Diese Gleichung läßt sich analog der Zeilenorthonormalität so interpretieren, dass die **Spaltenvektoren**, die die Matrix D bilden, **orthonormal** zueinander stehen. Man spricht von der **Spaltenorthonormalität** der Drehmatrix.

Beispiel: Wir betrachten eine Drehung des Koordinatensystems um die z-Achse, vgl. Abb. 1.43. Eine solche Drehung verändert lediglich die x- und y-Komponenten des Ortsvektors $\vec{r}$, also die Komponenten von $\vec{\rho}$, der Projektion des Ortsvektors auf die $(x, y)-$Ebene. Die z-Komponente von $\vec{r}$ bleibt unverändert, $x_3' = x_3$.

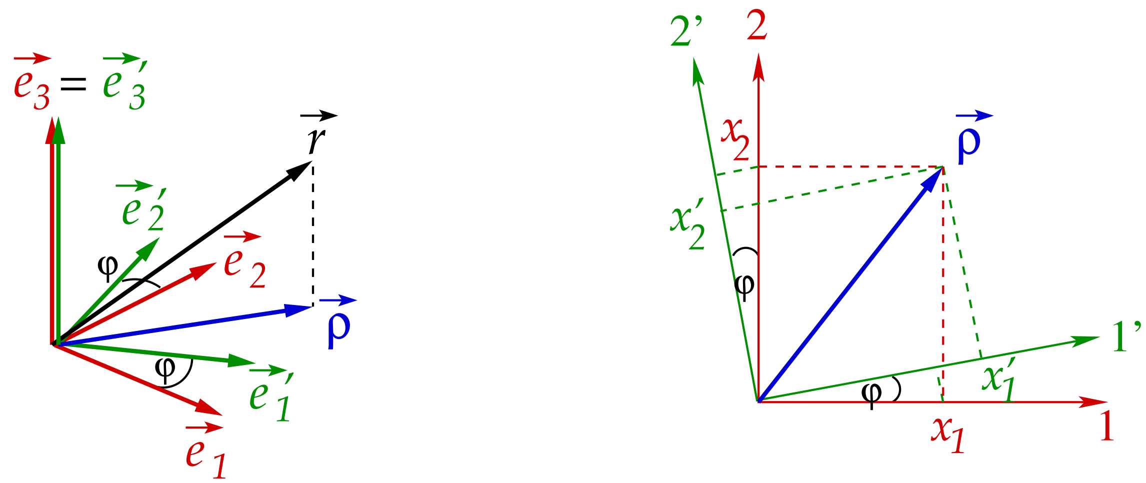

Abbildung 1.43: Drehung des Koordinatensystems um die z-Achse.

Wir betrachten zunächst die rechte Seite der Abb. 1.43. Eine geometrische Überlegung führt auf die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} x_1\,\vec{e}_1 &= x_1\,\cos\varphi\,\vec{e}\,'_1 - x_1\,\sin\varphi\,\vec{e}\,'_2\,, \\ x_2\,\vec{e}_2 &= x_2\,\sin\varphi\,\vec{e}\,'_1 + x_2\,\cos\varphi\,\vec{e}\,'_2\,. \end{aligned}$$

Die Projektion $\vec{\rho}$ des Ortsvektor ist aber in beiden Systemen identisch,

$$\begin{aligned} \vec{\rho} &= x_1\,\vec{e}_1 + x_2\,\vec{e}_2 \equiv x_1'\,\vec{e}\,'_1 + x_2'\,\vec{e}\,'_2 \\ &= (x_1\,\cos\varphi + x_2\,\sin\varphi)\,\vec{e}\,'_1 + (-x_1\,\sin\varphi + x_2\,\cos\varphi)\,\vec{e}\,'_2 \\ \Longrightarrow\quad x_1' &= x_1\,\cos\varphi + x_2\,\sin\varphi\,, \qquad (1.102) \\ x_2' &= -x_1\,\sin\varphi + x_2\,\cos\varphi\,. \qquad (1.103) \end{aligned}$$

