14.11.2016

1.3.4 Gradient, Divergenz, Rotation

Aus den partiellen Ableitungen des skalaren Feldes $\varphi(\vec{r})$ nach den einzelnen Komponenten des Ortsvektors kann man ein Vektorfeld konstruieren, das sog. **Gradientenfeld** bzw. den **Gradienten** von φ,

$$\operatorname{grad}\varphi(\vec{r}) \equiv \left(\frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial x_2}, \frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial x_3}\right)^T = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial x_j}\,\vec{e}_j\ . \tag{1.78}$$

Eine alternative (modernere und daher weitaus häufiger vorkommende) Schreibweise für den Gradienten ist die folgende. Man definiert zunächst den sog. **Nabla-Operator**, einen **vektorwertigen Differentialoperator**,

$$\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)^T = \sum_{j=1}^{3} \vec{e}_j\,\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{3} \vec{e}_j\,\partial_j\ . \tag{1.79}$$

Dieser Operator wirkt auf Funktionen, die rechts von ihm stehen. Damit läßt sich der Gradient von $\varphi(\vec{r})$ auch schreiben als

$$\operatorname{grad}\varphi(\vec{r}) = \vec{\nabla}\varphi(\vec{r})\ .$$

Mit dem infinitesimalen Differenzenvektor $\mathrm{d}\vec{r} = (\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_3)$ kann man daher das totale Differential (1.77) als **Skalarprodukt** des Gradienten von $\varphi(\vec{r})$ mit $\mathrm{d}\vec{r}$ schreiben,

$$\mathrm{d}\varphi(\vec{r}) = [\operatorname{grad}\varphi(\vec{r})]\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \left[\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})\right]\cdot\mathrm{d}\vec{r}\,. \tag{1.80}$$

Wie kann man sich den Gradientenvektor eines Feldes veranschaulichen? Die infinitesimale Positionsänderung $\mathrm{d}\vec{r}$ ist beliebig, also können wir sie im speziellen entlang einer Richtung wählen, in der sich $\varphi(\vec{r})$ **nicht** ändert, also entlang einer Höhenlinie $\varphi(\vec{r}) = const.$, entlang der gilt $\mathrm{d}\varphi(\vec{r}) = 0$. Dann ist

$$0 = \left[\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})\right]\cdot\mathrm{d}\vec{r}\,\Big|_{\text{Höhenlinie}} \quad\Longrightarrow\quad \vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) \perp \mathrm{d}\vec{r}\,.$$

Der Gradient steht also **senkrecht** auf den Höhenlinien, vgl. Abb. 1.41(a). Gleichung (1.80) läßt sich nun wie folgt interpretieren:

$$\mathrm{d}\varphi(\vec{r}) = |\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})|\,|\mathrm{d}\vec{r}|\,\cos\theta\,,$$

wobei θ der Winkel zwischen $\vec{\nabla}\varphi$ und $\mathrm{d}\vec{r}$ ist, vgl. Abb. 1.41(b). Falls $\theta = 0$, dann steht $\mathrm{d}\vec{r}$ **parallel** zu $\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$, also **senkrecht** zu den Höhenlinien und die Änderung $\mathrm{d}\varphi(\vec{r})$ ist maximal. Falls $\theta = \pi/2$, dann steht $\mathrm{d}\vec{r}$ senkrecht zu $\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$, also entlang einer Höhenlinie und $\mathrm{d}\varphi(\vec{r})$ verschwindet. Für jeden Winkel $0 < \theta < \pi/2$ ist $\mathrm{d}\varphi(\vec{r}) > 0$, aber gegenüber der maximal möglichen Änderung um $\cos\theta < 1$ reduziert.

Rechenregeln:

1. $\vec{\nabla}(\varphi_1 + \varphi_2) = \vec{\nabla}\varphi_1 + \vec{\nabla}\varphi_2$.

