

Die Zahlen  $\epsilon_{ijk}$  sind die Komponenten des Kreuzprodukts  $\vec{e}_i \times \vec{e}_j$ . Zum Beweis berechnen wir die  $k$ te Komponente dieses Vektors durch Projektion auf den Einheitsvektor in  $k$ -Richtung, vgl. Gl. (1.42):

$$(\vec{e}_i \times \vec{e}_j)_k = \vec{e}_k \cdot (\vec{e}_i \times \vec{e}_j) = \epsilon_{ijk} ,$$

wobei wir die Definition (1.44) und die zyklische Vertauschbarkeit des Spatprodukts, Gl. (1.34), benutzt haben. Das Kreuzprodukt  $\vec{e}_i \times \vec{e}_j$  hat also die Komponentendarstellung

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \vec{e}_k .$$

Das Kreuzprodukt beliebiger Vektoren lässt sich damit nun wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i,j=1}^3 a_i b_j \vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sum_{i,j,k=1}^3 a_i b_j \epsilon_{ijk} \vec{e}_k \\ \implies c_k &= \sum_{i,j=1}^3 \epsilon_{ijk} a_i b_j \\ \implies c_1 &= a_2 b_3 - a_3 b_2 , \quad c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3 , \quad c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1 . \end{aligned}$$

## 6. Spatprodukt:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \sum_{i,j,k=1}^3 a_i b_j c_k \vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) = \sum_{i,j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k .$$

7. Wir beweisen nun den **Entwicklungssatz** (1.36). Die  $k$ te Komponente des doppelten Kreuzprodukts aus Gl. (1.36) lautet unter Benutzung von (1.46) und (1.47):

$$\begin{aligned} \left[ \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \right]_k &= \sum_{i,j=1}^3 \epsilon_{ijk} a_i (\vec{b} \times \vec{c})_j = \sum_{i,j=1}^3 \epsilon_{ijk} a_i \sum_{l,m=1}^3 \epsilon_{jlm} b_l c_m \\ &= \sum_{i,j,l,m=1}^3 \epsilon_{ijk} \epsilon_{jlm} a_i b_l c_m = - \sum_{i,j,l,m=1}^3 \epsilon_{ikj} \epsilon_{jlm} a_i b_l c_m \\ &= - \sum_{i,l,m=1}^3 (\delta_{il} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{kl}) a_i b_l c_m = \sum_{l,m=1}^3 (a_m b_l c_m \delta_{kl} - a_l b_l c_m \delta_{km}) \\ &= b_k \sum_{m=1}^3 a_m c_m - c_k \sum_{l=1}^3 a_l b_l = \left[ \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b}) \right]_k , \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

## 1.2 Vektorwertige Funktionen

### 1.2.1 Parametrisierung von Raumkurven

Wir betrachten wieder das Beispiel des fallenden Balles aus Abb. 1.2, allerdings wollen wir zur besseren Verdeutlichung der nachfolgenden Argumentation den Ursprung  $O$  nicht

identisch mit der Position des Balles zum Anfangszeitpunkt  $t_a = 0$  wählen, sondern etwas versetzt davon. Der Ortsvektor  $\vec{r}(t_a)$  des Balles zu diesem Zeitpunkt ist dann nicht mehr identisch mit dem Nullvektor. Wenn der Ball zu Boden fällt, ändert sich der Ortsvektor im Laufe der Zeit wie in Abb. 1.27 gezeigt, bis er den Boden zum Zeitpunkt  $t_e$  erreicht.

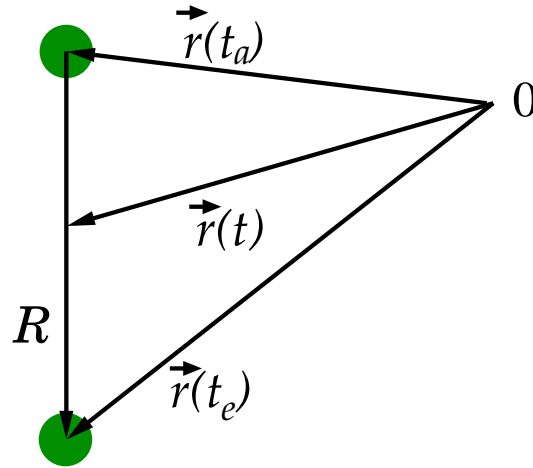


Abbildung 1.27: Der Ortsvektor des fallenden Balles als Funktion der Zeit.

Im Laufe der Zeit beschreibt der Ortsvektor die **Raum-** bzw. **Bahnkurve**, oder **Trajektorie**  $\mathcal{R}$  des fallenden Balles. Dies läßt sich mathematisch so ausdrücken:

$$\begin{aligned} \vec{r} : \mathbb{R} \supset [t_a, t_e] &\rightarrow \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^3 \\ [t_a, t_e] \ni t &\mapsto \vec{r}(t) \in \mathcal{R} . \end{aligned}$$

Damit ist der Ortsvektor eine **vektorwertige Funktion einer Variablen**, in diesem Fall der Zeit. In der Physik gibt man üblicherweise weder den Definitionsbereich  $[t_a, t_e]$  noch den Wertebereich  $\mathcal{R}$  explizit an. Um auszudrücken dass es sich eine Funktion handelt, genügt üblicherweise die Angabe, dass  $\vec{r}$  von einem Argument, hier der Zeit  $t$ , abhängt:  $\vec{r}(t)$ .