Andererseits lassen sich die Komponenten im gedrehten System bei Kenntnis der Drehmatrix auch über Gl. (1.97) berechnen. Die Komponenten der Drehmatrix können aus ihrer Definition (1.93) und Abb. 1.43 bestimmt werden. Mit $\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \sin\varphi$ und $\cos(\frac{\pi}{2} + \varphi) = -\sin\varphi$ erhalten wir

$$\begin{array}{lll} d_{11} = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}\,'_1 = \cos\varphi\,, & d_{12} = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}\,'_1 = \sin\varphi\,, & d_{13} = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}\,'_1 = 0\,, \\ d_{21} = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}\,'_2 = -\sin\varphi\,, & d_{22} = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}\,'_2 = \cos\varphi\,, & d_{23} = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}\,'_2 = 0\,, \\ d_{31} = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}\,'_3 = 0\,, & d_{32} = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}\,'_3 = 0\,, & d_{33} = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}\,'_3 = 1\,, \end{array}$$

bzw. in Matrixschreibweise

$$D = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Damit ist

$$\vec{r}(\Sigma') = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = D\,\vec{r}(\Sigma) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} .$$

Nach den Regeln der Matrixmultiplikation führt dies ebenfalls auf die Gleichungen (1.102) und (1.103), sowie auf $x'_3 = x_3$.

Damit eine Matrix D eine Drehung beschreibt, muss sie eine orthogonale Matrix sein, d.h. Gl. (1.100) bzw. die Zeilenorthonormalität (1.95) und die Spaltenorthonormalität (1.101) müssen erfüllt sein. Aber führt diese Drehung eine rechtshändige Basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ in eine rechtshändige Basis $\{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'\}$ über? Dazu muss offenbar aus $\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = 1$ auch $\vec{e}_1{}' \cdot (\vec{e}_2{}' \times \vec{e}_3{}') = 1$ folgen. Dies kann man mit Hilfe der sog. **Determinante** von D überprüfen, $\det D$. Um die Händigkeit des Koordinatensystems bei der Drehung zu erhalten, muss $\det D = +1$ gelten (dies werden wir weiter unten beweisen). Diese Drehungen heißen **eigentliche** Drehungen. Falls $\det D = -1$, so handelt es sich um **uneigentliche** Drehungen. Man erhält sie aus den eigentlichen Drehungen durch Hinzunahme der **Raumspiegelung** (z.B. durch Inversion einer ungeraden Anzahl von Koordinatenachsen).

Orthogonale Matrizen in n Dimensionen bilden eine **Gruppe** im mathematischen Sinn, die man mit $O(n)$ bezeichnet. Orthogonale Matrizen, die zusätzlich noch $\det D = +1$ erfüllen, bilden eine Untergruppe der $O(n)$, die Gruppe der **speziellen** orthogonalen Matrizen, $SO(n)$. Es gilt $O(n) = SO(n) \times Z_2$. Die Gruppe Z_2 ist die **zyklische Gruppe** mit zwei Elementen, welche man zur Charakterisierung von Raumspiegelungen verwenden kann. Während die $SO(n)$ eine sog. **kontinuierliche Gruppe** darstellt, ist Z_2 eine sog. **diskrete Gruppe**.

1.4.4 Determinanten

Sei A eine $(n \times n)-$Matrix. Dann ist die **Determinante** von A definiert als

$$\det A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_P \operatorname{sgn}(P)\, a_{1\,p(1)}\, a_{2\,p(2)} \cdots a_{n\,p(n)} , \tag{1.104}$$

wobei $\{p(1), p(2), \ldots, p(n)\} \equiv P(1, 2, \ldots, n)$ eine **Permutation** der Folge $\{1, 2, \ldots, n\}$ ist. Eine Permutation ist definiert als eine Abfolge von **Transpositionen**, das sind **sukzessive** Vertauschungen benachbarter Elemente der Folge. **Gerade** Permutationen entstehen aus der ursprünglichen Folge durch eine **gerade** Zahl von Transpositionen, **ungerade** Permutationen entsprechend durch eine **ungerade** Zahl von Transpositionen.

