

Beweis: Wir multiplizieren die n Gleichungen (1.120) mit $(-1)^{i+k} A_{ik}$, wobei k fest gewählt wird und i der jeweilige Zeilenindex ist,

$$\begin{aligned} (a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n) (-1)^{1+k} A_{1k} &= b_1 (-1)^{1+k} A_{1k} \\ &\vdots \\ (a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n) (-1)^{n+k} A_{nk} &= b_n (-1)^{n+k} A_{nk}, \end{aligned}$$

und summieren alle Gleichungen auf,

$$\sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} (-1)^{i+k} A_{ik} \right) x_j = \sum_{i=1}^n b_i (-1)^{i+k} A_{ik}.$$

Der Ausdruck in der Klammer auf der linken Seite der Gleichung verschwindet gemäß Gl. (1.118) für $j \neq k$, so dass lediglich ein Term in der Summe über j übrig bleibt,

$$\sum_{i=1}^n a_{ik} (-1)^{i+k} A_{ik} x_k \equiv x_k \det A = \sum_{i=1}^n b_i (-1)^{i+k} A_{ik} = \det A_k,$$

wobei wir auf der rechten Seite den Entwicklungssatz für die Entwicklung nach der k -ten Spalte der Determinante von A_k angewendet haben. Daraus folgt sofort die Behauptung, q.e.d.

Wir schließen mit einer Bemerkung zu homogenen linearen Gleichungssystemen. Wegen $\vec{b} = 0$ ist auch $\det A_k = 0$. Falls $\det A \neq 0$, bleibt nach der Cramerschen Regel nur die triviale Lösung, $\vec{x} = 0$. Nichttriviale Lösungen $\vec{x} \neq 0$ kann es also nur für $\det A = 0$ geben. Dies ist ein häufig verwendetes Kriterium, um zu entscheiden, ob ein Gleichungssystem nichttriviale Lösungen hat. Es bedeutet aber auch, dass nicht alle Zeilen oder Spalten von A **linear unabhängig** sind. Mit anderen Worten, **linear abhängige** Zeilen oder Spalten lassen sich durch eine geeignete Linearkombination der anderen ausdrücken. Wendet man nun Eigenschaft (1.112) mehrfach an, kann man auf diese Weise eine Nullzeile generieren. Dann verschwindet aber auch die Determinante.

1.5 Koordinatensysteme

1.5.1 Transformation der Variablen

Bislang wurden kartesische Koordinatensysteme betrachtet, die man durch Drehungen ineinander überführen kann. Kartesische Koordinatensysteme sind jedoch unzuweckmäßig, wenn man beispielsweise ein Problem mit **sphärischer Symmetrie**, d.h. **Kugelsymmetrie**, lösen möchte. In diesem Fall ist es besser, sog. **Kugelkoordinaten** zu verwenden. I.a. sollte man das Koordinatensystem der **Symmetrie** des Problems anpassen. Dadurch vereinfacht man in der Regel den Rechenaufwand. Die neuen Koordinaten sind i.a. nicht kartesisch. Im folgenden beschäftigen wir uns mit der Frage, welche Gesetzmäßigkeiten beim Übergang von einem zum anderen Koordinatensystem zu beachten sind.

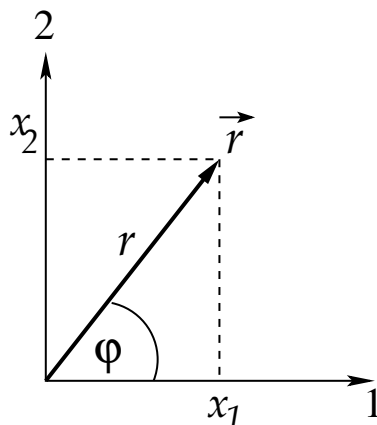


Abbildung 1.44: Ebene Polarkoordinaten.

Beispiel: Ebene Polarkoordinaten

Nach Abb. 1.44 gilt:

$$x_1 = r \cos \varphi = x_1(r, \varphi), \quad (1.122)$$

$$x_2 = r \sin \varphi = x_2(r, \varphi). \quad (1.123)$$

Dies definiert eine Abbildung $(r, \varphi) \mapsto (x_1, x_2)$, eine sog. **zweidimensionale Punkttransformation**. Sie bildet die (r, φ) -Ebene Punkt für Punkt auf die (x_1, x_2) -Ebene ab.