Die **Raumkurve**  $\mathcal{R}$  des Balles schreibt man auch wie folgt:

$$\mathcal{R} = \{ \vec{r}(t), t_a \leq t \leq t_e \} .$$

Die Zeit  $t$  ist hier ein Parameter, der von  $t_a$  bis  $t_e$  durchlaufen wird, während dessen  $\vec{r}(t)$  die Werte annimmt, die der Raumkurve  $\mathcal{R}$  entsprechen. Raumkurven parametrisiert man in der Regel als Funktion der Zeit  $t$ , aber es sind auch andere Parametrisierungen möglich.

In einer festen, zeitunabhängigen Orthonormalbasis  $\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \}$  gilt

$$\vec{r}(t) = \sum_{j=1}^3 x_j(t) \vec{e}_j = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T = (x(t), y(t), z(t))^T . \quad (1.48)$$

**Beispiele:**

1. **Kreisbewegung** in der  $(x, y)$ -Ebene, vgl. Abb. 1.28:

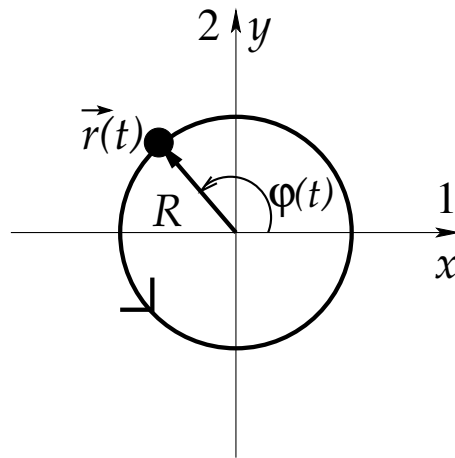


Abbildung 1.28: Kreisbewegung in der  $(x, y)$ -Ebene.

Der Kreis habe den Radius  $R$ . Der Winkel der momentanen Position des Teilchens relativ zur  $x$ -Achse ist  $\varphi(t) = \omega t$ , wobei  $\omega$  die sog. **Kreisfrequenz** ist. Der Ortsvektor ist dann

$$\vec{r}(t) = (R \cos(\omega t), R \sin(\omega t), 0)^T . \quad (1.49)$$

Der Periodizität der Kreisbewegung wird dadurch Rechnung getragen, dass die trigonometrischen Funktionen für Winkel, die sich um Vielfache von  $2\pi$  (ein voller Umlauf) unterscheiden, identisch sind. Die **Periode**

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

entspricht der Umlaufzeit des Teilchens auf dem Kreis.

2. **Schraubenlinie**, vgl. Abb. 1.29: Der Ortsvektor ist

$$\vec{r}(t) = (R \cos(\omega t), R \sin(\omega t), bt)^T ,$$

wobei  $b$  ein Parameter ist, der die **Steig-** oder **Ganghöhe**  $z_0$  der Schraubenlinie bestimmt,

$$z_0 = bT = b \frac{2\pi}{\omega} .$$

Neben der Parametrisierung als Funktion der Zeit  $t$  kann man Raumkurven auch anders parametrisieren. Beispielsweise bietet sich bei der Kreisbewegung die Parametrisierung als Funktion des Kreiswinkels an,

$$\vec{r}(\varphi) = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, 0)^T .$$

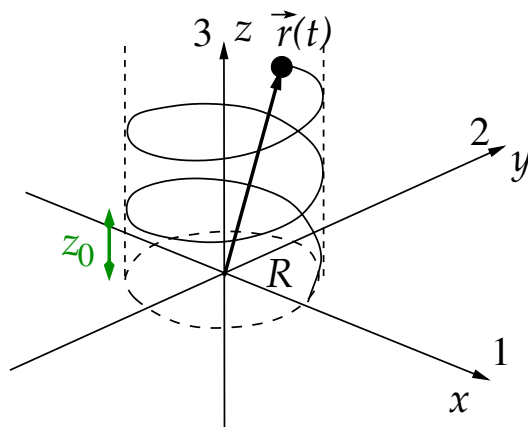


Abbildung 1.29: Schraubenlinie.

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, eine Koordinate, z.B.  $x$ , als Parameter zu verwenden. Da der Radius des Kreises durch  $R = \sqrt{x^2 + y^2}$  gegeben ist, gilt  $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ , je nachdem, ob man sich in der oberen ( $y \geq 0$ ) oder unteren ( $y < 0$ ) Halbebene befindet. Damit ist

$$\vec{r}(x) = \begin{cases} (x, \sqrt{R^2 - x^2}, 0)^T & \text{für } y \geq 0, \\ (x, -\sqrt{R^2 - x^2}, 0)^T & \text{für } y < 0. \end{cases}$$

## 1.2.2 Differentiation vektorwertiger Funktionen

Raumkurven von physikalischen Objekten sind üblicherweise **stetig** im mathematischen Sinn:  $\vec{r}(t)$  stetig in  $t = t_0$ , falls  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta$ , so dass aus  $|t - t_0| < \delta$  stets  $|\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)| < \epsilon$  folgt.  $\vec{r}(t)$  ist insbesondere dann stetig in  $t_0$ , wenn **alle** Komponenten  $x_j(t)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , stetig in  $t_0$  sind.