Eine Permutation ändert die Reihenfolge der Elemente der Folge, jedes Element kommt aber weiterhin genau einmal vor. Dies bedeutet, dass jeder Summand auf der rechten Seite der Definition (1.104) ein Element aus jeder Zeile und ein Element aus jeder Spalte der Matrix A enthält. Die Summe läuft über **alle** möglichen Permutationen dieser Folge und besteht damit aus $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ Termen.

Das Symbol $\mathrm{sgn}\,(P)$ steht für das **Vorzeichen** der Permutation P. Es ist definiert als $\mathrm{sgn}\,(P) = (-1)^Z$, wobei Z die Zahl der Transpositionen ist, um aus $\{1, 2, \ldots, n\}$ die Folge $\{p(1), p(2), \ldots, p(n)\}$ zu erhalten. Mit anderen Worten, $\mathrm{sgn}\,(P) = +1$ für **gerade** Permutationen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ und $\mathrm{sgn}\,(P) = -1$ für **ungerade** Permutationen.

Für $n \leq 2$ ist die Determinante direkt aus ihrer Definition (1.104) berechenbar:

$$
\begin{aligned}
n = 1 \ : \quad \det A &= \det(a_{11}) = a_{11} \ , \\
n = 2 \ : \quad \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \mathrm{sgn}(12)\, a_{11}\, a_{22} + \mathrm{sgn}(21)\, a_{12}\, a_{21} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21} \ .
\end{aligned}
$$

Daraus resultiert eine einfache Merkregel für die Berechnung von $(2 \times 2)-$Determinanten: man subtrahiere das Produkt der beiden Nebendiagonalelemente vom Produkt der beiden Hauptdiagonalelemente.

Für $n > 2$ wird die Berechnung der Determinante gemäß ihrer Definition (1.104) schnell zu kompliziert, da die Zahl der Permutationen rapide ansteigt. Z.B. gibt es für $n = 3$ schon $3! = 6$ Terme unter der Summe. Hier hilft der sog. **Entwicklungssatz**:

$$
\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij}\, A_{ij} \ , \tag{1.105}
$$

wobei A_{ij} die sog. **Unterdeterminante** ist, die aus Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte aus $\det A$ resultiert. Man beachte, dass der Zeilenindex i in Gl. (1.105) fest vorgegeben, aber frei wählbar ist. Man entwickelt also nach der i-ten Zeile der Determinante. Bei konkreten Berechnungen ist es daher sinnvoll, die Zeile mit den meisten Nullen zu wählen, weil dann die Zahl der Terme in der Summe auf der rechten Seite von Gl. (1.105) auf ein Minimum reduziert werden kann.

Die Unterdeterminante A_{ij} ist die Determinante einer $[(n-1) \times (n-1)]-$Matrix, für die gemäß der Definition (1.104) $n! - (n-1)! = (n-1) \cdot (n-1)!$ weniger Terme in der Summe in Gl. (1.104) auftreten als für die ursprüngliche Determinante. Allerdings muss man i.a. n solcher Unterdeterminanten ausrechnen, es sei denn, einige Elemente a_{ij} der $i-$ten Zeile der Matrix A sind null.

In praktischen Berechnungen wendet man den Entwicklungssatz **rekursiv** an, also berechnet jede Unterdeterminante A_{ij} erneut mit Hilfe des Entwicklungssatzes. Dies führt letztlich auf $(2 \times 2)-$Unterdeterminanten, die man einfach wie oben beschrieben berechnen kann.

Man kann aber anstatt nach einer Zeile auch nach einer Spalte entwickeln,

$$
\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\, a_{ij}\, A_{ij} \ . \tag{1.106}
$$

Den Beweis führt man ausgehend von der Identität

$$
\det A = \det A^T \ , \tag{1.107}
$$

welche man durch Anwenden der Definition (1.104) der Determinanten und geeignetem Umsortieren der Terme beweist.

