Beispiele:

(i) $\vec{a}(\vec{r}) = \beta\,\vec{r}\,, \quad \beta > 0$, vgl. Abb. 1.39. Die Richtung von $\vec{a}(\vec{r})$ stimmt mit der Richtung von $\vec{r}$ überein, also zeigen die Vektorpfeile **radial** nach außen.

(ii) $\vec{a}(\vec{r}) = q\,\vec{r}/(4\pi\epsilon_0 r^3) = q\,\hat{r}/(4\pi\epsilon_0 r^2)$. Dies ist das elektrische Feld einer Punktladung q, die im Ursprung lokalisiert ist. Wir werden dies in der Elektrodynamik-Vorlesung ausführlich diskutieren. Auch dieses Feld zeigt radial nach außen, aber seine Stärke nimmt umgekehrt proportional mit dem Quadrat des Abstands von der Punktladung ab.

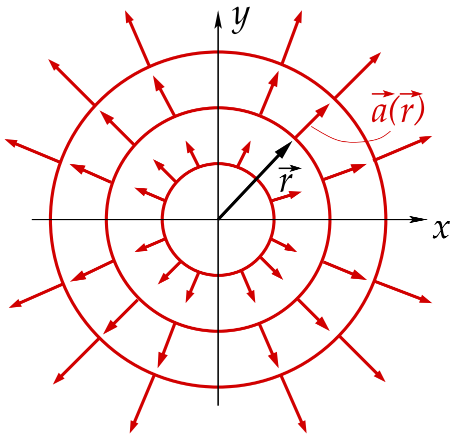

Abbildung 1.39: Das Feld $\vec{a}(\vec{r}) = \beta\,\vec{r},\ \beta > 0$, als Höhenliniendarstellung und mit Richtungsfestlegung.

Eine zweite Möglichkeit, Vektorfelder darzustellen, ist die sog. **Feldliniendarstellung**. Hier gibt die **Richtung** der Feldlinien die **Richtung** des Vektorfeldes und die Feldlinien**dichte** die **Stärke** bzw. den Betrag des Feldes an. Beispiele sind in Abb. 1.40 aufgeführt.

1.3.2 Partielle Ableitungen

Wie für Funktionen und vektorwertige Funktionen gibt es den Begriff der **Stetigkeit** auch für Felder:

1. Ein skalares Feld $\varphi(\vec{r})$ ist **stetig** in $\vec{r}_0$, falls $\forall\ \epsilon > 0 \quad \exists\ \delta > 0$, so dass $\forall\ \vec{r}$ mit $|\vec{r} - \vec{r}_0| < \delta$ gilt $|\varphi(\vec{r}) - \varphi(\vec{r}_0)| < \epsilon$.

2. Ein skalares Feld $\varphi(\vec{r})$ ist stetig in einem Raumbereich $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$, wenn $\varphi(\vec{r})$ stetig $\forall\ \vec{r} \in \mathcal{M}$ ist.

3. Ein Vektorfeld $\vec{a}(\vec{r})$ ist stetig in $\vec{r}_0$, wenn **jede** Komponente $a_i(\vec{r})$, $i = 1, 2, 3$, dort stetig ist.

Felder sind auch **differenzierbar**. Da ein Feld von **drei** unabhängigen Variablen $\vec{r} = (x_1,\, x_2,\, x_3)$ abhängt, kann man auch nach diesen drei Variablen differenzieren. Dies führt

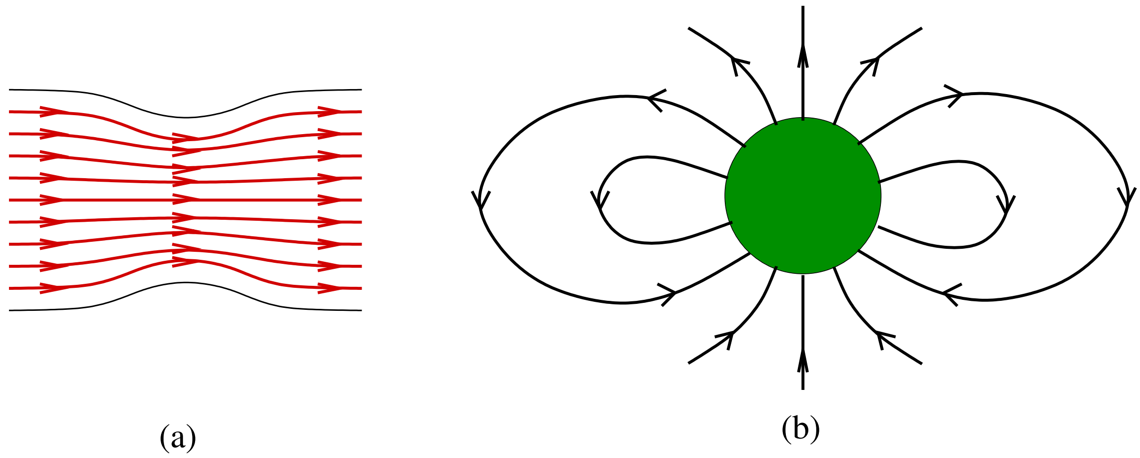

Abbildung 1.40: (a) Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit. (b) Magnetfeld der Erde.