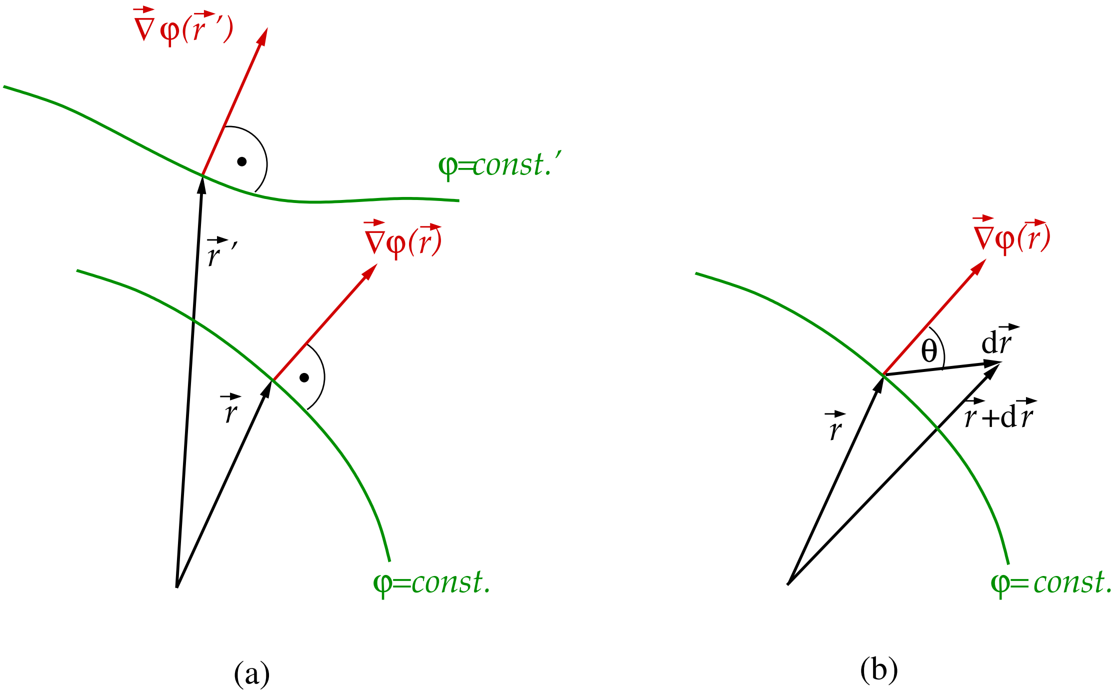

Abbildung 1.41: (a) Veranschaulichung des Gradientenfeldes. (b) Lage der Vektoren $\vec\nabla\varphi(\vec r)$ und $\mathrm{d}\vec r$ zur Bestimmung des Skalarprodukts $\mathrm{d}\varphi(\vec r) = \vec\nabla\varphi(\vec r)\cdot\mathrm{d}\vec r$.

2. $\vec\nabla(\varphi_1\varphi_2) = (\vec\nabla\varphi_1)\varphi_2 + \varphi_1\vec\nabla\varphi_2$.

Den Beweis führt man am einfachsten in Komponentenschreibweise.

Beispiele:

1. Sei $\vec a = \overrightarrow{const.}$. Dann ist

$$\begin{aligned}\vec\nabla(\vec a\cdot\vec r) &= \vec\nabla\left(\sum_{i=1}^{3} a_i\,x_i\right) = \sum_{i=1}^{3} a_i\,\vec\nabla x_i = \sum_{i=1}^{3} a_i\sum_{j=1}^{3}\vec e_j\,\partial_j x_i = \sum_{i=1}^{3} a_i\sum_{j=1}^{3}\vec e_j\,\delta_{ij}\\ &= \sum_{i=1}^{3} a_i\,\vec e_i = \vec a\,.\end{aligned}$$

2. Wegen Gl. (1.73) ist

$$\vec\nabla r = \sum_{i=1}^{3}\vec e_i\,\partial_i\,r = \sum_{i=1}^{3}\vec e_i\,\frac{x_i}{r} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{3}\vec e_i\,x_i = \frac{\vec r}{r} = \hat r\,. \tag{1.81}$$

3. Wegen $\partial_i\,r^{-2} = -2\,r^{-3}\,\partial_i\,r$ und Gl. (1.73) ist

$$\vec\nabla\frac{1}{r^2} = \sum_{i=1}^{3}\vec e_i\,\partial_i\frac{1}{r^2} = -\frac{2}{r^3}\sum_{i=1}^{3}\vec e_i\,\frac{x_i}{r} = -\frac{2}{r^3}\,\hat r\,.$$