Raumkurven sind üblicherweise auch **differenzierbar** im mathematischen Sinn (es sei denn, das Objekt ändert schlagartig seine Bewegungsrichtung, z.B. ein Ball, der auf dem Boden aufschlägt). Sei  $\vec{r}(t)$  der Ortsvektor des Objektes zum Zeitpunkt  $t$  und  $\vec{r}(t + \Delta t)$  der Ortsvektor zum um ein kleines Zeitintervall  $\Delta t$  späteren Zeitpunkt  $t + \Delta t$ . Wir definieren den **Differenzvektor** als

$$\Delta\vec{r}(t) = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t),$$

vgl. Abb. [1.30](#).

Die **Ableitung** des Ortsvektors nach der Zeit ist dann als Grenzwert definiert,

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}. \quad (1.50)$$

Physikalisch ist diese infinitesimale Änderung der Position des Objektes in einem infinitesimalen Zeitintervall nichts anderes als die **Geschwindigkeit** des Objektes,

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}(t). \quad (1.51)$$

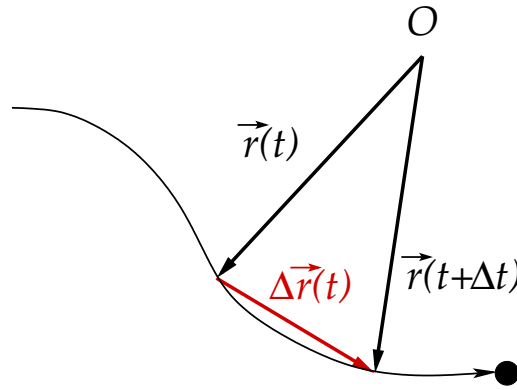


Abbildung 1.30: Definition des Differenzvektors.

Hier haben wir auf der rechten Seite der Gleichung die in der Physik für Zeitableitungen übliche Abkürzung mit einem Punkt über dem abzuleitenden Objekt eingeführt. In einer ortsfesten, d.h. zeitunabhängigen Orthonormalbasis  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  gilt

$$\vec{v}(t) = \sum_{j=1}^3 v_j(t) \vec{e}_j = \dot{\vec{r}}(t) = \sum_{j=1}^3 \dot{x}_j(t) \vec{e}_j = \sum_{j=1}^3 \frac{dx_j(t)}{dt} \vec{e}_j, \quad (1.52)$$

d.h. die Ableitung einer vektorwertigen Funktion ist in einer solchen zeitunabhängigen Basis durch die Ableitung ihrer Komponenten gegeben. Ganz entsprechend kann man höhere Ableitungen definieren,

$$\frac{d^n \vec{r}(t)}{dt^n} = \sum_{j=1}^3 \frac{d^n x_j(t)}{dt^n} \vec{e}_j, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Für  $n = 2$  erhalten wir die **Beschleunigung**:

$$\vec{a}(t) = \sum_{j=1}^3 a_j(t) \vec{e}_j = \dot{\vec{v}}(t) = \sum_{j=1}^3 \dot{v}_j(t) \vec{e}_j = \ddot{\vec{r}}(t) = \sum_{j=1}^3 \ddot{x}_j(t) \vec{e}_j = \sum_{j=1}^3 \frac{d^2 x_j(t)}{dt^2} \vec{e}_j. \quad (1.53)$$

**Differentiationsregeln:**

$$(i) \quad \frac{d}{dt} [\vec{a}(t) + \vec{b}(t)] = \frac{d\vec{a}(t)}{dt} + \frac{d\vec{b}(t)}{dt} = \dot{\vec{a}}(t) + \dot{\vec{b}}(t), \quad (1.54)$$

$$(ii) \quad \frac{d}{dt} [f(t)\vec{a}(t)] = \frac{df(t)}{dt} \vec{a}(t) + f(t) \frac{d\vec{a}(t)}{dt} = \dot{f}(t) \vec{a}(t) + f(t) \dot{\vec{a}}(t), \quad (1.55)$$

$$(iii) \quad \frac{d}{dt} [\vec{a}(t) \cdot \vec{b}(t)] = \dot{\vec{a}}(t) \cdot \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \cdot \dot{\vec{b}}(t), \quad (1.56)$$

$$(iv) \quad \frac{d}{dt} [\vec{a}(t) \times \vec{b}(t)] = \dot{\vec{a}}(t) \times \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \times \dot{\vec{b}}(t). \quad (1.57)$$

Der Beweis erfolgt unter Benutzung der Komponentendarstellung und Anwendung der üblichen Differentiationsregeln für gewöhnliche Funktionen. Die Gleichungen (1.55), (1.56)

und (1.57) stellen die Verallgemeinerung der **Produktregel** der Differentiation auf die Multiplikation von Vektoren mit Zahlen, Gl. (1.55), auf das Skalarprodukt von Vektoren, Gl. (1.56), und auf das Kreuzprodukt, Gl. (1.57), dar. Wegen der Nichtkommutativität des Kreuzprodukts ist auf die Reihenfolge der Faktoren im zweiten Term von Gl. (1.57) zu achten.