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir den Fall $n = 3$ und die Entwicklung nach der ersten Zeile. Dieser Spezialfall des Entwicklungssatzes ist als **Sarrus-Regel** bekannt:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= a_{11} (a_{22}\, a_{33} - a_{23}\, a_{32}) - a_{12} (a_{21}\, a_{33} - a_{23}\, a_{31}) + a_{13} (a_{21}\, a_{32} - a_{22}\, a_{31}) \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, a_{1i}\, a_{2j}\, a_{3k} \, .
\end{aligned}$$

Die letzte Zeile folgt auch direkt aus der Definition (1.104), wenn wir bedenken, dass ϵ_{ijk} mit dem Vorzeichen der Permutation (i, j, k) von $(1, 2, 3)$ identisch ist.

1.4.5 Rechenregeln für Determinanten

1. Multiplikation einer Zeile oder Spalte mit $\alpha \in \mathbb{R}$, z.B. für eine Zeile:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha\, a_{i1} & \cdots & \alpha\, a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.108}$$

   Der Beweis folgt direkt aus dem Entwicklungssatz, durch Entwickeln nach der betreffenden Zeile oder Spalte. n-faches Anwenden liefert

$$\det (\alpha\, A) = \alpha^n \det A \, .$$

2. Addition eines Vektors zu einer Zeile oder einer Spalte, z.B. für eine Zeile:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + b_1 & \cdots & a_{in} + b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_1 & \cdots & b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \, . \tag{1.109}$$

   Der Beweis folgt direkt aus dem Entwicklungssatz, durch Entwickeln nach der betreffenden Zeile oder Spalte.

3. Vertauschen einer benachbarten Zeile oder Spalte ändert das Vorzeichen der Deter-

minante, z.B. für eine Zeile,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} . \tag{1.110}$$

Dies beweist man direkt mit der Definition (1.104) der Determinante, unter Berücksichtigung, dass $\mathrm{sgn}\,(1,2,\ldots,i,i+1,\ldots,n) = -\mathrm{sgn}\,(1,2,\ldots,i+1,i,\ldots,n)$; eine weitere Transposition zweier Zahlen in einer gegebenen Permutation ändert das Vorzeichen der Permutation.

25.11.2016

4. Die Determinante einer Matrix mit zwei identischen Zeilen oder Spalten verschwindet, z.B. für eine Zeile:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 . \tag{1.111}$$

Der Beweis lautet wie folgt: zunächst vertauscht man Zeilen oder Spalten, bis die beiden identischen Zeilen oder Spalten **benachbart** sind. Aufgrund der Definition (1.104) mag sich dabei das Vorzeichen der Determinante ändern (bei einer ungeraden Zahl von Vertauschungen), oder aber es bleibt wie es ist (bei einer geraden Zahl von Vertauschungen). Dieses Vorzeichen spielt aber für die weitere Argumentation keine Rolle. Nun vertauscht man noch die beiden identischen benachbarten Zeilen oder Spalten. Nach Gl. (1.110) sollte sich dabei das Vorzeichen der Determinante ändern. Jedoch hat man die Determinante nicht verändert, da die beiden Zeilen oder Spalten identisch sind. Dies ist nur möglich, falls die Determinante null ist.

5. Addition einer mit einer Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ multiplizierten Zeile oder Spalte zu einer anderen Zeile oder Spalte ändert die Determinante nicht, z.B. für eine Zeile:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+\alpha\,a_{j1} & \cdots & a_{in}+\alpha\,a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} . \tag{1.112}$$

Hierbei wurden die Eigenschaften (1.109) und (1.111) ausgenutzt.

6. Die Determinante eines Produktes von zwei Matrizen ist gleich dem Produkt der jeweiligen Determinanten,
$$\det{(A\,B)} = \det A \, \det B \; . \tag{1.113}$$

7. Die Determinante einer Diagonalmatrix ist das Produkt der Diagonalelemente,
$$\det \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{i=1}^{n} a_i \; . \tag{1.114}$$
Der Beweis folgt direkt aus dem Entwicklungssatz.