4. Mit $f'(r) \equiv \mathrm{d}f(r)/\mathrm{d}r$ und Gl. (1.73) ist
$$\vec{\nabla} f(r) = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \, \partial_i f(r) = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \, \frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r} \, \partial_i \, r = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \, \frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r} \, \frac{x_i}{r} = f'(r) \, \hat{r} \, .$$

Der Gradient ist ausschließlich für **skalare** Felder definiert. Der Nabla-Operator ist aber formal ein Vektor, der mit anderen Vektoren durch das Skalarprodukt oder das Vektorprodukt verknüpft werden kann. Die Verknüpfung des Nabla-Operators mit einem stetig differenzierbaren Vektorfeld $\vec{a}(\vec{r})$ mittels des Skalarprodukt führt zum Begriff der **Divergenz** des Vektorfeldes $\vec{a}(\vec{r})$,

$$\operatorname{div} \vec{a}(\vec{r}) \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{a}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^{3} \partial_j \, a_j(\vec{r}) \, . \tag{1.82}$$

Man nennt die Divergenz von $\vec{a}(\vec{r})$ auch das **Quellenfeld** von $\vec{a}(\vec{r})$. Wir werden die physikalische Interpretation aber später ausführlich diskutieren.

Rechenregeln:

1. $\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} + \vec{\nabla} \cdot \vec{b}$.
2. Für $\gamma = const. \in \mathbb{R}$ gilt $\vec{\nabla} \cdot (\gamma \vec{a}) = \gamma \, \vec{\nabla} \cdot \vec{a}$.
3. Für ein skalares Feld φ und ein Vektorfeld $\vec{a}$ gilt $\vec{\nabla} \cdot (\varphi \, \vec{a}) = \varphi \, \vec{\nabla} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \varphi$. Diese Gleichung lautet in etwas antiquierter Fassung $\operatorname{div} (\varphi \, \vec{a}) = \varphi \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \cdot \operatorname{grad} \varphi$.

Der Beweis gelingt sehr einfach in Komponentenschreibweise für das Skalarprodukt.

Beispiele:

1. Sei $\vec{a} = \overrightarrow{const.}$. Dann folgt $\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 0$; konstante Vektorfelder sind quellenfrei.
2. $\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \sum_{j=1}^{3} \partial_j x_j = 3$.
3. Sei $\vec{a} = \overrightarrow{const.}$. Dann ist
$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{r} \times \vec{a}) &= \sum_{k=1}^{3} \partial_k (\vec{r} \times \vec{a})_k = \sum_{k=1}^{3} \partial_k \sum_{i,j=1}^{3} \epsilon_{ijk} \, x_i \, a_j \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \, a_j \, \partial_k \, x_i = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \, a_j \, \delta_{ik} = 0 \, , \end{aligned}$$
d.h. das Feld $\vec{r} \times \vec{a}$ ist quellenfrei.

Das Skalarprodukt des Nabla-Operators mit sich selbst führt auf einen neuen Operator, den sog. **Laplace-Operator** Δ:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi(\vec{r}) &\equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \varphi(\vec{r}) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 \varphi(\vec{r})}{\partial x_j^2} \equiv \Delta \varphi(\vec{r}) \, , \\ \text{mit } \Delta &= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \equiv \sum_{j=1}^{3} \partial_j^2 \, . \end{aligned} \tag{1.83}$$

Zum Schluß verknüpfen wir noch den Nabla-Operator mit einem stetig differenzierbaren Vektorfeld $\vec{a}(\vec{r})$ mittels des Kreuzprodukts. Dies führt zum Begriff der **Rotation** des Vektorfelds $\vec{a}(\vec{r})$,

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec{a}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\vec{a}(\vec{r}) = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\,\partial_i\,a_j(\vec{r})\,\vec{e}_k \\ = \vec{e}_1\left(\frac{\partial a_3(\vec{r})}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2(\vec{r})}{\partial x_3}\right) + \vec{e}_2\left(\frac{\partial a_1(\vec{r})}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3(\vec{r})}{\partial x_1}\right) + \vec{e}_3\left(\frac{\partial a_2(\vec{r})}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1(\vec{r})}{\partial x_2}\right)\end{aligned} \tag{1.84}$$

Die Rotation definiert das sog. **Wirbelfeld** eines Vektorfeldes $\vec{a}(\vec{r})$; mehr zur physikalischen Interpretation folgt später.