Als wichtiges Anwendungsbeispiel für Gl. (1.56) betrachten wir den Einheitsvektor  $\hat{a}(t) = \vec{a}(t)/a(t)$ . Es gilt  $\hat{a}(t) \cdot \hat{a}(t) = 1 \quad \forall t$ . Da die Zeitableitung einer Konstante verschwindet, folgt

$$0 = \frac{d}{dt} [\hat{a}(t) \cdot \hat{a}(t)] = 2 \dot{\hat{a}}(t) \cdot \hat{a}(t) . \quad (1.58)$$

Dies wiederum bedeutet, dass  $\dot{\hat{a}}(t)$  zu allen Zeiten orthogonal zu  $\hat{a}(t)$  steht.

7.11.2016

### 1.2.3 Bogenlänge

Eine sog. **glatte Raumkurve** ist eine Raumkurve, für die es (mindestens) eine **stetig differenzierbare** Parametrisierung  $\vec{r}(t)$  gibt, für die nirgends  $d\vec{r}(t)/dt = 0$  gilt. Für glatte Raumkurven kann man anstelle der Zeit  $t$  auch die sog. **Bogenlänge**  $s$  als Parametrisierung verwenden. Die Bogenlänge ist grob gesprochen die Länge der Raumkurve. Um dies zu präzisieren, zerlegen wir eine beliebige Raumkurve in  $N$  Teilstücke, wie in Abb. 1.31 gezeigt.

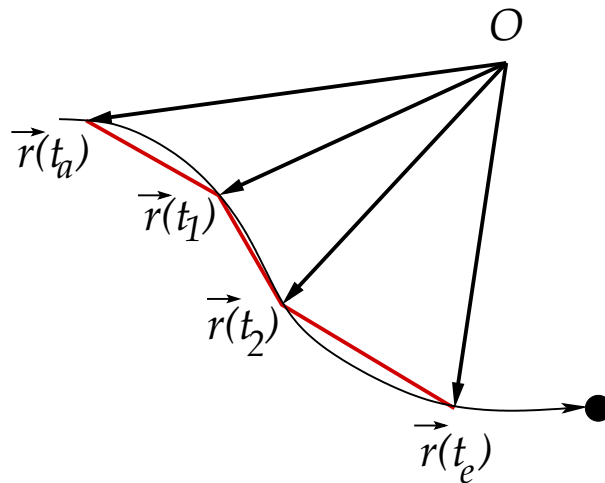


Abbildung 1.31: Zerlegung der Raumkurve in einen Polygonzug.

Hierbei wird das Zeitintervall  $[t_a, t_e]$  in  $N$  gleiche Zeitintervalle  $\Delta t_N$  zerlegt, mit

$$t_n = t_a + n \Delta t_N , \quad n = 0, 1, 2, \dots, N , \quad t_0 = t_a , \quad t_N = t_a + N \Delta t_N = t_e .$$

Zu jeder Zeitmarke  $t_n$  ist die Position des Objektes durch den Ortsvektor  $\vec{r}(t_n)$  gegeben. Für sehr große  $N$  kann man die Teilstücke der Bahnkurve in guter Näherung als **gerade** annehmen. Diese geraden Teilstücke definieren einen sog. **Polygonzug**. Der Polygonzug

hat die Länge

$$L_N(t_a, t_e) = \sum_{n=0}^{N-1} |\vec{r}(t_{n+1}) - \vec{r}(t_n)| = \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t_N \left| \frac{\vec{r}(t_{n+1}) - \vec{r}(t_n)}{\Delta t_N} \right| .$$

Die **Bogenlänge**  $s$  entspricht der Länge  $L_N$  des Polygonzugs für  $N \rightarrow \infty$ ,  $\Delta t_N \rightarrow 0$ ,  $t_e - t_a = N\Delta t_N = \text{const.}$ ,

$$s = \lim_{N \rightarrow \infty} L_N(t_a, t_e) = \int_{t_a}^{t_e} dt \left| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right| \equiv \int_{t_a}^{t_e} dt |\vec{v}(t)| . \quad (1.59)$$

Zu einem beliebigen, festen Zeitpunkt  $t$  gilt

$$s(t) = \int_{t_a}^t dt' \left| \frac{d\vec{r}(t')}{dt'} \right| \equiv \int_{t_a}^t dt' |\vec{v}(t')| . \quad (1.60)$$

Damit gilt auch

$$\frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \right| \equiv |\vec{v}(t)| > 0 , \quad (1.61)$$

nach Voraussetzung für glatte Raumkurven. Diese Gleichung besagt, dass  $s(t)$  eine streng monoton wachsende Funktion von  $t$  ist. Damit ist  $t(s)$  eindeutig bestimmt und wir können den Raumkurvenparameter  $t$  durch  $s$  ersetzen,

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t(s)) = \vec{r}(s) .$$

Dies nennt man die sog. **natürliche Parametrisierung** der Raumkurve.

