_{y_3}} \left[\frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{b_{y_2} b_{y_3}}{b_{y_1}} \frac{\partial}{\partial y_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{b_{y_1} b_{y_3}}{b_{y_2}} \frac{\partial}{\partial y_2} \right) + \frac{\partial}{\partial y_3} \left(\frac{b_{y_1} b_{y_2}}{b_{y_3}} \frac{\partial}{\partial y_3} \right) \right]. \quad (1.144)$$

4. **Rotation:** Mit der Komponentendarstellung (1.140) des Vektorfeldes \vec{a} und Gl. (1.139) lautet dessen Rotation

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{a} &= \sum_{j=1}^3 \vec{\nabla} \times (a_{y_j} \vec{e}_{y_j}) = \sum_{j=1}^3 \vec{\nabla} \times (a_{y_j} b_{y_j} \vec{\nabla} y_j) \\ &= \sum_{j=1}^3 \left\{ a_{y_j} b_{y_j} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} y_j + \left[\vec{\nabla} (a_{y_j} b_{y_j}) \right] \times (b_{y_j}^{-1} \vec{e}_{y_j}) \right\}. \end{aligned}$$

Der erste Term verschwindet aufgrund von Gl. (1.85). Im zweiten Term setzen wir Gl. (1.138) ein:

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^3 b_{y_i}^{-1} b_{y_j}^{-1} \vec{e}_{y_i} \times \vec{e}_{y_j} \frac{\partial}{\partial y_i} (b_{y_j} a_{y_j}),$$

wobei wegen des Kreuzproduktes der Einheitsvektoren die Summe auf Terme $i \neq j$ beschränkt werden kann. Weil die Einheitsvektoren eine rechtshändige Orthonormalbasis bilden, vgl. Gl. (1.135), können wir die Terme in der Summe umgruppieren und erhalten das Resultat

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{a} &= \frac{\vec{e}_{y_1}}{b_{y_2} b_{y_3}} \left[\frac{\partial}{\partial y_2} (b_{y_3} a_{y_3}) - \frac{\partial}{\partial y_3} (b_{y_2} a_{y_2}) \right] \\ &+ \frac{\vec{e}_{y_2}}{b_{y_1} b_{y_3}} \left[\frac{\partial}{\partial y_3} (b_{y_1} a_{y_1}) - \frac{\partial}{\partial y_1} (b_{y_3} a_{y_3}) \right] \\ &+ \frac{\vec{e}_{y_3}}{b_{y_1} b_{y_2}} \left[\frac{\partial}{\partial y_1} (b_{y_2} a_{y_2}) - \frac{\partial}{\partial y_2} (b_{y_1} a_{y_1}) \right] \\ &= \frac{1}{b_{y_1} b_{y_2} b_{y_3}} \begin{vmatrix} b_{y_1} \vec{e}_{y_1} & b_{y_2} \vec{e}_{y_2} & b_{y_3} \vec{e}_{y_3} \\ \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_3} \\ b_{y_1} a_{y_1} & b_{y_2} a_{y_2} & b_{y_3} a_{y_3} \end{vmatrix}, \quad (1.145) \end{aligned}$$

wobei die Notation als Determinante wiederum nur als mnemonische Hilfe zu verstehen ist.

In den folgenden beiden Abschnitten werden die bislang allgemein hergeleiteten Ergebnisse auf zwei besonders wichtige Systeme krummliniger Koordinaten angewendet, die Zylinder- und die Kugelkoordinaten.

1.5.3 Zylinderkoordinaten

Zylinderkoordinaten sind zweckmäßig für Probleme mit Zylindersymmetrie. Sie bestehen aus **ebenen Polarkoordinaten** in einer Ebene, z.B. der (x, y) -Ebene, ergänzt durch eine **kartesische Koordinatenachse** senkrecht zu dieser Ebene, z.B. die z -Achse, vgl. Abb. [1.53](#).

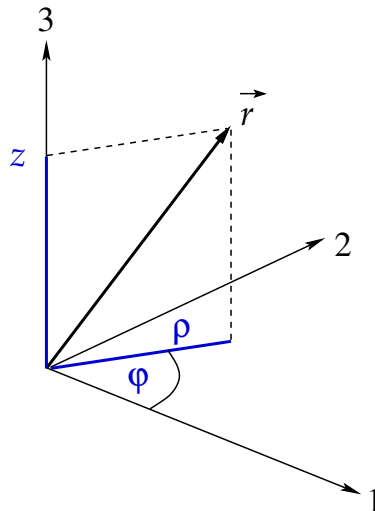


Abbildung 1.53: Zylinderkoordinaten.