Rechenregeln:

1. $\vec{\nabla}\times(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{\nabla}\times\vec{a} + \vec{\nabla}\times\vec{b}$.
2. Für $\gamma = const. \in \mathbb{R}$ gilt $\vec{\nabla}\times(\gamma\,\vec{a}) = \gamma\,\vec{\nabla}\times\vec{a}$.
3. $\vec{\nabla}\times(\varphi\,\vec{a}) = \varphi\,\vec{\nabla}\times\vec{a} + (\vec{\nabla}\varphi)\times\vec{a}$. Beweis als Übungsaufgabe.
4. Für zweimal stetig differenzierbare skalare Felder $\varphi(\vec{r})$ gilt:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi(\vec{r}) = \vec{\nabla}\times\left[\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})\right] = 0\;, \tag{1.85}$$

Gradientenfelder sind stets wirbelfrei.
Beweis:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\varphi) &= \sum_{i,j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\,\partial_i(\partial_j\,\varphi)\,\vec{e}_k = \sum_{i,j,k=1}^{3}\frac{1}{2}\left(\epsilon_{ijk}-\epsilon_{jik}\right)\left(\partial_i\,\partial_j\,\varphi\right)\vec{e}_k \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\left(\partial_i\,\partial_j\,\varphi\right)\vec{e}_k - \frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^{3}\epsilon_{jik}\left(\partial_j\,\partial_i\,\varphi\right)\vec{e}_k\;,\end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Zeile im zweiten Term die zweifache stetige Differenzierbarkeit von φ ausgenutzt haben, welche auf $\partial_i\,\partial_j\,\varphi = \partial_j\,\partial_i\,\varphi$ führt. Wenn wir nun im zweiten Term die Umbenennung $i \leftrightarrow j$ in den Summationsindizes vornehmen, sehen wir, dass der zweite Term identisch mit dem ersten ist, die beiden Terme sich also gegenseitig wegheben, q.e.d.

Bemerkung: Die Beweisidee stützt sich auf folgende allgemein gültige Regel. Sei $a_{i_1 i_2\cdots i\cdots j\cdots i_n}$ ein Tensor n. Stufe, der **symmetrisch** in den Indizes i und j ist, $a_{i_1 i_2\cdots i\cdots j\cdots i_n} = a_{i_1 i_2\cdots j\cdots i\cdots i_n}$, und $b_{i_1 i_2\cdots i\cdots j\cdots i_m}$ ein Tensor m. Stufe, der **antisymmetrisch** im gleichen Indexpaar ist, $b_{i_1 i_2\cdots i\cdots j\cdots i_m} = -b_{i_1 i_2\cdots j\cdots i\cdots i_m}$. Dann gilt

$$\sum_{i,j} a_{i_1 i_2\cdots i\cdots j\cdots i_n}\,b_{i_1 i_2\cdots i\cdots j\cdots i_m} = 0\;. \tag{1.86}$$

Der Beweis erfolgt analog dem für obige Rechenregel 4., indem man unter Benutzung von $b_{i_1 i_2 \cdots i \cdots j \cdots i_m} = (b_{i_1 i_2 \cdots i \cdots j \cdots i_m} - b_{i_1 i_2 \cdots j \cdots i \cdots i_m})/2$ die Doppelsumme in zwei Terme aufspaltet, die Symmetrie von $a_{i_1 i_2 \cdots i \cdots j \cdots i_n}$ im zweiten Term ausnutzt und schließlich die Summationsindizes $i \leftrightarrow j$ umbenennt.