8. Als Korollar zu Gl. (1.114) folgt: die Determinante der Einheitsmatrix ist 1,
$$\det \mathbf{1} = 1 \; . \tag{1.115}$$

9. Aus den Eigenschaften (1.113) und (1.115) folgt sofort
$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \; . \tag{1.116}$$
Beweis: $\det \mathbf{1} = \det{(A\,A^{-1})} = \det A \, \det A^{-1}$, q.e.d.

10. Multipliziert man die Elemente a_{ik} der i-ten Zeile mit $(-1)^{j+k}\,A_{jk}$, wobei $j \neq i$, und summiert über alle k, so ergibt sich
$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,(-1)^{j+k}\,A_{jk} = 0 \; . \tag{1.117}$$
Entsprechendes gilt für die Spalten,
$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}\,(-1)^{j+k}\,A_{kj} = 0 \; . \tag{1.118}$$
Zum Beweis von Gl. (1.117) definieren wir eine Matrix B, die mit A identisch ist, bis auf die Tatsache, dass die Elemente der j-ten Zeile wieder die gleichen sind wie die in der i-ten Zeile,
$$B = \begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ \text{Zeile } j \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \; .$$

Gemäß Gl. (1.111) verschwindet die Determinante von B. Andererseits ist nach dem Entwicklungssatz, bei Entwicklung nach der j-ten Zeile,

$$0 = \det B = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}\,(-1)^{j+k}\,A_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,(-1)^{j+k}\,A_{jk}\;, \quad \text{q.e.d.}$$

Der Beweis für Spalten geht analog.

1.4.6 Anwendungen

1. **Inverse Matrix:** Die Inverse A^{-1} einer Matrix A existiert genau dann, wenn $\det A \neq 0$, und sie hat die Elemente

$$a_{ij}^{-1} = \frac{(-1)^{i+j}\,A_{ji}}{\det A}\;. \tag{1.119}$$

Man beachte die Reihenfolge der Indizes in der Unterdeterminante A_{ji}!

Beweis: Wir definieren eine $(n \times n)-$Matrix B mit Elementen $b_{ij} = (-1)^{i+j}\,A_{ji}$. Nach dem Entwicklungssatz gilt

$$\begin{aligned}
\det A &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,(-1)^{i+j}\,A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,b_{ji} = (A\,B)_{ii} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j}\,A_{ij}\,a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} b_{ji}\,a_{ij} = (B\,A)_{jj}\;.
\end{aligned}$$

Hier haben wir in der ersten Zeile nach der i-ten Zeile und in der zweiten Zeile nach der j-ten Spalte entwickelt. Da i und j beliebig waren, sind offenbar **alle** Diagonalelemente der Produktmatrizen $A\,B$ und $B\,A$ identisch mit $\det A$. Andererseits verschwinden alle Nebendiagonalelemente aufgrund von Gl. (1.117),

$$(A\,B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,(-1)^{j+k}\,A_{jk} = 0 \quad \text{für } i \neq j\;.$$

Die Produktmatrizen haben also die Form

$$A\,B = B\,A = (\det A)\,\mathbf{1} \quad \Longleftrightarrow \quad (A\,B)_{ij} = (B\,A)_{ij} = (\det A)\,\delta_{ij}\;.$$

Multiplikation dieser Gleichung von links oder von rechts mit A^{-1} liefert

$$A^{-1} = \frac{B}{\det A} \quad \Longleftrightarrow \quad a_{ij}^{-1} = \frac{(-1)^{i+j} A_{ji}}{\det A}\;, \quad \text{q.e.d.}$$

2. **Vektorprodukt:** Die Berechnung von $\vec{a} \times \vec{b}$ läßt sich mit Hilfe der Sarrus-Regel gestalten:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} &= \vec{e}_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= \vec{e}_1 \,(a_2\, b_3 - a_3\, b_2) - \vec{e}_2\,(a_1\, b_3 - a_3\, b_1) + \vec{e}_3\,(a_1\, b_2 - a_2\, b_1) \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, a_i\, b_j\, \vec{e}_k \\ &= \vec{a} \times \vec{b}\,. \end{aligned}$$

Es ist zu beachten, dass der Ausdruck auf der linken Seite nur als mnemonische Hilfe (von griech.: $\mu\nu\acute{\eta}\mu\eta$, Gedächtnis, oder $\mu\nu\eta\mu o\nu\iota\kappa\acute{o}\varsigma$, ein gutes Gedächtnis habend; auf gut deutsch: Gedächtnisstütze) zur Berechnung der rechten Seite dient; eine Determinante mit **Vektoren** als Elemente einer Zeile ist mathematisch nicht wohldefiniert.