Die **Transformationsformeln** für die Abbildung $(\rho, \varphi, z) \mapsto (x_1, x_2, x_3)$ lauten

$$\begin{aligned} x_1 &= \rho \cos \varphi, \\ x_2 &= \rho \sin \varphi, \\ x_3 &= z. \end{aligned} \tag{1.146}$$

Die **Koordinatenlinien** sind in Abb. [1.54](#) dargestellt. Aus den Transformationsformeln [\(1.146\)](#) berechnen wir die **Funktionaldeterminante**

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\rho, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho. \tag{1.147}$$

(Zur Berechnung empfiehlt sich eine Entwicklung der Determinante nach der letzten Zeile oder Spalte.) Dies bedeutet, dass die Abbildung $(\rho, \varphi, z) \mapsto (x_1, x_2, x_3)$ bis auf die durch $\rho = 0$ definierte Untermannigfaltigkeit lokal umkehrbar ist.

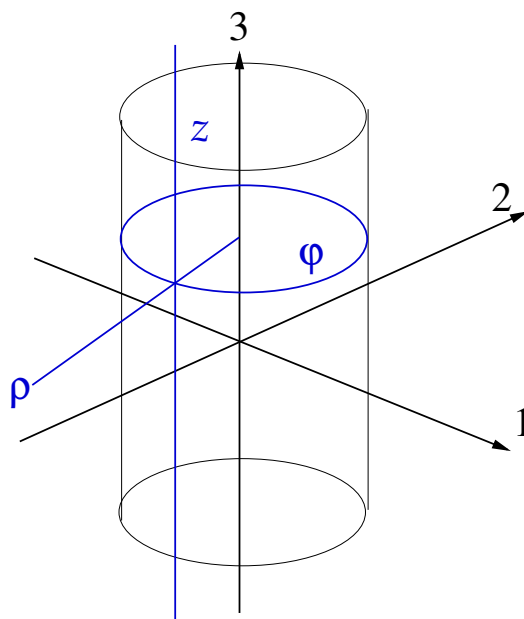


Abbildung 1.54: Koordinatenlinien in Zylinderkoordinaten.

Aus der Funktionaldeterminante folgt sofort das **infinitesimale Volumenelement**

$$dV = dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\rho, \varphi, z)} d\rho d\varphi dz = \rho d\rho d\varphi dz . \quad (1.148)$$

Dies ist in Abb. [1.55](#) veranschaulicht.

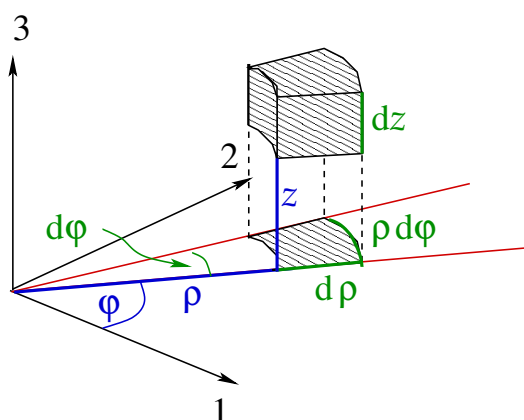


Abbildung 1.55: Das infinitesimale Volumenelement in Zylinderkoordinaten.

Mit $\vec{r} = (\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)^T$ berechnen sich die **Skalenfaktoren** und **Einheitsvek-**

toren wie folgt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} &= (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)^T, & b_\rho = 1 &\implies \vec{e}_\rho = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)^T, \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} &= (-\rho \sin \varphi, \rho \cos \varphi, 0)^T, & b_\varphi = \rho &\implies \vec{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)^T, \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} &= (0, 0, 1)^T, & b_z = 1 &\implies \vec{e}_z = \vec{e}_3 = (0, 0, 1)^T.\end{aligned}\quad (1.149)$$

Man prüft leicht nach, dass das durch $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z\}$ aufgespannte Koordinatensystem eine **rechtshändige, krummlinig-orthonormale Basis** bildet. Die Einheitsvektoren stehen **tangential** zu den Koordinatenlinien, s. Abb. [1.56](#).