5. Für zweimal stetig differenzierbare Vektorfelder $\vec{a}(\vec{r})$ gilt:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot \left[\vec{\nabla} \times \vec{a}(\vec{r}) \right] = 0 \,, \tag{1.87}$$

Wirbelfelder sind stets quellenfrei.
Beweis:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) &= \sum_{i=1}^{3} \partial_i \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{jki} \, (\partial_j \, a_k) = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{jki} \, (\partial_i \, \partial_j \, a_k) \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{3} \frac{1}{2} \, (\epsilon_{jki} - \epsilon_{ikj}) \, (\partial_i \, \partial_j \, a_k) = \sum_{i,j,k=1}^{3} \frac{1}{2} \, (\epsilon_{ijk} - \epsilon_{jik}) \, (\partial_i \, \partial_j \, a_k) \,. \end{aligned}$$

Ab hier verläuft der Beweis analog dem in der vorangegangenen Regel 4. Man erhält das Ergebnis aber auch schon ausgehend von der vorangehenden Zeile unter Benutzung von Gl. (1.86), denn ϵ_{jki} ist antisymmetrisch in i und j, während $\partial_i \, \partial_j \, a_k$ symmetrisch in diesen beiden Indizes ist, q.e.d.

6. Ein Vektorfeld, welches in Richtung des Ortsvektors zeigt und nur vom Betrag des Ortsvektors abhängt, z.B. $f(r)\, \hat{r}$, bezeichnet man als **Zentralfeld**. Es gilt:

$$\vec{\nabla} \times [f(r)\, \hat{r}] = 0 \,, \tag{1.88}$$

Zentralfelder sind stets wirbelfrei.
Beweis:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times [f(r)\, \hat{r}] &= \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \, \partial_i \left[f(r) \, \frac{x_j}{r} \right] \vec{e}_k \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \left[f'(r) \, \frac{x_i}{r} \, \frac{x_j}{r} + f(r) \, \frac{r \, \partial_i \, x_j - x_j \, \partial_i \, r}{r^2} \right] \vec{e}_k \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \left[f'(r) \, \frac{x_i \, x_j}{r^2} + f(r) \, \frac{r \, \delta_{ij} - x_i \, x_j / r}{r^2} \right] \vec{e}_k = 0 \,, \end{aligned}$$

nach Anwendung von Gl. (1.86), denn der Ausdruck in eckigen Klammern ist symmetrisch in den Indizes i und j, während ϵ_{ijk} antisymmetrisch ist, q.e.d.

7. Für zweimal stetig differenzierbare Vektorfelder $\vec{a}(\vec{r})$ gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{a}(\vec{r}) &= \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{a}(\vec{r}) - \Delta \, \vec{a}(\vec{r}) \\ \text{oder} \quad \vec{\nabla} \times \left[\vec{\nabla} \times \vec{a}(\vec{r}) \right] &= \vec{\nabla} \left[\vec{\nabla} \cdot \vec{a}(\vec{r}) \right] - \Delta \, \vec{a}(\vec{r}) \,. \end{aligned} \tag{1.89}$$

Beweis als Übungsaufgabe.

1.4 Matrizen und Determinanten

18.11.2016

1.4.1 Matrizen

Ein rechteckiges Zahlenschema aus m Zeilen und n Spalten

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

heißt $\boldsymbol{(m \times n)}$**−Matrix**.

Zwei $(m \times n)$−Matrizen $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ sind **identisch**, wenn alle ihre Elemente identisch sind, $a_{ij} = b_{ij} \;\; \forall\, i, j\,,\;\; i = 1, \dots, m\,,\;\; j = 1, \dots, n$.

Spezielle Matrizen:

1. **Quadratische Matrix:** $m = n$.
2. **Zeilenvektor:** $m = 1$.
3. **Spaltenvektor:** $n = 1$.
4. **Nullmatrix:** alle Elemente sind null.
5. **Symmetrische Matrix:** quadratische Matrix mit $a_{ij} = a_{ji} \;\; \forall\, i, j$. Insbesondere ist die Matrix dann symmetrisch gegenüber einer Spiegelung ihrer Elemente an der Hauptdiagonalen.
   Beispiel:
   $$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$
6. **Diagonalmatrix:** quadratische Matrix mit $a_{ij} = a_i\,\delta_{ij}$; nur die Elemente auf der Hauptdiagonalen sind von null verschieden,
   $$\mathrm{diag}\,(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}.$$
7. **Einheitsmatrix:** quadratische Matrix mit $a_{ij} = \delta_{ij}$, bzw. Diagonalmatrix mit $a_i = 1$,
   $$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. **Transponierte Matrix:** $A^T = (a^T_{ij}) = (a_{ji})$. Sie folgt aus der Matrix A durch Vertauschen von Zeilen und Spalten,
$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} .$$
Die transponierte Matrix A^T ist eine $(n \times m)-$Matrix.