28.11.2016

Offenbar ist **jeder** Punkt (x_1, x_2) durch einen Punkt (r, φ) beschreibbar. Aber ist dies **genau ein** Punkt (r, φ) , oder gibt es Mehrdeutigkeiten? Gibt es u.U. **mehrere** Punkte in der (r, φ) -Ebene, die **denselben** Punkt (x_1, x_2) beschreiben? Ganz offensichtlich ist dies der Fall, denn wegen der Periodizität der trigonometrischen Funktionen führen die Winkel $\varphi, \varphi \pm 2\pi, \varphi \pm 4\pi, \text{etc.}$ zu demselben Punkt (x_1, x_2) . Man sollte sich daher beim Definitionsbereich des Winkels φ auf das halboffene Intervall $[0, 2\pi)$ beschränken. Aber auch dann ist die Zuordnung $(r, \varphi) \mapsto (x_1, x_2)$ nicht eindeutig, z.B. werden **alle** Punkte $(0, \varphi)$ (d.h. $r = 0$ und **beliebige** Werte für φ) stets auf einen einzigen Punkt, den Ursprung $(x_1 = 0, x_2 = 0)$, abgebildet. Man sagt, die Abbildung $(r, \varphi) \mapsto (x_1, x_2)$ ist nicht eindeutig umkehrbar. Solange man den Ursprung aus der Betrachtung nimmt, also für alle $r \neq 0$, ist sie jedoch eindeutig umkehrbar:

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad (1.124)$$

$$\varphi = \arctan \frac{x_2}{x_1}. \quad (1.125)$$

Man sagt, die Abbildung $(r, \varphi) \mapsto (x_1, x_2)$ ist **fast überall** umkehrbar.

Diese Betrachtung läßt sich auf d Dimensionen verallgemeinern. Dazu definieren wir zuerst die Begriffe der **Eindeindeutigkeit** und der **lokalen Umkehrbarkeit**.

Definition: Eine Abbildung $\vec{y} \equiv (y_1, \dots, y_d) \mapsto \vec{x} \equiv (x_1, \dots, x_d)$ heißt **eindeutig**, wenn jeder Punkt \vec{y} auf **genau einen** Punkt \vec{x} abgebildet wird **und umgekehrt**, vgl. Abb. [1.45](#).

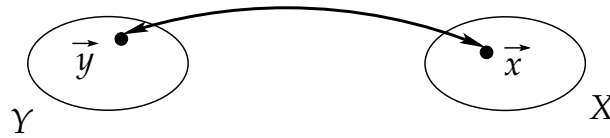


Abbildung 1.45: Eine eindeutige Abbildung.

Definition: Eine Abbildung $\vec{y} \mapsto \vec{x}$ heißt **lokal umkehrbar**, wenn die Abbildung in einer **Umgebung** X von \vec{x} und einer **Umgebung** Y von \vec{y} **eindeutig** ist, vgl. Abb. [1.45](#).

Definition: Eine Abbildung $\vec{y} \mapsto \vec{x}$ heißt **fast überall lokal umkehrbar**, wenn die lokale Umkehrbarkeit lediglich auf Untermannigfaltigkeiten niedrigerer Dimension $d' < d$ verletzt ist.

Beispiel: Bei den Polarkoordinaten in der **zweidimensionalen** Ebene ist die lokale Umkehrbarkeit auf der **eindimensionalen** Untermannigfaltigkeit $\{r = 0, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$ verletzt.

Wie entscheidet man, ob eine Variablentransformation lokal umkehrbar ist? Wir betrachten den Punkt \vec{y} , der auf \vec{x} abgebildet wird. Eine infinitesimale Verschiebung um $d\vec{y} \equiv (dy_1, \dots, dy_d)$ verursacht eine Verschiebung $d\vec{x} \equiv (dx_1, \dots, dx_d)$ des Punktes \vec{x} , die wir mit Hilfe des totalen Differentials berechnen:

$$dx_i = x_i(y_1 + dy_1, \dots, y_d + dy_d) - x_i(y_1, \dots, y_d) = \sum_{j=1}^d \frac{\partial x_i}{\partial y_j} dy_j, \quad i = 1, \dots, d.$$

Dies läßt sich in Matrixform schreiben:

$$d\vec{x} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_d}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_d}{\partial y_d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dy_1 \\ \vdots \\ dy_d \end{pmatrix} \equiv F(x; y) d\vec{y}. \quad (1.126)$$

Hier haben wir auf der rechten Seite die sog. **Funktionalmatrix** $F(x; y)$ eingeführt, deren Elemente $f(x; y)_{ij} = \partial x_i / \partial y_j$ sind. Da die Verschiebung $d\vec{y}$ beliebig ist, gilt der durch die Funktionalmatrix vermittelte Zusammenhang ([1.126](#)) zwischen $d\vec{y}$ und $d\vec{x}$ für **alle** Punkte in einer **Umgebung** von \vec{y} und entsprechend für **alle** Punkte in einer Umgebung von \vec{x} . Wenn die Verschiebung $d\vec{y}$ vorgegeben wird, dann läßt sich die Verschiebung $d\vec{x}$ **eindeutig** aus Gl. ([1.126](#)) berechnen, einem beliebigen Punkt in einer Umgebung von \vec{y} wird also **eindeutig** ein Punkt in einer Umgebung von \vec{x} zugeordnet.