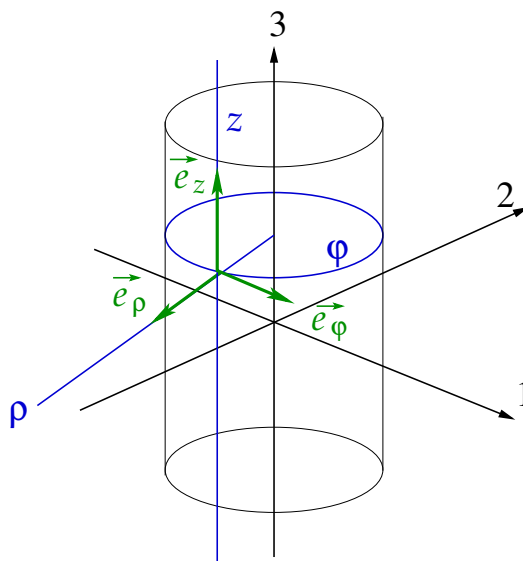


Abbildung 1.56: Die rechtshändige, krummlinig-orthonormale Basis $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z\}$ steht tangential zu den Koordinatenlinien.

Das **totale Differential** berechnet sich gemäß Gl. [\(1.136\)](#) mit den Skalenfaktoren aus Gl. [\(1.149\)](#) wie folgt:

$$d\vec{r} = d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\varphi \vec{e}_\varphi + dz \vec{e}_z. \quad (1.150)$$

Die **Differentialoperatoren** sind

1. **Nabla-Operator:** Aus den Glgen. [\(1.138\)](#) und [\(1.149\)](#) folgt

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (1.151)$$

2. **Divergenz:** Aus den Glgen. (1.143) und (1.149) folgt

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{a} &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho a_\rho) + \frac{\partial}{\partial \varphi} a_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} (\rho a_z) \right] \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho a_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \\ &= \frac{\partial a_\rho}{\partial \rho} + \frac{a_\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} .\end{aligned}\tag{1.152}$$

3. **Laplace-Operator:** Aus den Glgen. (1.144) und (1.149) folgt

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \rho \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \\ &= \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} .\end{aligned}\tag{1.153}$$

4. **Rotation:** Aus den Glgen. (1.145) und (1.149) folgt

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{a} &= \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_\rho & \rho a_\varphi & a_z \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\rho} \vec{e}_\rho \left(\frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \rho \frac{\partial a_\varphi}{\partial z} \right) + \vec{e}_\varphi \left(\frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho} \vec{e}_z \left(\frac{\partial (\rho a_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial a_\rho}{\partial \varphi} \right) \\ &= \vec{e}_\rho \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial a_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z} \right) + \vec{e}_\varphi \left(\frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial \rho} \right) + \vec{e}_z \left(\frac{\partial a_\varphi}{\partial \rho} + \frac{a_\varphi}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial a_\rho}{\partial \varphi} \right) .\end{aligned}\tag{1.154}$$

Als Anwendungsbeispiel für Berechnungen in Zylinderkoordinaten bestimmen wir zum Abschluß dieses Abschnittes noch **Ortsvektor**, **Geschwindigkeit** und **Beschleunigung** eines physikalischen Objektes in **Zylinderkoordinaten**. Zunächst ist anhand von Abb. 1.57 klar, dass der Ortsvektor lediglich eine Komponente in ρ - und eine Komponente in z -Richtung, aber keine in φ -Richtung hat,

$$\vec{r}(t) = \rho(t) \vec{e}_\rho(t) + z(t) \vec{e}_z .\tag{1.155}$$

Hierbei ist zu beachten, dass $\vec{e}_\rho(t)$ als krummlinige Koordinate **nicht ortsfest** ist, sich also im Laufe der Zeit ändern kann. Dagegen ist \vec{e}_z für alle Zeiten konstant, $\dot{\vec{e}}_z = 0$.