Rang einer Matrix: Man kann die m Zeilen bzw. n Spalten einer $(m \times n)-$Matrix als Zeilen- bzw. Spaltenvektoren interpretieren. Die Anzahl linear unabhängiger Zeilen- bzw. Spaltenvektoren heißt **Zeilen-** bzw. **Spaltenrang** der Matrix. Man kann zeigen, dass der Zeilenrang mit dem Spaltenrang identisch ist, deshalb spricht man allgemein vom **Rang** der Matrix.

1.4.2 Rechenregeln für Matrizen

1. **Addition:** A, B seien $(m \times n)-$Matrizen. Dann ist $C = A + B$ eine $(m \times n)-$Matrix mit den Elementen
$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall\, i, j \; .$$
Matrizen werden also elementweise addiert. Es ist klar, dass man nur Matrizen **gleichen** Typs, also mit gleicher Anzahl von Zeilen und Spalten addieren kann.

2. **Multiplikation mit reellen Zahlen:** A sei eine $(m \times n)-$Matrix und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt
$$\lambda\, A = (\lambda\, a_{ij}) \; .$$
Jedes Element von A wird mit λ multipliziert.

3. **Multiplikation von Matrizen:** Sei A eine $(m \times n)-$Matrix und B eine $(n \times r)-$Matrix. Dann ist $C = AB$ eine $(m \times r)-$Matrix mit den Elementen
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} \; , \quad i = 1, \ldots, m \; , \quad j = 1, \ldots, r \; .$$
Mit anderen Worten, c_{ij} ist das Skalarprodukt des i-ten **Zeilen**vektors von A mit dem j-ten **Spalten**vektor von B,
$$\begin{array}{cc} & \\ \text{Zeile } i & \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \text{Spalte } j \\ \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & \text{Spalte } j \\ \text{Zeile } i & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \end{array} .$$
Offenbar ist die Matrizenmultiplikation **nur** für den Fall definiert, dass die **Anzahl der Spalten** der ersten Matrix A mit der **Anzahl der Zeilen** der zweiten Matrix B übereinstimmt.

Spezialfälle:

(i) $m = r = 1$. In diesem Fall ist A ein Zeilenvektor und B ein Spaltenvektor und die Matrix C besteht aus einem einzigen Element, c_{11}, welches mit dem Skalarprodukt der beiden Vektoren identisch ist,

$$C = A\,B = (a_{11}, \ldots, a_{1n}) \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}\, b_{k1} = c_{11} \;.$$

(ii) $r = 1$. In diesem Fall ist A eine $(m \times n)-$Matrix, aber B ein n-dimensionaler Spaltenvektor. Damit ist C ein m-dimensionaler Spaltenvektor,

$$C = A\,B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} \;, \quad c_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_j \;.$$

Die Matrizenmultiplikation ist **nicht kommutativ**,

$$A\,B \neq B\,A \;.$$

Dies ist klar, da i.a. $m \neq r$ und das Produkt $B\,A$ gar nicht definiert ist. Für den Fall, dass $m = r$, ist dies ebenfalls klar, da $A\,B$ eine $(m \times m)-$Matrix ist, während $B\,A$ eine $(n \times n)-$Matrix ist und i.a. $m \neq n$. Voraussetzung für die Kommutativität der Matrizen A und B wäre also, dass $m = n = r$, d.h. dass sie **quadratische** Matrizen sind. Aber selbst dann ist das Produkt $A\,B$ nicht gleich $B\,A$, wie man sich anhand von Gegenbeispielen leicht klarmacht.