Nun läßt sich entscheiden, ob die Abbildung $\vec{y} \mapsto \vec{x}$ lokal umkehrbar ist: offenbar muss man in der Lage sein, Punkten in der Umgebung von \vec{x} auch wieder **eindeutig** Punkte in der Umgebung von \vec{y} zuzuordnen. Genau dann ist die Abbildung nämlich **eindeutig**, und da sie dies für **alle** Punkte in den entsprechenden Umgebungen von \vec{y} und \vec{x} ist, auch

lokal umkehrbar. Diese Rücktransformation wird durch Auflösen von Gl. (1.126) nach $d\vec{y}$ vermittelt, also durch **Invertieren** der Funktionalmatrix,

$$d\vec{y} = F^{-1}(x; y)d\vec{x} .$$

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Invertierbarkeit einer Matrix ist aber, dass ihre Determinante nicht null ist,

$$\det F(x; y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_d}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_d}{\partial y_d} \end{vmatrix} \equiv \frac{\partial(x_1, \dots, x_d)}{\partial(y_1, \dots, y_d)} \neq 0 .$$

Die Variablentransformation $x_i = x_i(y_1, \dots, y_d)$ ist also genau dann lokal umkehrbar, wenn $\det F(x; y) \neq 0$.

Beispiel: Ebene Polarkoordinaten

Wir berechnen die Elemente der Funktionalmatrix mittels der Transformationsformeln (1.122) und (1.123),

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial r} &= \cos \varphi \quad , \quad \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi \quad , \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} &= \sin \varphi \quad , \quad \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} = r \cos \varphi \quad . \end{aligned}$$

Daraus folgt für die Determinante der Funktionalmatrix

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r . \quad (1.127)$$

Damit ist die Abbildung $(r, \varphi) \mapsto (x_1, x_2)$ überall mit Ausnahme des Punktes $r = 0$ umkehrbar.

Man kann die Variablen auch mehrfach aufeinanderfolgend wechseln. Wie dies vonstatten geht, beschreibt der nachfolgende

Satz: Seien

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(y_1, \dots, y_d) \quad , \quad i = 1, \dots, d \quad , \\ y_i &= y_i(z_1, \dots, z_d) \quad , \quad i = 1, \dots, d \quad , \end{aligned}$$

stetig partiell differenzierbare Variablentransformationen. Für die **zusammengesetzte Transformation**

$$x_i = x_i(y_1(z_1, \dots, z_d), \dots, y_d(z_1, \dots, z_d)) \quad , \quad i = 1, \dots, d \quad ,$$

gilt

$$\frac{\partial(x_1, \dots, x_d)}{\partial(z_1, \dots, z_d)} = \frac{\partial(x_1, \dots, x_d)}{\partial(y_1, \dots, y_d)} \frac{\partial(y_1, \dots, y_d)}{\partial(z_1, \dots, z_d)} .$$

Beweis: Gemäß der Kettenregel gilt

$$f(x; z)_{ij} \equiv \frac{\partial x_i}{\partial z_j} = \sum_{k=1}^d \frac{\partial x_i}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial z_j} \equiv \sum_{k=1}^d f(x; y)_{ik} f(y; z)_{kj} .$$

In Matrixform geschrieben lautet dies

$$F(x; z) = F(x; y) F(y; z) .$$

Für die Determinanten der Funktionalmatrizen gilt dann gemäß Gl. (1.113)

$$\det F(x; z) = \det F(x; y) \det F(y; z) , \quad \text{q.e.d.}$$

Als Korollar betrachten wir den Spezialfall $z_i = x_i$, d.h., die zusammengesetzte Transformation ändert nichts,

$$\mathbf{1} \equiv F(x; x) = F(x; y) F(y; x) .$$

Multiplikation mit der inversen Transformation $F^{-1}(x; y)$ ergibt

$$F^{-1}(x; y) = F(y; x) ,$$

woraus mit Gl. (1.116) folgt

$$\det F(y; x) = \frac{\partial(y_1, \dots, y_d)}{\partial(x_1, \dots, x_d)} = \det F^{-1}(x; y) = \frac{1}{\det F(x; y)} = \left(\frac{\partial(x_1, \dots, x_d)}{\partial(y_1, \dots, y_d)} \right)^{-1} .$$

Damit folgt aus $\det F(x; y) \neq 0$ auch $\det F(y; x) \neq 0$; wenn $x_i = x_i(y_1, \dots, y_d)$ lokal umkehrbar ist, so ist es auch $y_i = y_i(x_1, \dots, x_d)$.