Die Zeitableitung des Ortsvektors ergibt die Geschwindigkeit,

$$\vec{v}(t) \equiv \dot{\vec{r}}(t) = \dot{\rho}(t) \vec{e}_\rho(t) + \rho(t) \dot{\vec{e}}_\rho(t) + \dot{z}(t) \vec{e}_z .\tag{1.156}$$

Wir müssen noch die zeitliche Änderung $\dot{\vec{e}}_\rho$ des Einheitsvektors \vec{e}_ρ bestimmen. Da die drei Einheitsvektoren $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z\}$ eine Orthonormalbasis bilden, muss $\dot{\vec{e}}_\rho$ durch diese drei Einheitsvektoren ausdrückbar sein. Den entsprechenden Zusammenhang leitet man am

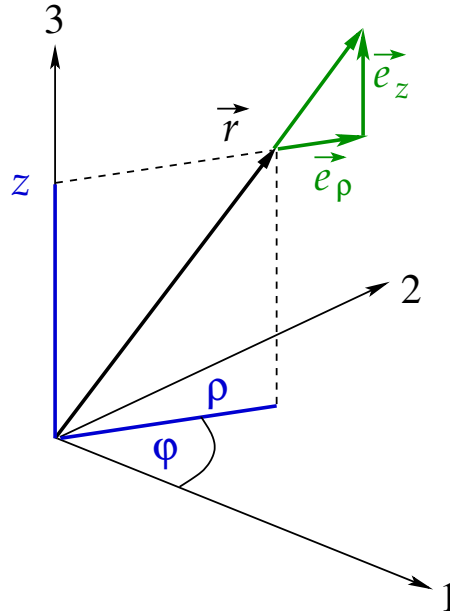


Abbildung 1.57: Der Ortsvektor in Zylinderkoordinaten.

elegantesten mit Hilfe von Gl. (1.150) für das totale Differential her, welche wir durch dt dividieren. Wir erhalten

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{e}_z, \quad (1.157)$$

wobei wir das Zeitargument der Einfachheit halber unterdrückt haben. Da alle Einheitsvektoren orthonormal zueinander stehen, ergibt der Vergleich von Gl. (1.156) mit (1.157):

$$\dot{\vec{e}}_\rho \equiv \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi. \quad (1.158)$$

Ganz analog muss die Zeitableitung von \vec{e}_φ durch die Einheitsvektoren $\{\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z\}$ ausdrückbar sein. Jedoch gilt wegen Gl. (1.58) $\vec{e}_\varphi \cdot \dot{\vec{e}}_\varphi = 0$, d.h. $\dot{\vec{e}}_\varphi \perp \vec{e}_\varphi$, d.h. $\dot{\vec{e}}_\varphi$ kann keine Komponente in \vec{e}_φ -Richtung besitzen:

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = \alpha \vec{e}_\rho + \beta \vec{e}_z, \quad \dot{\vec{e}}_\varphi \cdot \vec{e}_\rho = \alpha, \quad \dot{\vec{e}}_\varphi \cdot \vec{e}_z = \beta. \quad (1.159)$$

Aus der Orthonormalität der Basisvektoren leiten wir folgende Beziehungen ab:

$$\begin{aligned} \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\rho = 0 &\implies \frac{d}{dt} (\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\rho) = 0 \implies \dot{\vec{e}}_\varphi \cdot \vec{e}_\rho + \vec{e}_\varphi \cdot \dot{\vec{e}}_\rho = 0 \\ &\iff \alpha = \dot{\vec{e}}_\varphi \cdot \vec{e}_\rho = -\vec{e}_\varphi \cdot \dot{\vec{e}}_\rho = -\dot{\varphi}, \end{aligned} \quad (1.160)$$

wobei wir die Glgen. (1.158) und (1.159) benutzt haben. Damit ist der Koeffizient $\alpha \equiv -\dot{\varphi}$ bestimmt. Für den Koeffizienten β machen wir eine entsprechende Rechnung,

$$\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_z = 0 \implies \frac{d}{dt} (\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_z) = 0 \implies \dot{\vec{e}}_\varphi \cdot \vec{e}_z + \vec{e}_\varphi \cdot \dot{\vec{e}}_z = \dot{\vec{e}}_\varphi \cdot \vec{e}_z = \beta = 0, \quad (1.161)$$

wobei wir Gl. (1.159) und $\dot{\vec{e}}_z = 0$ benutzt haben. Setzen wir Gln. (1.160) und (1.161) in Gl. (1.159) ein, so erhalten wir

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \vec{e}_\rho . \quad (1.162)$$

Nun sind wir in der Lage, auch die Beschleunigung als Zeitableitung von Gl. (1.157) zu berechnen (wir unterdrücken wieder die Abhängigkeit von der Zeit):

9.12.2016

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \\ &= \ddot{\rho} \vec{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\vec{e}}_\rho + \dot{\rho} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \rho \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \rho \dot{\varphi} \dot{\vec{e}}_\varphi + \ddot{z} \vec{e}_z \\ &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\rho + (\rho \ddot{\varphi} + 2 \dot{\rho} \dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi + \ddot{z} \vec{e}_z , \end{aligned} \quad (1.163)$$

wobei wir die Gln. (1.158) und (1.162) benutzt und die Terme geordnet haben.