3. **Rotation:** Für die Rotation gilt entsprechendes,

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}\,.$$

4. **Spatprodukt:**

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\,.$$

Dies folgt aus der Regel für das Vektorprodukt, oder durch direktes Ausrechnen der Determinante.

Spezialfall:

$$\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \det \mathbf{1} = 1\,.$$

5. **Drehmatrix:** Unter welchen Voraussetzungen ist eine beliebige Matrix D eine Drehmatrix? Wir hatten gesehen, dass sie einerseits eine orthogonale Matrix sein muss, $D^T = D^{-1}$. Aus dieser Tatsache folgt sofort, dass ihre Determinante den Wert ± 1 annimmt,

$$\begin{aligned} 1 &= \det \mathbf{1} = \det\,(D\, D^{-1}) = \det\,(D\, D^T) = \det D \,\det D^T = (\det D)^2 \\ \Longrightarrow \quad \det D &= \pm 1\,, \end{aligned}$$

wobei wir die Glgen. (1.107), (1.113) und (1.115) benutzt haben.

Andererseits muss sie eine rechtshändige Basis $\{\vec{e}_1,\, \vec{e}_2,\, \vec{e}_3\}$ in eine ebenfalls rechtshändige Basis $\{\vec{e}_1',\, \vec{e}_2',\, \vec{e}_3'\}$ überführen, d.h. aus $\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = +1$ muss $\vec{e}_1' \cdot (\vec{e}_2' \times \vec{e}_3') =$

$+1$ folgen. Letzteres ist durch die Orthogonalität allein nicht gewährleistet. Wenn man z.B. in der i-ten Zeile die Vorzeichen aller Elemente umkehrt, $d_{ij} \to -d_{ij}$, dann ändert sich die Zeilenorthonormalität nicht, aber der gestrichene i-te Einheitsvektor ändert sein Vorzeichen,

$$\vec{e}_i' = \sum_{j=1}^{3} d_{ij}\,\vec{e}_j \quad \longrightarrow -\vec{e}_i' = \sum_{j=1}^{3} (-d_{ij})\,\vec{e}_j \;.$$

Wenn man den Vorzeichenwechsel der Elemente für eine ungerade Zahl von Zeilen durchführt, macht man aus einem rechtshändigen Koordinatensystem ein linkshändiges. Offensichtlich bewirkt diese Änderung auch einen Vorzeichenwechsel der Determinante, $\det D \to -\det D$.

Aber welches Vorzeichen hat $\det D$ für die Überführung eines rechtshändigen in ein rechtshändiges System? Hierzu benutzen wir die für rechtshändige Systeme gültige Identität (1.44) und berechnen mit der Drehung (1.92) der Einheitsvektoren und der Sarrus-Regel

$$\vec{e}_1' \cdot (\vec{e}_2' \times \vec{e}_3') = \sum_{m,n,r=1}^{3} d_{1m}\,d_{2n}\,d_{3r}\,\vec{e}_m \cdot (\vec{e}_n \times \vec{e}_r) = \sum_{m,n,r=1}^{3} \epsilon_{mnr}\,d_{1m}\,d_{2n}\,d_{3r} = \det D \;.$$

Damit nun das gestrichene Koordinatensystem wieder ein rechtshändiges System ist, muss $\det D = +1$ gelten.