Die Funktionaldeterminante bedeutet anschaulich, wie sich bei der Transformation $\vec{y} \mapsto \vec{x}$ das infinitesimale Flächenelement ($d = 2$) bzw. das infinitesimale Volumenelement ($d = 3$) ändert. Dies werden wir im folgenden Abschnitt genauer untersuchen.

1.5.2 Krummlinige Koordinaten

Wir definieren zunächst den Begriff der **Koordinatenlinie**. Wir betrachten wieder die Variablentransformation $\vec{y} \mapsto \vec{x}$, bzw. $x_i = x_i(y_1, \dots, y_d)$. Setzt man $d - 1$ der d Variablen y_i konstant, z.B. $y_i = \text{const. } \forall i \neq j$, so ergibt sich eine durch y_j parametrisierte Raumkurve $\vec{f}(y_j)$ im Raum der Variablen x_i . Dies ist die sog. **y_j -Koordinatenlinie**.

Beispiele:

1. **Kartesische Koordinaten in der Ebene:** Dies ist der Spezialfall, bei dem die Koordinaten gerade **nicht** gewechselt werden, also $\vec{y} \equiv \vec{x}$. Die $y_1 = x_1$ -Koordinatenlinie verläuft also in der (x_1, x_2) -Ebene parallel zur 1-Achse, und die $y_2 = x_2$ -Koordinatenlinie parallel zur 2-Achse, vgl. Abb. 1.46.

Die Koordinatenlinien bilden ein rechtwinkliges, geradliniges Netz.

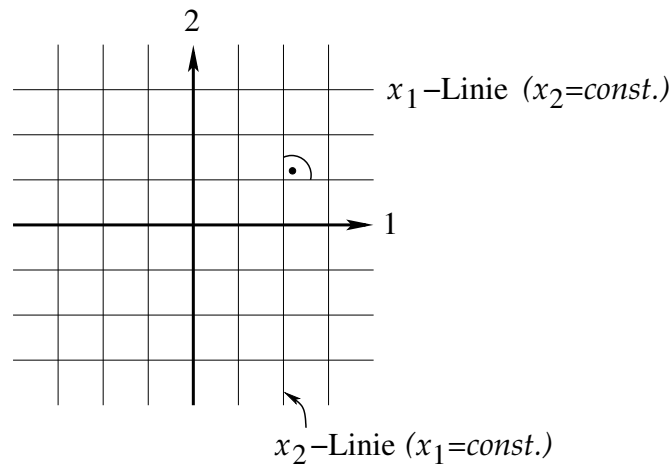


Abbildung 1.46: Koordinatenlinien für kartesische Koordinaten.

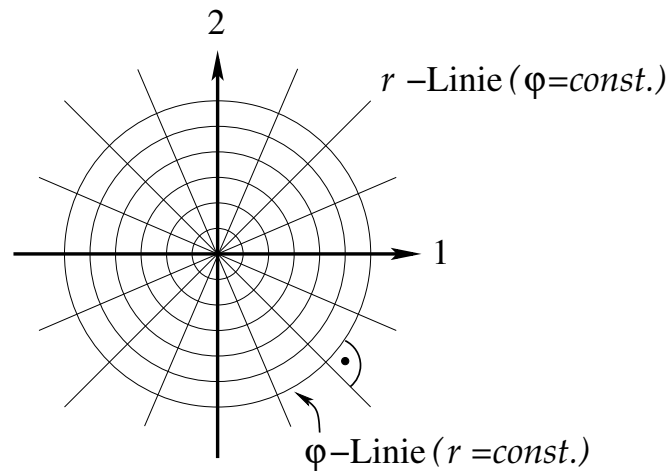


Abbildung 1.47: Koordinatenlinien für ebene Polarkoordinaten.

2. **Ebene Polarkoordinaten:** Hier findet ein echter Koordinatenwechsel statt. Die r -Linien, auf denen $\varphi = \text{const.}$, sind Geraden, die vom Ursprung aus ins Unendliche gehen. Die φ -Linien, für die $r = \text{const.}$, sind konzentrische Kreise um den Ursprung, vgl. Abb. [1.47](#).

Zwar sind die r -Linien Geraden, aber die φ -Linien sind gekrümmt. Die ebenen Polarkoordinaten sind damit das erste Beispiel für **krummlinige Koordinaten**. **Lokal** stehen r - und φ -Linien jedoch stets **senkrecht** aufeinander, vgl. Abb. [1.47](#). Man nennt solche Koordinatensysteme **krummlinig-orthogonal**.