4. **Inverse Matrix:** Die inverse Matrix A^{-1} hat die Eigenschaft, dass

$$A^{-1}\,A = A\,A^{-1} = \mathbf{1} \;.$$

1.4.3 Drehmatrizen

Seien Σ, Σ' zwei rechtshändige Koordinatensysteme, repräsentiert durch die Orthonormalbasen $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ bzw. $\{\vec{e}_1^{\,\prime}, \vec{e}_2^{\,\prime}, \vec{e}_3^{\,\prime}\}$. Man kann durch eine **Translation** bewirken, dass die Ursprünge von Σ und Σ' zusammenfallen, $O = O'$. Dann sind Σ und Σ' i.a. noch gegeneinander gedreht, vgl. Abb. 1.42.

Wir betrachten nun den Ortsvektor der Position eines physikalischen Objektes, die selbstverständlich **unabhängig** von der Wahl des Koordinatensystems ist,

$$\vec{r} = \sum_{j=1}^{3} x_j\, \vec{e}_j = \sum_{j=1}^{3} x_j'\, \vec{e}_j^{\,\prime} \;. \tag{1.90}$$

Bei vorgegebenen Basen $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ und $\{\vec{e}_1^{\,\prime}, \vec{e}_2^{\,\prime}, \vec{e}_3^{\,\prime}\}$ und bei Kenntnis der Komponenten x_j lassen sich die Komponenten x_i' durch Projektion von (1.90) auf den Einheitsvektor $\vec{e}_i^{\,\prime}$ ausrechnen,

$$\sum_{j=1}^{3} x_j\, \vec{e}_j \cdot \vec{e}_i^{\,\prime} = \sum_{j=1}^{3} x_j'\, \vec{e}_j^{\,\prime} \cdot \vec{e}_i^{\,\prime} = \sum_{j=1}^{3} x_j'\, \delta_{ji} = x_i' \;, \tag{1.91}$$

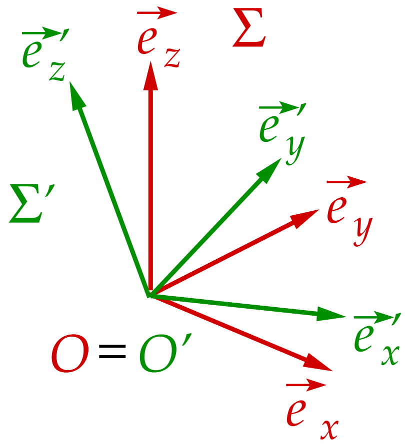

Abbildung 1.42: Die beiden gegeneinander gedrehten Koordinatensysteme Σ und Σ'.

wobei wir die Orthonormalität der Einheitsvektoren in der gestrichenen Basis ausgenutzt haben, $\vec{e}_j\,' \cdot \vec{e}_i\,' = \delta_{ji}$. Die Frage ist, wie das Skalarprodukt $\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i\,'$ zu berechnen ist. Dazu machen wir die folgende Überlegung. Jeder Einheitsvektor $\vec{e}_i\,'$ im gestrichenen System hat natürlich auch eine Komponentendarstellung im ungestrichenen System,

$$\vec{e}_i\,' = \sum_{k=1}^{3} d_{ik}\,\vec{e}_k \;, \tag{1.92}$$

wobei wir die Komponenten des i-ten gestrichenen Einheitsvektors im ungestrichenen System mit d_{ik} bezeichnet haben. Durch Projektion dieser Gleichung auf $\vec{e}_j$ und Ausnutzen der Orthonormalität $\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k = \delta_{jk}$ erhalten wir

$$\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i\,' = \sum_{k=1}^{3} d_{ik}\,\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k = \sum_{k=1}^{3} d_{ik}\,\delta_{jk} = d_{ij} = \cos\varphi_{ij} \;, \tag{1.93}$$

wobei φ_{ij} der Winkel zwischen der i-ten Achse im gestrichenen System Σ' und der j-ten Achse im ungestrichenen System Σ ist.