**Beispiel:** Wir betrachten die **Kreisbewegung** (1.49). Die Geschwindigkeit ist

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = (-\omega R \sin(\omega t), \omega R \cos(\omega t), 0)^T \implies |\vec{v}(t)| = \omega R .$$

Wird die Kreisbewegung zum Zeitpunkt  $t_a = 0$  gestartet, so ist die Bogenlänge zum Zeitpunkt  $t$  dann gemäß Gl. (1.60)

$$s(t) = \int_0^t dt' \omega R = \omega R t \implies t(s) = \frac{s}{\omega R} .$$

Daraus folgt für die natürliche Parametrisierung

$$\vec{r}(s) = \left( R \cos \frac{s}{R}, R \sin \frac{s}{R}, 0 \right)^T . \quad (1.62)$$

Nach einem vollen Umlauf ist  $s/R = 2\pi$ , d.h.  $s = 2\pi R$ . Damit ist die Bogenlänge erwartungsgemäß gleich dem Kreisumfang.

### 1.2.4 Das begleitende Dreibein

Das begleitende Dreibein ist ein spezielles Koordinatensystem, das auf der Raumkurve des Ortsvektors mitwandert. Es besteht aus drei Einheitsvektoren:

$$\begin{aligned} \hat{t} & \text{ Tangentialvektor ,} \\ \hat{n} & \text{ Normalenvektor ,} \\ \hat{b} & \text{ Binormalenvektor .} \end{aligned}$$

Diese Einheitsvektoren bilden eine Orthonormalbasis,

$$\hat{t} = \hat{n} \times \hat{b}, \quad \hat{n} = \hat{b} \times \hat{t}, \quad \hat{b} = \hat{t} \times \hat{n}. \quad (1.63)$$

Der **Tangentialvektor** liegt tangential an der Raumkurve an, vgl. Abb. 1.32.

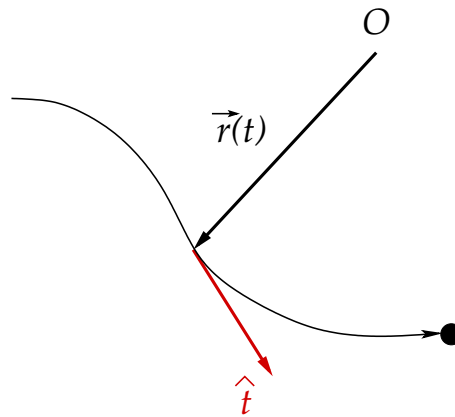


Abbildung 1.32: Der Tangentialvektor  $\hat{t}$ .

Daher gilt mit Gl. (1.61) und der Kettenregel, angewendet auf  $\vec{r}(s(t))$ ,

$$\hat{t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \left( \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| \right)^{-1} = \frac{d\vec{r}}{dt} \left( \frac{ds}{dt} \right)^{-1} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} \left( \frac{ds}{dt} \right)^{-1} = \frac{d\vec{r}}{ds} \equiv \hat{t}(s).$$

Die **Krümmung**  $\kappa$  der Raumkurve ist definiert als Betrag der Änderung des Tangentialvektors mit  $s$ , s. auch Abb. 1.33.

$$\kappa = \left| \frac{d\hat{t}(s)}{ds} \right|. \quad (1.64)$$

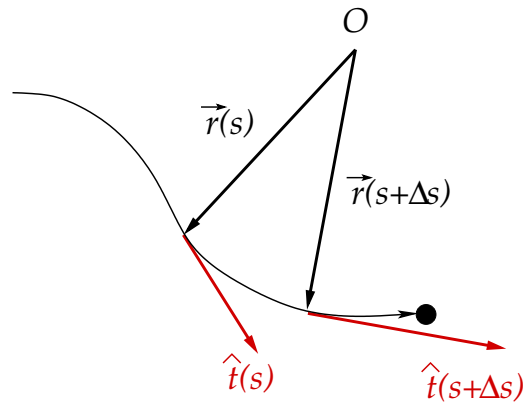
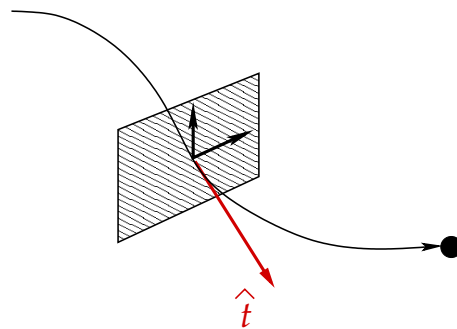
Der **Krümmungsradius**  $\rho$  ist das Inverse der Krümmung,

$$\rho = \frac{1}{\kappa}. \quad (1.65)$$

Für eine **geradlinige** Bewegung gilt

$$\hat{t}(s) = \widehat{const.}, \quad \kappa = 0, \quad \rho = \infty.$$



Abbildung 1.33: Änderung des Tangentialvektors mit  $s$ .Abbildung 1.34: Die von Normalen- und Binormalenvektor aufgespannte Ebene senkrecht zu  $\hat{t}$ .