Wir betrachten nun **infinitesimale Volumenelemente in krummlinigen Koordinaten**. Im Spezialfall der kartesischen Koordinaten gilt

$$dV = dx_1 dx_2 dx_3 ,$$

vgl. Abb. [1.48](#).

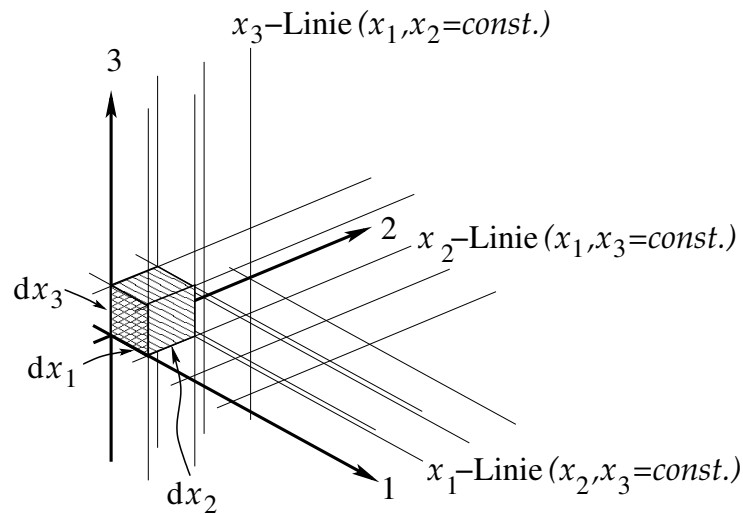


Abbildung 1.48: Das infinitesimale Volumenelement in kartesischen Koordinaten.

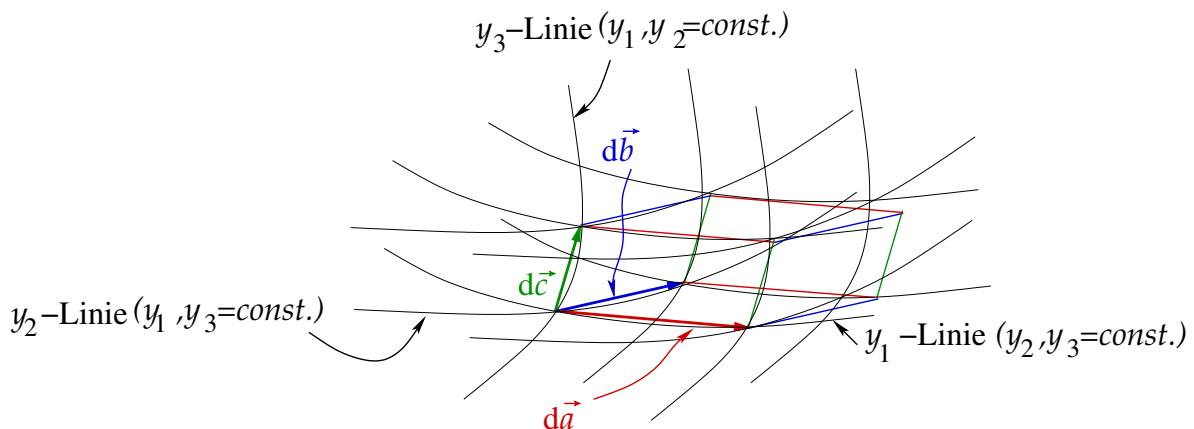


Abbildung 1.49: Das infinitesimale Volumenelement in krummlinigen Koordinaten.

Für ein Netz aus krummlinigen Koordinaten betrachten wir Abb. [1.49](#). Das infinitesimale Volumenelement kann durch ein Parallelepiped angenähert werden, welches durch die (nicht notwendigerweise orthogonalen) Vektoren $d\vec{a}$, $d\vec{b}$, $d\vec{c}$ aufgespannt wird. Der infinitesimale Vektor $d\vec{a}$ zeigt entlang der y_1 -Linie, also sind y_2 und y_3 entlang dieser Linien konstant. Wir können $d\vec{a}$ als Spezialfall einer infinitesimalen Verschiebung $d\vec{r}$ des Ortsvektors \vec{r} betrachten, die entlang der y_1 -Linie (also für konstante y_2, y_3) ausgeführt wird. Aus dem totalen Differential [\(1.77\)](#) der jeweiligen i -ten Komponente $dx_i(\vec{y})$ eines

beliebigen Verschiebungsvektors $d\vec{r}(\vec{y})$ folgt für diesen Spezialfall:

$$\begin{aligned} d\vec{a} \equiv d\vec{r}(\vec{y})|_{y_2, y_3} &= (dx_1(\vec{y}), dx_2(\vec{y}), dx_3(\vec{y}))_{y_2, y_3}^T \\ &= \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_1}{\partial y_j} dy_j, \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_2}{\partial y_j} dy_j, \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_3}{\partial y_j} dy_j \right)_{y_2, y_3}^T \\ &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1} dy_1, \frac{\partial x_2}{\partial y_1} dy_1, \frac{\partial x_3}{\partial y_1} dy_1 \right)^T \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_1} dy_1 . \end{aligned}$$