Die neun Zahlen d_{ij}, $i, j = 1, 2, 3$, lassen sich in Form einer $(3 \times 3)-$Matrix schreiben, der sog. **Drehmatrix**,

$$D = (d_{ij}) = (\cos\varphi_{ij}) = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix} \;. \tag{1.94}$$

Aus der Orthonormalität der Basisvektoren und Gl. (1.92) berechnen wir

$$\delta_{ij} = \vec{e}_i\,' \cdot \vec{e}_j\,' = \sum_{k,l=1}^{3} d_{ik}\,d_{jl}\,\vec{e}_k \cdot \vec{e}_l = \sum_{k,l=1}^{3} d_{ik}\,d_{jl}\,\delta_{kl} = \sum_{k=1}^{3} d_{ik}\,d_{jk} \;. \tag{1.95}$$

Dies bedeutet, dass der Zeilenvektor, der durch die Elemente der i-ten Zeile der Drehmatrix D gebildet wird, orthonormal zu dem Zeilenvektor ist, der durch die Elemente der

j-ten Zeile gebildet wird. Man bezeichnet diesen Sachverhalt auch als **Zeilenorthonormalität** der Drehmatrix.

Gleichung (1.91) kann nun unter Zuhilfenahme von Gl. (1.93) folgendermaßen geschrieben werden,

$$x'_i = \sum_{j=1}^{3} d_{ij}\, x_j \;, \tag{1.96}$$

bzw. in Matrixschreibweise

$$\vec{r}(\Sigma') = D\, \vec{r}(\Sigma) \;. \tag{1.97}$$

Hierbei bezeichnet $\vec{r}(\Sigma')$ den Vektor, der aus den Komponenten x'_j des Ortsvektors im gestrichenen, gegenüber Σ **gedrehten** System Σ' gebildet wird, während $\vec{r}(\Sigma)$ der Ortsvektor im ungestrichenen System Σ ist. Die Drehmatrix D bewirkt die Drehung des Koordinatensystems Σ nach Σ'. Man beachte hierbei, dass sich der **physikalische Ort** des Objektes **nicht** ändert, sondern lediglich das Koordinatensystem zur Beschreibung dieses Ortes. Drehungen des Koordinatensystems bezeichnet man als **passive Drehungen**. Im Gegensatz dazu gibt es auch die sog. **aktiven Drehungen**, bei denen sich das Koordinatensystem nicht ändert, aber Vektoren in diesem System gedreht werden und damit ihre Lage verändern.

21.11.2016

Die **inverse** Matrix D^{-1} macht die Transformation (1.97) rückgängig,

$$D^{-1}\, \vec{r}(\Sigma') = D^{-1}\, D\, \vec{r}(\Sigma) = \mathbf{1}\, \vec{r}(\Sigma) = \vec{r}(\Sigma) \;. \tag{1.98}$$

Die Elemente d_{ij}^{-1} von D^{-1} ergeben sich aus folgender Überlegung. Wir projezieren Gl. (1.90) auf $\vec{e}_i$ und benutzen Gl. (1.93) in der Form $\vec{e}\,'_j \cdot \vec{e}_i = \vec{e}_i \cdot \vec{e}\,'_j = d_{ji}$:

$$x_i = \sum_{j=1}^{3} x'_j\, \vec{e}\,'_j \cdot \vec{e}_i = \sum_{j=1}^{3} d_{ji}\, x'_j \;,$$

oder unter Benutzung von $d_{ji} = d_{ij}^T$ in Matrixschreibweise:

$$\vec{r}(\Sigma) = D^T\, \vec{r}(\Sigma') \;. \tag{1.99}$$

Der Vergleich von Gl. (1.98) mit Gl. (1.99) liefert:

$$D^{-1} = D^T \;, \quad d_{ij}^{-1} = d_{ij}^T = d_{ji} \;. \tag{1.100}$$

Matrizen, die diese Identität erfüllen, nennt man **orthogonale Matrizen**.

Die Zeilenorthonormalität (1.95) läßt sich ebenfalls in Matrixschreibweise fassen:

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{3} d_{ik}\, d_{jk} = \sum_{k=1}^{3} d_{ik}\, d_{kj}^T = \sum_{k=1}^{3} d_{ik}\, d_{kj}^{-1} \iff \mathbf{1} = D\, D^T = D\, D^{-1} \;.$$

Es gilt aber auch $\mathbf{1} = D^{-1} D$, oder in Komponenten

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{3} d_{ik}^{-1}\, d_{kj} = \sum_{k=1}^{3} d_{ik}^T\, d_{kj} = \sum_{k=1}^{3} d_{ki}\, d_{kj} \;. \tag{1.101}$$