Gleichung (1.63) bedingt, dass Normalenvektor und Binormalenvektor in einer Ebene senkrecht zu  $\hat{t}$  liegen, vgl. Abb. 1.34.

Da  $\hat{t}$  ein Einheitsvektor ist, ist  $\frac{d\hat{t}}{ds} \perp \hat{t}$ ; der Beweis ist analog zu Gl. (1.58). Einer der beiden Einheitsvektoren kann daher proportional zu  $\frac{d\hat{t}}{ds}$  gewählt werden. Dies ist der **Normalenvektor**,

$$\hat{n} = \frac{d\hat{t}}{ds} \left( \left| \frac{d\hat{t}}{ds} \right| \right)^{-1} = \frac{1}{\kappa} \frac{d\hat{t}}{ds} = \rho \frac{d\hat{t}}{ds} \equiv \hat{n}(s). \quad (1.66)$$

Die von  $\hat{t}$  und  $\hat{n}$  aufgespannte Ebene heißt **Schmiegungebene**, vgl. Abb. 1.35.

Der **Binormalenvektor** kann nun einfach durch das Kreuzprodukt von  $\hat{t}$  mit  $\hat{n}$  definiert werden, vgl. Gl. (1.63):

$$\hat{b} = \hat{t} \times \hat{n}. \quad (1.67)$$

Er steht senkrecht auf der Schmiegungebene, vgl. Abb. 1.36.

Erfolgt die Bewegung in einer festen, d.h. zeitlich konstanten Ebene (womit die Schmiegungebene, die mit dieser Ebene identisch ist, ebenfalls zeitlich konstant ist), dann ist  $\hat{b}$  unabhängig von  $s$ ,  $\hat{b} = \widehat{const.}$ . Falls  $\hat{b}$  sich mit  $s$  ändert, so ist dies ein Maß dafür, wie

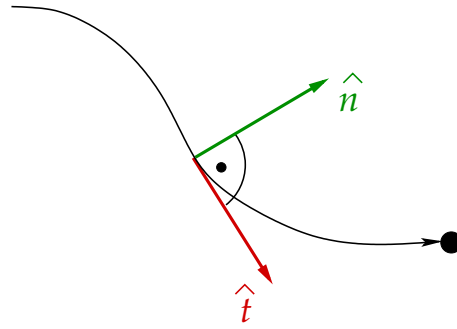


Abbildung 1.35: Tangential- und Normalenvektor. Die Schmiegungeebene ist identisch mit der Zeichenebene.

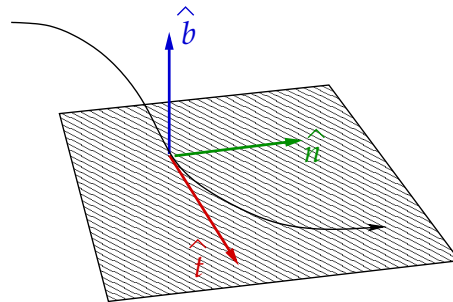


Abbildung 1.36: Tangential-, Normalen- und Binormalenvektor. Die von  $\hat{t}$  und  $\hat{n}$  aufgespannte Schmiegungeebene ist ebenfalls eingezeichnet.

stark sich die Raumkurve aus der Schmiegungeebene “herausschraubt”. Daher ist auch die Ableitung  $\frac{d\hat{b}}{ds}$  von Interesse. Unter Benutzung von Gl. (1.66) in der Form

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \kappa \hat{n} \quad (1.68)$$

und der Tatsache, dass das Kreuzprodukt identischer Vektoren verschwindet, erhalten wir:

$$\frac{d\hat{b}}{ds} = \frac{d\hat{t}}{ds} \times \hat{n} + \hat{t} \times \frac{d\hat{n}}{ds} = \kappa \hat{n} \times \hat{n} + \hat{t} \times \frac{d\hat{n}}{ds} = \hat{t} \times \frac{d\hat{n}}{ds} .$$

Also ist  $\frac{d\hat{b}}{ds} \perp \hat{t}$ . Weil  $\hat{b}$  ein Einheitsvektor ist, ist außerdem  $\frac{d\hat{b}}{ds} \perp \hat{b}$ . Also muss  $\frac{d\hat{b}}{ds} \parallel \hat{n}$  sein. Die (negative) Proportionalitätskonstante bezeichnet man als **Torsion**  $\tau$  der Raumkurve,

$$\frac{d\hat{b}}{ds} = -\tau \hat{n} . \quad (1.69)$$

Die inverse Torsion heißt **Torsionsradius**,

$$\sigma = \frac{1}{\tau} . \quad (1.70)$$

Die Glgen. (1.68) und (1.69) definieren die Ableitungen von Tangential- und Binormalenvektor nach  $s$ . Es fehlt nur noch die Ableitung von  $\hat{n} = \hat{b} \times \hat{t}$  nach  $s$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{n}}{ds} &= \frac{d\hat{b}}{ds} \times \hat{t} + \hat{b} \times \frac{d\hat{t}}{ds} \\ &= -\tau \hat{n} \times \hat{t} + \hat{b} \times (\kappa \hat{n}) \\ &= \tau \hat{b} - \kappa \hat{t}, \end{aligned} \quad (1.71)$$

wobei wir im letzten Schritt  $\hat{n} \times \hat{t} = -\hat{b}$  und  $\hat{b} \times \hat{n} = -\hat{t}$  ausgenutzt haben. Die Glgen. (1.68), (1.69) und (1.71) heißen **Frenetsche Formeln**.