Analoges gilt für die infinitesimalen Vektoren $d\vec{b}$ (entlang der y_2 -Linie) und $d\vec{c}$ (entlang der y_3 -Linie),

$$\begin{aligned} d\vec{b} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_2} dy_2 , \\ d\vec{c} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_3} dy_3 . \end{aligned}$$

2.12.2016

Das Volumen des von $d\vec{a}$, $d\vec{b}$ und $d\vec{c}$ aufgespannten Parallelepipeds ist gleich dem Spatprodukt der drei Vektoren:

$$\begin{aligned} dV &= d\vec{a} \cdot (d\vec{b} \times d\vec{c}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} dy_1 & \frac{\partial x_2}{\partial y_1} dy_1 & \frac{\partial x_3}{\partial y_1} dy_1 \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_2} dy_2 & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} dy_2 & \frac{\partial x_3}{\partial y_2} dy_2 \\ \frac{\partial x_1}{\partial y_3} dy_3 & \frac{\partial x_2}{\partial y_3} dy_3 & \frac{\partial x_3}{\partial y_3} dy_3 \end{vmatrix} \\ &= \det F^T(x; y) dy_1 dy_2 dy_3 = \det F(x; y) dy_1 dy_2 dy_3 = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(y_1, y_2, y_3)} dy_1 dy_2 dy_3 , \end{aligned}$$

wobei wir die Glgen. (1.107) und (1.108) benutzt haben.

Ein vorgegebenes Volumen V kann man auch als Integral über dV innerhalb der durch das Volumen definierten Grenzen schreiben. Der Wert dieses Integrals darf sich natürlich beim Wechsel der Koordinaten nicht ändern,

$$V = \int dV = \int dx_1 dx_2 dx_3 = \int \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(y_1, y_2, y_3)} dy_1 dy_2 dy_3 .$$

Da dies für beliebig gewählte Volumina, also auch für infinitesimale gelten muss, erhalten wir die folgende wichtige Formel für den Wechsel von Integrationsvariablen in Volumenintegralen:

$$dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(y_1, y_2, y_3)} dy_1 dy_2 dy_3 . \quad (1.128)$$

Die Determinante der Funktionalmatrix, oder kurz die **Funktionaldeterminante**, beschreibt also, wie oben angekündigt, die Änderung im infinitesimalen Volumenelement beim Wechsel der Variablen.

Beispiel: Flächeninhalt des Kreises

Wir wenden Gl. (1.128) für den zweidimensionalen Fall an. Beim Übergang von kartesischen zu ebenen Polarkoordinaten gilt

$$dx_1 dx_2 = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(r, \varphi)} dr d\varphi = r dr d\varphi ,$$

wobei wir das Resultat (1.127) benutzt haben. Der Flächeninhalt des Kreises läßt sich nun einerseits in kartesischen Koordinaten berechnen, vgl. Abb. 1.50,

$$\begin{aligned} F_{\text{Kreis}} &= 4 \int_0^R dx_1 \int_0^{\sqrt{R^2-x_1^2}} dx_2 = 4 \int_0^R dx_1 \sqrt{R^2-x_1^2} \\ &= 4 \left[\frac{x_1}{2} \sqrt{R^2-x_1^2} + \frac{R^2}{2} \arcsin \frac{x_1}{R} \right]_0^R = 2 R^2 \arcsin 1 = \pi R^2 , \end{aligned}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass $\arcsin 1 = \pi/2$ und dass der Kreis aus vier gleichen Quadranten besteht. Andererseits können wir die Fläche in ebenen Polarkoordinaten berechnen,

$$F_{\text{Kreis}} = \int_0^R dr r \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \frac{R^2}{2} = \pi R^2 .$$

Es besteht wenig Zweifel, welches der elegantere, weil der Symmetrie des Problems angepasste Weg ist.