Ebene Polarkoordinaten ergeben sich als Spezialfall der Zylinderkoordinaten für $z = \dot{z} = \ddot{z} = 0$. Da die Bewegung stets in der (x, y) -Ebene stattfindet, ist $\vec{\rho} \equiv \vec{r}$ und wir erhalten für den **Ortsvektor**

$$\vec{r}(t) = r(t) \vec{e}_r(t) , \quad (1.164)$$

für die **Geschwindigkeit**

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi , \quad (1.165)$$

und für die **Beschleunigung**

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \vec{e}_r + (2 \dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi . \quad (1.166)$$

1.5.4 Kugelkoordinaten

Kugelkoordinaten bzw. **sphärische Koordinaten** bzw. **räumliche Polarkoordinaten** sind zweckmäßig für kugelsymmetrische Probleme. Sie bestehen aus einer **Radialkoordinate** r , die der Länge des Ortsvektors entspricht, einem **Polarwinkel** ϑ , der den Winkel zwischen \vec{r} und der x_3 -Achse beschreibt, $0 \leq \vartheta \leq \pi$, und einem **Azimutwinkel** φ , der den Winkel zwischen der Projektion des Ortsvektors auf die (x_1, x_2) -Ebene und der x_1 -Achse beschreibt, $0 \leq \varphi < 2\pi$, vgl. Abb. 1.58.

Die **Transformationsformeln** für die Abbildung $(r, \vartheta, \varphi) \mapsto (x_1, x_2, x_3)$ lauten

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin \vartheta \cos \varphi , \\ x_2 &= r \sin \vartheta \sin \varphi , \\ x_3 &= r \cos \vartheta . \end{aligned} \quad (1.167)$$

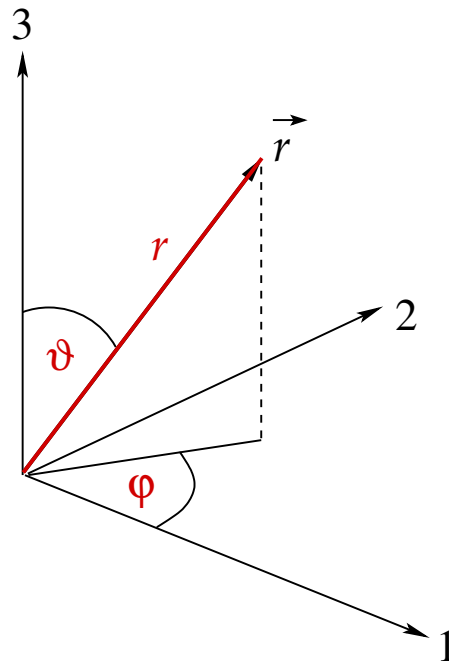


Abbildung 1.58: Kugelkoordinaten.

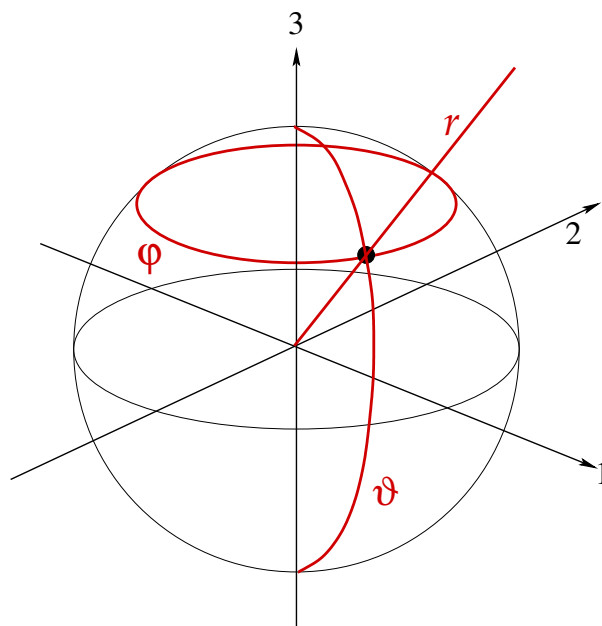


Abbildung 1.59: Koordinatenlinien in Kugelkoordinaten.