### Beispiele:

1. **Kreisbewegung:** Der Ortsvektor in natürlicher Darstellung ist durch Gl. (1.62) gegeben. Daraus folgt für den Tangentialvektor

$$\hat{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \left( -\sin \frac{s}{R}, \cos \frac{s}{R}, 0 \right)^T.$$

Die Ableitung von  $\hat{t}$  nach  $s$  berechnet sich zu

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \left( -\frac{1}{R} \cos \frac{s}{R}, -\frac{1}{R} \sin \frac{s}{R}, 0 \right)^T,$$

woraus für die Krümmung folgt

$$\kappa = \left| \frac{d\hat{t}}{ds} \right| = \frac{1}{R}.$$

Der Krümmungsradius ist also  $\rho = 1/\kappa \equiv R$ , d.h. identisch mit dem Radius des Kreises – ein bei der Kreisbewegung nicht weiter überraschendes Ergebnis. Der Normalenvektor ist dann

$$\hat{n} = \rho \frac{d\hat{t}}{ds} = \left( -\cos \frac{s}{R}, -\sin \frac{s}{R}, 0 \right)^T,$$

und der Binormalenvektor errechnet sich zu

$$\begin{aligned} \hat{b} = \hat{t} \times \hat{n} &= \vec{e}_1(t_2 n_3 - t_3 n_2) + \vec{e}_2(t_3 n_1 - t_1 n_3) + \vec{e}_3(t_1 n_2 - t_2 n_1) \\ &= \vec{e}_3 \left( \sin^2 \frac{s}{R} + \cos^2 \frac{s}{R} \right) \\ &= \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Der Binormalenvektor ist also konstant (wie man es bei der Bewegung in einer festen Ebene erwartet, s.o.) und zeigt in  $z$ -Richtung, also senkrecht zur Kreisbewegung in der  $(x, y)$ -Ebene. Zur Lage von Tangential- und Normalenvektor s. Abb. (1.37).

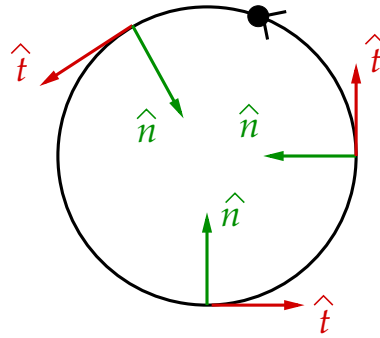


Abbildung 1.37: Tangential- und Normalenvektor bei der Kreisbewegung.

2. **Geschwindigkeit und Beschleunigung eines Massenpunktes:** Die Geschwindigkeit ist

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \hat{t} \implies v = |\vec{v}| = \frac{ds}{dt}.$$

Die Beschleunigung ist

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\hat{t})}{dt} = \dot{v}\hat{t} + v \frac{d\hat{t}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{v}\hat{t} + v^2 \kappa \hat{n} = \dot{v}\hat{t} + \frac{v^2}{\rho} \hat{n}.$$

Diese Gleichung besagt, dass die Beschleunigung in der von  $\hat{t}$  und  $\hat{n}$  aufgespannten Schmiegungsebene liegt. Wir unterscheiden die **Tangentialbeschleunigung**  $a_t = \hat{t} \cdot \vec{a} = \dot{v}$  und die **Normal- oder Zentripetalbeschleunigung**  $a_n = \hat{n} \cdot \vec{a} = v^2/\rho$ . Selbst wenn sich der Geschwindigkeits**betr**ag zeitlich nicht ändert,  $\dot{v} = 0$ , und somit die Tangentialbeschleunigung verschwindet, so kann es dennoch eine Zentripetalbeschleunigung geben, welche die Geschwindigkeits**richt**ung verändert. Voraussetzung dafür ist, dass der Krümmungsradius  $\rho < \infty$ . Umgekehrt gilt, dass es auf gekrümmten Bahnen **immer** eine Beschleunigung gibt, selbst wenn der Betrag der Geschwindigkeit konstant ist.

11.11.2016

### 1.3 Felder

Die Raumkurve  $\mathcal{R}$  eines physikalischen Objekts ordnet einem Parameter, gewöhnlich der Zeit  $t$ , den Ortsvektor  $\vec{r}(t)$  zu diesem Zeitpunkt zu. Damit ist die Bahnbewegung des Objekts beschrieben. Wir kennen jedoch noch nicht die Ursache dafür, dass das Objekt eine bestimmte Bahnbewegung durchführt. Beim fallenden Ball aus Abb. [1.2](#) ist dies das **Gravitationsfeld** der Erde.