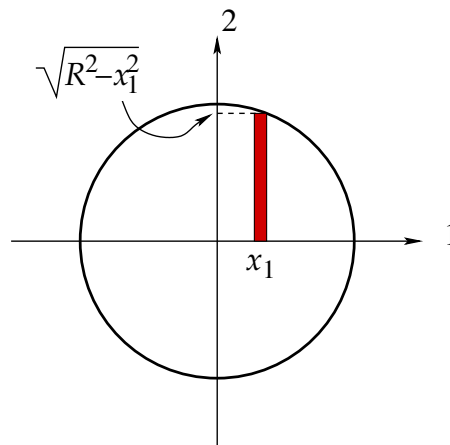


Abbildung 1.50: Zur Berechnung des Flächeninhalts des Kreises.

Wir betrachten nun die **Einheitsvektoren in krummlinigen Koordinaten**. Zunächst erinnern wir uns an die Einheitsvektoren in kartesischen Koordinaten,

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad (1.129)$$

vgl. Gl. (1.43), mit deren Hilfe wir den Ortsvektor ausdrücken als

$$\vec{r} = \sum_{j=1}^3 x_j \vec{e}_j ,$$

vgl. Gl. (1.48). In der festen, zeitunabhängigen kartesischen Basis (1.129) gilt für eine infinitesimale Verschiebung

$$d\vec{r} = \sum_{j=1}^3 dx_j \vec{e}_j . \quad (1.130)$$

Nun kann man den Ortsvektor aber auch als vektorwertige Funktion der drei Variablen x_1, x_2, x_3 auffassen, $\vec{r} = \vec{r}(x_1, x_2, x_3)$. Damit gilt nach der Definition des totalen Differentials (1.77) auch

$$d\vec{r} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j} dx_j . \quad (1.131)$$

Der Vergleich von Gl. (1.130) mit Gl. (1.131) liefert

$$\vec{e}_j = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_j} . \quad (1.132)$$

Wegen $\partial x_i / \partial x_j = \delta_{ij}$ ist dies ganz offensichtlich mit der Definition (1.129) konsistent. Die Identität (1.132) ist aber leicht auf krummlinige Koordinaten verallgemeinerbar.

Wir betrachten den Satz $\{y_1, y_2, y_3\}$ von **krummlinigen Koordinaten**. Der **Einheitsvektor in y_i -Richtung** soll **tangential** zur y_i -Koordinatenlinie liegen,

$$\vec{e}_{y_i} \sim \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i} ,$$

vgl. Abb. 1.51.

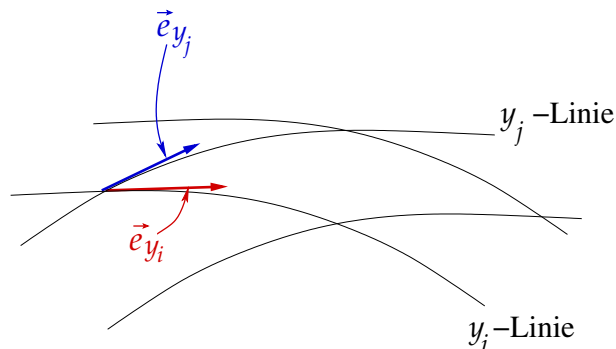


Abbildung 1.51: Einheitsvektoren in krummlinigen Koordinaten.

Um einen Einheitsvektor zu bekommen, muss man noch richtig normieren. Wir definieren den sog. **Skalenfaktor** als

$$b_{y_i} \equiv \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i} \right| . \quad (1.133)$$

Der Einheitsvektor in y_i -Richtung lautet damit

$$\vec{e}_{y_i} = b_{y_i}^{-1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i} . \quad (1.134)$$

Diese Basisvektoren bilden i.a. keine **ortsfeste** Basis, sondern ein **lokales** Vielbein (d.h. ein Zweibein in $d = 2$ Dimensionen, ein Dreibein in $d = 3$ Dimensionen, etc.).

Beispiel: Ebene Polarkoordinaten

Mit $\vec{r} = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)^T = \vec{r}(r, \varphi)$ berechnen wir die Einheitsvektoren gemäß Gl. (1.134):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} &= (\cos \varphi, \sin \varphi)^T, & b_r = 1 &\implies \vec{e}_r = (\cos \varphi, \sin \varphi)^T, \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} &= (-r \sin \varphi, r \cos \varphi)^T, & b_\varphi = r &\implies \vec{e}_\varphi = (-\sin \varphi, \cos \varphi)^T. \end{aligned}$$

Diese Basisvektoren sind nicht ortsfest, da sie mit dem Polarwinkel ihre Lage ändern, vgl. Abb. 1.52. Sie sind jedoch orthonormal, $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi = -\cos \varphi \sin \varphi + \sin \varphi \cos \varphi = 0$.