Die **Koordinatenlinien** sind in Abb. [1.59](#) dargestellt. Die r -Linien sind vom Ursprung ausgehende radiale Strahlen. Die ϑ -Linien sind Halbkreise mit Zentrum im Ursprung und berandet durch die x_3 -Achse. Die φ -Linien sind konzentrische Kreise um die x_3 -Achse parallel zur (x_1, x_2) -Ebene.

Aus den Transformationsformeln (1.167) berechnen wir die **Funktionaldeterminante**

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(r, \vartheta, \varphi)} &= \begin{vmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \end{vmatrix} \\
 &= \cos \vartheta \begin{vmatrix} r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \end{vmatrix} + r \sin \vartheta \begin{vmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \end{vmatrix} \\
 &= \cos \vartheta (r^2 \cos^2 \varphi \cos \vartheta \sin \vartheta + r^2 \sin^2 \varphi \cos \vartheta \sin \vartheta) \\
 &+ r \sin \vartheta (r \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi + r \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi) \\
 &= r^2 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta + r^2 \sin^3 \vartheta \\
 &= r^2 \sin \vartheta .
 \end{aligned} \tag{1.168}$$

Dies bedeutet, dass die Abbildung $(r, \vartheta, \varphi) \mapsto (x_1, x_2, x_3)$ bis auf die durch $r = 0$ und $\vartheta = 0, \pi$ definierte Untermannigfaltigkeit lokal umkehrbar ist.

Aus der Funktionaldeterminante folgt sofort das **infinitesimale Volumenelement**

$$dV = dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(r, \vartheta, \varphi)} dr d\vartheta d\varphi = r^2 dr \sin \vartheta d\vartheta d\varphi . \tag{1.169}$$

Als Anwendungsbeispiel berechnen wir das Volumen einer Kugel mit dem Radius R :

$$V = \int_0^R dr r^2 \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \int_0^R dr r^2 \int_{-1}^1 d \cos \vartheta = 2\pi \frac{R^3}{3} 2 = \frac{4\pi}{3} R^3 .$$

Mit $\vec{r} = r(\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)^T$ berechnen sich die **Skalenfaktoren** und **Einheitsvektoren** wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} &= (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)^T, & b_r &= 1 \\
 &\implies \vec{e}_r = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)^T, \\
 \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} &= r(\cos \vartheta \cos \varphi, \cos \vartheta \sin \varphi, -\sin \vartheta)^T, & b_\vartheta &= r \\
 &\implies \vec{e}_\vartheta = (\cos \vartheta \cos \varphi, \cos \vartheta \sin \varphi, -\sin \vartheta)^T, & (1.170) \\
 \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} &= r(-\sin \vartheta \sin \varphi, \sin \vartheta \cos \varphi, 0)^T, & b_\varphi &= r \sin \vartheta \\
 &\implies \vec{e}_\varphi = (-\sin \vartheta \sin \varphi, \sin \vartheta \cos \varphi, 0)^T .
 \end{aligned}$$

Man prüft leicht nach, dass das durch $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi\}$ aufgespannte Koordinatensystem eine **rechtshändige, krummlinig-orthonormale Basis** bildet. Die Einheitsvektoren stehen **tangential** zu den Koordinatenlinien, s. Abb. 1.60.

Das **totale Differential** berechnet sich gemäß Gl. (1.136) mit den Skalenfaktoren aus Gl. (1.170) wie folgt:

$$d\vec{r} = dr \vec{e}_r + r d\vartheta \vec{e}_\vartheta + r \sin \vartheta d\varphi \vec{e}_\varphi . \tag{1.171}$$

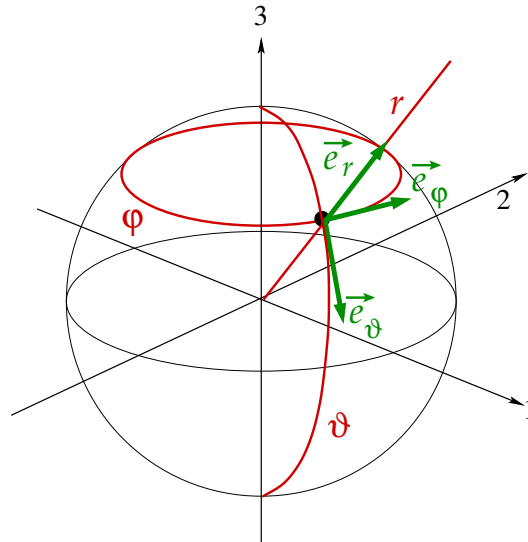


Abbildung 1.60: Die rechtshändige, krummlinig-orthonormale Basis $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi\}$ steht tangential zu den Koordinatenlinien.