Allgemein ist ein Feld  $A(\vec{r}, t)$  eine physikalische Größe, die an jedem Raumpunkt  $\vec{r}$  und zu jeder Zeit  $t$  einen gewissen Wert annimmt. Im folgenden wollen wir uns auf **statische**, d.h. zeitunabhängige Felder  $A(\vec{r})$  beschränken.

### 1.3.1 Klassifikation von Feldern

1. **Skalare Felder:** Ein skalares Feld  $\varphi$  ordnet einem Raumpunkt  $\vec{r}$  eine Zahl  $\varphi(\vec{r})$  zu,

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^3 \supset \mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{N} \subset \mathbb{R} \\ \mathcal{M} \ni \vec{r} &\mapsto \varphi(\vec{r}) \in \mathcal{N}.\end{aligned}$$

Mathematisch bedeutet dies, dass  $\varphi$  eine **skalarwertige** Funktion dreier unabhängiger Variablen  $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$  ist.

Ein skalares Feld  $\varphi(\vec{r})$  kann man in Form von **Höhenlinien** im  $\mathbb{R}^3$  darstellen, entlang derer das Feld konstante Werte annimmt,  $\varphi(\vec{r}) = \text{const.}$ . Hierbei sollte die Differenz  $\Delta\varphi = \varphi_i - \varphi_j$  zwischen den Werten des Feldes für benachbarte Höhenlinien  $\varphi(\vec{r}) = \varphi_i = \text{const.}$  und  $\varphi(\vec{r}) = \varphi_j = \text{const.}$  immer konstant gewählt werden.

**Beispiele:**

- (i)  $\varphi(\vec{r}) = \beta r$ ,  $\beta > 0$ , wobei  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , vgl. Abb. 1.38(a). Für dieses sehr einfache Feld sind die Höhenlinien im  $(x, y)$ -Diagramm äquidistant.
- (ii)  $\varphi(\vec{r}) = \alpha/r$ ,  $\alpha < 0$ , vgl. Abb. 1.38(b).

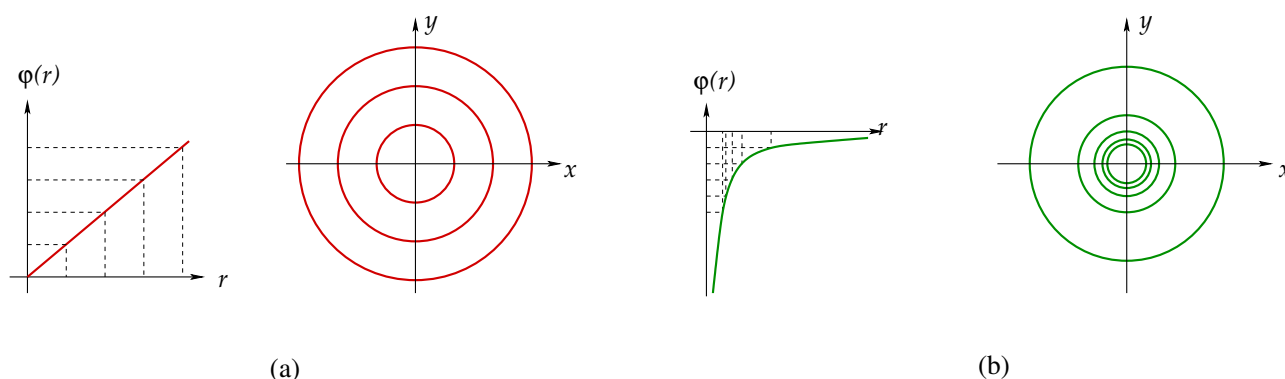


Abbildung 1.38: (a) Das Feld  $\varphi(\vec{r}) = \beta r$ ,  $\beta > 0$ , als Funktion von  $r$  und als Höhenliniendarstellung. (b) Entsprechendes für das Feld  $\varphi(\vec{r}) = \alpha/r$ ,  $\alpha < 0$ .

2. **Vektorfelder:** Ein Vektorfeld ordnet einem Raumpunkt  $\vec{r}$  einen Vektor  $\vec{a}(\vec{r})$  zu,

$$\begin{aligned}\vec{a} : \mathbb{R}^3 \supset \mathcal{M} &\rightarrow \mathcal{N} \subset \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{M} \ni \vec{r} &\mapsto \vec{a}(\vec{r}) \in \mathcal{N}.\end{aligned}$$

Mathematisch bedeutet dies, dass  $\vec{a}$  eine **vektorwertige** Funktion dreier unabhängiger Variablen  $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$  ist.

Auch hier kann man die **Höhenliniendarstellung** verwenden, für Linien konstanten **Betrags**  $|\vec{a}(\vec{r})| \equiv a(\vec{r}) = \text{const.}$  im  $\mathbb{R}^3$ . Allerdings muss man **zusätzlich** die Richtung von  $\vec{a}(\vec{r})$  angeben, z.B. durch Vektorpfeile der Länge  $a(\vec{r})$  am Ort  $\vec{r}$ .