zum Begriff der **partiellen Ableitung**. Dabei hält man beim Ableiten nach einer bestimmten Variablen die anderen konstant, z.B. lautet die Ableitung nach x_1

$$\left.\frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial x_1}\right|_{x_2,x_3} = \lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{\varphi(x_1+\Delta x_1,x_2,x_3)-\varphi(x_1,x_2,x_3)}{\Delta x_1}\ . \tag{1.72}$$

Da bei der partiellen Ableitung nach einer Variablen die anderen **immer** konstant gehalten werden, kann man sich die explizite Notation mit dem senkrechten Strich auch sparen. Andere Schreibweisen der partiellen Ableitung sind daher

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = \partial_{x_1}\varphi = \partial_1\varphi\ .$$

Analog definiert man die partiellen Ableitungen nach x_2 und x_3,

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial x_2}\right|_{x_1,x_3} &= \lim_{\Delta x_2\to 0}\frac{\varphi(x_1,x_2+\Delta x_2,x_3)-\varphi(x_1,x_2,x_3)}{\Delta x_2}\ ,\\ \left.\frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial x_3}\right|_{x_1,x_2} &= \lim_{\Delta x_3\to 0}\frac{\varphi(x_1,x_2,x_3+\Delta x_3)-\varphi(x_1,x_2,x_3)}{\Delta x_3}\ .\end{aligned}$$

Beispiel:

$$\varphi(\vec{r}) = r \quad\Longrightarrow\quad \partial_i\varphi = \frac{\partial}{\partial x_i}\sqrt{\sum_{j=1}^{3}x_j^2} = \frac{x_i}{r}\ . \tag{1.73}$$

Vektorfelder leitet man ab, indem man **jede Komponente** partiell ableitet.

Beispiele:

1. $$\vec{a}(\vec{r}) = \beta\,\vec{r} \quad\Longrightarrow\quad \partial_i\,\vec{a}(\vec{r}) = \beta\,\partial_i\sum_{j=1}^{3}x_j\,\vec{e}_j = \beta\sum_{j=1}^{3}\partial_i x_j\,\vec{e}_j = \beta\sum_{j=1}^{3}\delta_{ij}\vec{e}_j = \beta\,\vec{e}_i\ ,$$

   wobei wir $\partial x_j/\partial x_i = \delta_{ij}$ ausgenutzt haben.

2. $$\vec{a}(\vec{r}) = \alpha\,\frac{\vec{r}}{r^3} \implies \partial_i\,\vec{a}(\vec{r}) = \alpha\,\partial_i\frac{\vec{r}}{r^3} = \alpha\left[-\frac{3}{r^4}\,(\partial_i\,r)\,\vec{r} + \frac{1}{r^3}\,\partial_i\,\vec{r}\right]$$
$$= \alpha\left(-\frac{3\,\vec{r}}{r^4}\,\frac{x_i}{r} + \frac{1}{r^3}\,\vec{e}_i\right) = \frac{\alpha}{r^3}\left(-3\,\frac{x_i}{r}\,\hat{r} + \vec{e}_i\right)\,.$$

Regeln der partiellen Differentiation:

1. $\partial_i\,(\varphi_1 + \varphi_2) = \partial_i\,\varphi_1 + \partial_i\,\varphi_2\,.$
2. $\partial_i\,(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\partial_i\,\vec{a})\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot(\partial_i\,\vec{b})\,.$
3. $\partial_i\,(\vec{a}\times\vec{b}) = (\partial_i\,\vec{a})\times\vec{b} + \vec{a}\times(\partial_i\,\vec{b})\,.$

Mehrfache partielle Ableitungen:

1. **Zweifache** partielle Ableitung nach einer Variablen wird auf die partielle Ableitung der ersten partiellen Ableitung zurückgeführt:
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,.$$
2. Dies läßt sich auf **mehrfache** partielle Ableitungen verallgemeinern:
$$\frac{\partial^n\varphi}{\partial x_i^n} = \frac{\partial}{\partial x_i}\,\frac{\partial^{n-1}\varphi}{\partial x_i^{n-1}}\,.$$
3. **Gemischte** partielle Ableitungen:
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\,.$$
Gewöhnlich werden Ableitungen von rechts nach links abgearbeitet. Falls das Feld jedoch **zweifach stetig differenzierbar** ist, darf man die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauschen:
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j \partial x_i}\,.$$

1.3.3 Totale Ableitung und totales Differential

Wir erinnern uns an die übliche **Kettenregel** für Funktionen **einer** Veränderlichen, z.B. $f(x(t))$:
$$\frac{\mathrm{d}f(x(t))}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\,. \tag{1.74}$$

Diese Regel hat auch Bestand, wenn wir Funktionen **mehrerer** Veränderlicher betrachten, falls lediglich eine davon von dem Parameter, nach dem abgeleitet wird, abhängt. Z.B. für das Feld $\varphi(x_1(t), x_2, x_3)$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(x_1(t), x_2, x_3)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\varphi(\vec{r})}{\mathrm{d}x_1} \, \frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} \; . \tag{1.75}$$

Wie aber verhält es sich, wenn **alle** Variablen von demselben Parameter abhängen, z.B. $\varphi(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = \varphi(\vec{r}(t))$? Wir definieren

$$\Delta x_i(t) = x_i(t+\Delta t) - x_i(t) \quad \Longleftrightarrow \quad x_i(t+\Delta t) = x_i(t) + \Delta x_i(t) \; ,$$

und berechnen den Differenzenquotienten

$$\begin{aligned} D &\equiv \frac{\varphi(\vec{r}(t+\Delta t)) - \varphi(\vec{r}(t))}{\Delta t} = \frac{\varphi(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3) - \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\Delta t} \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left[\varphi(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3) - \varphi(x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3) \right. \\ &\qquad\qquad - \; \varphi(x_1, x_2, x_3+\Delta x_3) + \varphi(x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3) \\ &\qquad\qquad + \; \left. \varphi(x_1, x_2, x_3+\Delta x_3) - \varphi(x_1, x_2, x_3) \right] \\ &= \frac{\varphi(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3) - \varphi(x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3)}{\Delta x_1} \, \frac{\Delta x_1}{\Delta t} \\ &+ \frac{\varphi(x_1, x_2+\Delta x_2, x_3+\Delta x_3) - \varphi(x_1, x_2, x_3+\Delta x_3)}{\Delta x_2} \, \frac{\Delta x_2}{\Delta t} \\ &+ \frac{\varphi(x_1, x_2, x_3+\Delta x_3) - \varphi(x_1, x_2, x_3)}{\Delta x_3} \, \frac{\Delta x_3}{\Delta t} \; , \end{aligned}$$

wobei wir die Zeitabhängigkeit der Argumente unterdrückt haben. Im Limes $\Delta t \to 0$, in dem wegen der Stetigkeit der Funktionen $x_i(t)$ auch $\Delta x_i(t) \to 0\,,\; i = 1, 2, 3\,$, gehen die Differenzenquotienten der Felder in die partiellen Ableitungen und die Differenzenquotienten der Komponenten des Ortsvektors in die gewöhnliche Ableitung nach der Zeit über. Wir erhalten die sog. **totale Ableitung** des Feldes $\varphi(\vec{r}(t))$ nach t,

$$\lim_{\Delta t \to 0} D = \frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial x_1} \, \frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial x_2} \, \frac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial x_3} \, \frac{\mathrm{d}x_3(t)}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial x_j} \, \frac{\mathrm{d}x_j(t)}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\mathrm{d}\varphi(\vec{r}(t))}{\mathrm{d}t} \; . \tag{1.76}$$

Diese Gleichung verallgemeinert die übliche Kettenregel (1.74) auf die Kettenregel für Funktionen mehrerer Veränderlicher. Gleichung (1.75) folgt sofort als Spezialfall, für den x_2 und x_3 nicht von der Zeit abhängen. Multipliziert man Gl. (1.76) mit dem Differential $\mathrm{d}t$, so erhält man das **totale Differential** des Feldes $\varphi(\vec{r})$,

$$\mathrm{d}\varphi(\vec{r}) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial\varphi(\vec{r})}{\partial x_j} \, \mathrm{d}x_j \; . \tag{1.77}$$

Anschaulich bedeutet dies die totale Änderung von φ, wenn man von der Position $\vec{r}$ zur neuen Position $\vec{r} + \mathrm{d}\vec{r}$ übergeht.