Die **Differentialoperatoren** sind

1. **Nabla-Operator:** Aus den Glgen. (1.138) und (1.170) folgt

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (1.172)$$

2. **Divergenz:** Aus den Glgen. (1.143) und (1.170) folgt

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{a} &= \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \vartheta a_r) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} (r \sin \vartheta a_\vartheta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r a_\varphi) \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 a_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta a_\vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \\ &= \frac{\partial a_r}{\partial r} + 2 \frac{a_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{a_\vartheta \cot \vartheta}{r} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (1.173)$$

3. **Laplace-Operator:** Aus den Glgen. (1.144) und (1.170) folgt

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{\cot \vartheta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \end{aligned} \quad (1.174)$$

4. **Rotation:** Aus den Glgen. (1.145) und (1.170) folgt

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \times \vec{a} &= \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r \vec{e}_\vartheta & r \sin \vartheta \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \vartheta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ a_r & r a_\vartheta & r \sin \vartheta a_\varphi \end{vmatrix} & (1.175) \\
 &= \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left\{ \vec{e}_r \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (r \sin \vartheta a_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (r a_\vartheta) \right] + r \vec{e}_\vartheta \left[\frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \vartheta a_\varphi) \right] \right. \\
 &\quad \left. + r \sin \vartheta \vec{e}_\varphi \left[\frac{\partial}{\partial r} (r a_\vartheta) - \frac{\partial a_r}{\partial \vartheta} \right] \right\} \\
 &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \vec{e}_r \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta a_\varphi) - \frac{\partial a_\vartheta}{\partial \varphi} \right] + \frac{1}{r \sin \vartheta} \vec{e}_\vartheta \left[\frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial r} (r a_\varphi) \right] \\
 &\quad + \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi \left[\frac{\partial}{\partial r} (r a_\vartheta) - \frac{\partial a_r}{\partial \vartheta} \right] \\
 &= \vec{e}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial a_\varphi}{\partial \vartheta} + \frac{a_\varphi \cot \vartheta}{r} - \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial a_\vartheta}{\partial \varphi} \right) + \vec{e}_\vartheta \left(\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial a_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial r} - \frac{a_\varphi}{r} \right) \\
 &\quad + \vec{e}_\varphi \left(\frac{\partial a_\vartheta}{\partial r} + \frac{a_\vartheta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial a_r}{\partial \vartheta} \right).
 \end{aligned}$$

Als Anwendungsbeispiel für Berechnungen in Kugelkoordinaten bestimmen wir zum Abschluß dieses Abschnittes noch **Ortsvektor**, **Geschwindigkeit** und **Beschleunigung** eines physikalischen Objektes in **Kugelkoordinaten**. Zunächst ist anhand von Gl. (1.170) klar, dass der Ortsvektor lediglich eine Komponente in r -Richtung hat,

$$\vec{r}(t) = r(t) \vec{e}_r(t). \quad (1.176)$$

Die Zeitableitung des Ortsvektors ergibt die Geschwindigkeit,

$$\vec{v}(t) \equiv \dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}(t) \vec{e}_r(t) + r(t) \dot{\vec{e}}_r(t). \quad (1.177)$$

Andererseits gilt nach Gl. (1.171) für das totale Differential, dividiert durch dt

$$\vec{v} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\vartheta} \vec{e}_\vartheta + r \sin \vartheta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi, \quad (1.178)$$

wobei wir das Zeitargument der Einfachheit halber unterdrückt haben. Der Vergleich von Gl. (1.177) mit (1.178) ergibt

$$\dot{\vec{e}}_r \equiv \dot{\vartheta} \vec{e}_\vartheta + \sin \vartheta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi. \quad (1.179)$$