6. **Lineare Gleichungssysteme:** Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \ldots + a_{nn}\,x_n & = & b_n \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad A\,\vec{x} = \vec{b}\;. \tag{1.120}$$

Falls $\vec{b} = 0$, spricht man von einem **homogenen** Gleichungssystem, andernfalls von einem **inhomogenen** Gleichungssystem. Dieses Gleichungssystem hat genau dann eine eindeutige Lösung, wenn $\det A \neq 0$. Die **Cramersche Regel** gibt an, wie diese Lösung zu konstruieren ist. Wir betrachten die Matrix

$$A_k = \begin{array}{c} \text{Spalte } k \\ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} ,$$

d.h. die Matrix, die sich aus A durch Ersetzen der k-ten Spalte durch den Vektor $\vec{b}$ ergibt. Dann ist die Lösung des Gleichungssystems (1.120) gegeben durch

$$x_k = \frac{\det A_k}{\det A}\;, \quad k = 1, \ldots, n\;. \tag{1.121}$$

Beweis: Wir multiplizieren die n Gleichungen (1.120) mit $(-1)^{i+k} A_{ik}$, wobei k fest gewählt wird und i der jeweilige Zeilenindex ist,

$$\begin{aligned}(a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n)\,(-1)^{1+k}\,A_{1k} &= b_1\,(-1)^{1+k}\,A_{1k}\\ &\vdots \\ (a_{n1}\,x_1 + a_{n2}\,x_2 + \ldots + a_{nn}\,x_n)\,(-1)^{n+k}\,A_{nk} &= b_n\,(-1)^{n+k}\,A_{nk}\ ,\end{aligned}$$

und summieren alle Gleichungen auf,

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,(-1)^{i+k}\,A_{ik}\right) x_j = \sum_{i=1}^{n} b_i\,(-1)^{i+k}\,A_{ik}\ .$$

Der Ausdruck in der Klammer auf der linken Seite der Gleichung verschwindet gemäß Gl. (1.118) für $j \neq k$, so dass lediglich ein Term in der Summe über j übrig bleibt,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\,(-1)^{i+k}\,A_{ik}\,x_k \equiv x_k \det A = \sum_{i=1}^{n} b_i\,(-1)^{i+k}\,A_{ik} = \det A_k\ ,$$

wobei wir auf der rechten Seite den Entwicklungssatz für die Entwicklung nach der k-ten Spalte der Determinante von A_k angewendet haben. Daraus folgt sofort die Behauptung, q.e.d.

Wir schließen mit einer Bemerkung zu homogenen linearen Gleichungssystemen. Wegen $\vec{b} = 0$ ist auch $\det A_k = 0$. Falls $\det A \neq 0$, bleibt nach der Cramerschen Regel nur die triviale Lösung, $\vec{x} = 0$. Nichttriviale Lösungen $\vec{x} \neq 0$ kann es also nur für $\det A = 0$ geben. Dies ist ein häufig verwendetes Kriterium, um zu entscheiden, ob ein Gleichungssystem nichttriviale Lösungen hat. Es bedeutet aber auch, dass nicht alle Zeilen oder Spalten von A **linear unabhängig** sind. Mit anderen Worten, **linear abhängige** Zeilen oder Spalten lassen sich durch eine geeignete Linearkombination der anderen ausdrücken. Wendet man nun Eigenschaft (1.112) mehrfach an, kann man auf diese Weise eine Nullzeile generieren. Dann verschwindet aber auch die Determinante.

1.5 Koordinatensysteme

1.5.1 Transformation der Variablen

Bislang wurden kartesische Koordinatensysteme betrachtet, die man durch Drehungen ineinander überführen kann. Kartesische Koordinatensysteme sind jedoch unzweckmäßig, wenn man beispielsweise ein Problem mit **sphärischer Symmetrie**, d.h. **Kugelsymmetrie**, lösen möchte. In diesem Fall ist es besser, sog. **Kugelkoordinaten** zu verwenden. I.a. sollte man das Koordinatensystem der **Symmetrie** des Problems anpassen. Dadurch vereinfacht man in der Regel den Rechenaufwand. Die neuen Koordinaten sind i.a. nicht kartesisch. Im folgenden beschäftigen wir uns mit der Frage, welche Gesetzmäßigkeiten beim Übergang von einem zum anderen Koordinatensystem zu beachten sind.