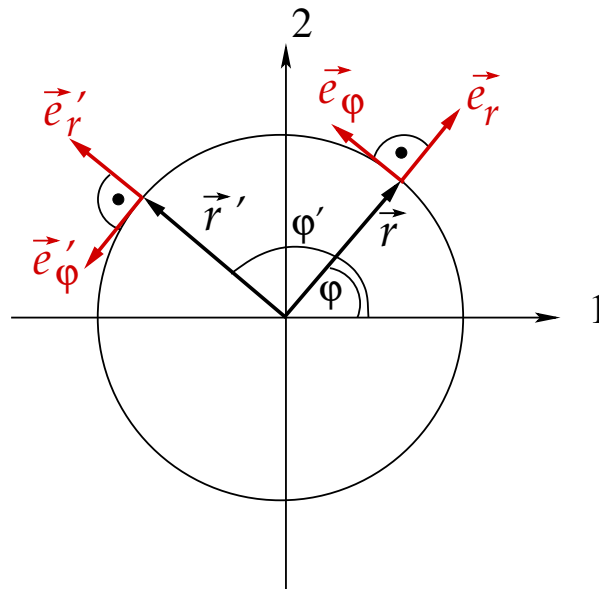


Abbildung 1.52: Die Einheitsvektoren für ebene Polarkoordinaten. Ihre Lage ändert sich als Funktion des Polarwinkels φ .

Man spricht von **krummlinig-orthonormalen** Basisvektoren, falls

$$\vec{e}_{y_i} \cdot \vec{e}_{y_j} = \delta_{ij} .$$

In $d = 3$ Dimensionen bilden diese Basisvektoren in geeigneter Reihenfolge eine rechtshändige Orthonormalbasis, d.h.

$$\vec{e}_{y_1} = \vec{e}_{y_2} \times \vec{e}_{y_3}, \quad \vec{e}_{y_2} = \vec{e}_{y_3} \times \vec{e}_{y_1}, \quad \vec{e}_{y_3} = \vec{e}_{y_1} \times \vec{e}_{y_2} . \quad (1.135)$$

Das **totale Differential** des Ortsvektors lautet in krummlinigen Koordinaten

$$d\vec{r} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_j} dy_j = \sum_{j=1}^3 b_{y_j} \vec{e}_{y_j} dy_j = \sum_{j=1}^3 b_{y_j} dy_j \vec{e}_{y_j}. \quad (1.136)$$

Beispiel: Ebene Polarkoordinaten

In diesem Fall enthält die Summe in Gl. (1.136) lediglich zwei Terme, den Variablen r und φ der ebenen Polarkoordinaten entsprechend:

$$d\vec{r} = dr \vec{e}_r + r d\varphi \vec{e}_\varphi.$$

Wir können auch die **Differentialoperatoren** aus Abschnitt 1.3.4 in **krummlinigen Koordinaten** ausdrücken:

1. **Gradient:** Wir erhalten die y_i -Komponente eines Gradientenfeldes $\vec{\nabla}\varphi$ durch Projektion auf den Einheitsvektor \vec{e}_{y_i} :

$$\vec{e}_{y_i} \cdot \vec{\nabla}\varphi = b_{y_i}^{-1} \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i} \cdot \vec{\nabla}\varphi = b_{y_i}^{-1} \left(\frac{\partial x_1}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial x_3}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \right) = b_{y_i}^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i},$$

wobei wir die Kettenregel für die Funktion $\varphi(\vec{r}(y_i))$ angewendet haben. Das Gradientenfeld hat daher in krummlinigen Koordinaten die Komponentendarstellung

$$\vec{\nabla}\varphi = \sum_{i=1}^3 \vec{e}_{y_i} b_{y_i}^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}. \quad (1.137)$$

Daraus ergibt sich der **Nabla-Operator** als

$$\vec{\nabla} = \sum_{i=1}^3 \vec{e}_{y_i} b_{y_i}^{-1} \frac{\partial}{\partial y_i}. \quad (1.138)$$

Für die spezielle Wahl $\varphi = y_j$ erhalten wir

$$\vec{\nabla} y_j = \sum_{i=1}^3 \vec{e}_{y_i} b_{y_i}^{-1} \frac{\partial y_j}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^3 \vec{e}_{y_i} b_{y_i}^{-1} \delta_{ij} = \vec{e}_{y_j} b_{y_j}^{-1},$$

was eine zu Gl. (1.134) alternative Formel für die Einheitsvektoren in krummlinigen Koordinaten ergibt:

$$\vec{e}_{y_i} = b_{y_i} \vec{\nabla} y_i. \quad (1.139)$$

2. **Divergenz:** Mit dem Nabla-Operator (1.138) und einem beliebigen Vektorfeld

$$\vec{a} = \sum_{j=1}^3 a_{y_j} \vec{e}_{y_j} \quad (1.140)$$