Wegen der Orthogonalitätsrelation (1.58) und der Vollständigkeit der Orthonormalbasis $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi\}$ muss gelten:

$$\dot{\vec{e}}_\vartheta = \alpha \vec{e}_\varphi + \beta \vec{e}_r, \quad (1.180)$$

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = \gamma \vec{e}_\vartheta + \delta \vec{e}_r. \quad (1.181)$$

Aus der Orthonormalität der Basisvektoren leiten wir ferner folgende Beziehungen ab:

$$\vec{e}_\vartheta \cdot \vec{e}_r = 0 \iff \beta = \dot{\vec{e}}_\vartheta \cdot \vec{e}_r = -\vec{e}_\vartheta \cdot \dot{\vec{e}}_r = -\dot{\vartheta}, \quad (1.182)$$

$$\vec{e}_\vartheta \cdot \vec{e}_\varphi = 0 \iff \alpha = \dot{\vec{e}}_\vartheta \cdot \vec{e}_\varphi = -\vec{e}_\vartheta \cdot \dot{\vec{e}}_\varphi = -\gamma, \quad (1.183)$$

$$\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_r = 0 \iff \delta = \dot{\vec{e}}_\varphi \cdot \vec{e}_r = -\vec{e}_\varphi \cdot \dot{\vec{e}}_r = -\sin \vartheta \dot{\varphi}, \quad (1.184)$$

wobei wir die Glgen. (1.180) und (1.181) benutzt haben. Den noch unbekanntem Koeffizienten $\alpha = -\gamma$ bestimmt man wie folgt. Offenbar ist die x_3 -Komponente von $\vec{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)^T$ stets null. Dies gilt auch für $\dot{\vec{e}}_\varphi$. Für dessen x_3 -Komponente erhalten wir somit mit Gl. (1.181) die Beziehung

$$0 = -\alpha(-\sin \vartheta) - \sin \vartheta \dot{\varphi} \cos \vartheta \implies \alpha = \dot{\varphi} \cos \vartheta.$$

Die Glgen. (1.180) und (1.181) lauten also mit nun bestimmten Koeffizienten

$$\dot{\vec{e}}_\vartheta = \dot{\varphi} \cos \vartheta \vec{e}_\varphi - \dot{\vartheta} \vec{e}_r, \quad (1.185)$$

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \cos \vartheta \vec{e}_\vartheta - \dot{\varphi} \sin \vartheta \vec{e}_r. \quad (1.186)$$

Nun sind wir in der Lage, auch die Beschleunigung als Zeitableitung von Gl. (1.178) zu berechnen (wir unterdrücken wieder die Abhängigkeit von der Zeit):

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \\ &= \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \dot{\vec{e}}_r + \dot{r} \dot{\vartheta} \vec{e}_\vartheta + r \ddot{\vartheta} \vec{e}_\vartheta + r \dot{\vartheta} \dot{\vec{e}}_\vartheta \\ &+ \dot{r} \sin \vartheta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + r \cos \vartheta \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + r \sin \vartheta \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi + r \sin \vartheta \dot{\varphi} \dot{\vec{e}}_\varphi \\ &= \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} (\dot{\vartheta} \vec{e}_\vartheta + \dot{\varphi} \sin \vartheta \vec{e}_\varphi) + \dot{r} \dot{\vartheta} \vec{e}_\vartheta + r \ddot{\vartheta} \vec{e}_\vartheta + r \dot{\vartheta} (\dot{\varphi} \cos \vartheta \vec{e}_\varphi - \dot{\vartheta} \vec{e}_r) \\ &+ \dot{r} \sin \vartheta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + r \cos \vartheta \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + r \sin \vartheta \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi - r \sin \vartheta \dot{\varphi}^2 (\cos \vartheta \vec{e}_\vartheta + \sin \vartheta \vec{e}_r) \\ &= \left(\ddot{r} - r \dot{\vartheta}^2 - r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta \right) \vec{e}_r \\ &+ \left(r \ddot{\vartheta} + 2 \dot{r} \dot{\vartheta} - r \dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \right) \vec{e}_\vartheta \\ &+ \left(r \ddot{\varphi} \sin \vartheta + 2 \dot{r} \dot{\varphi} \sin \vartheta + 2 r \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \cos \vartheta \right) \vec{e}_\varphi, \end{aligned} \quad (1.187)$$

wobei wir die Glgen. (1.179), (1.185) und (1.186) benutzt und die Terme geordnet haben.