für den Wert $\alpha = -\vec{a}\cdot\vec{b}/b^2 \in \mathbb{R}$. Damit erhalten wir nun

$$0 \le a^2 + \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{b^2} - 2\,\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{b^2} = a^2 - \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{b^2} \;.$$

Multiplikation mit b^2 ergibt

$$0 \le a^2 b^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \quad \Longleftrightarrow \quad |\vec{a}\cdot\vec{b}| \le ab \;\;\text{, q.e.d.}$$

Ein Vektorraum mit einem inneren Produkt (Skalarprodukt) heißt in der Mathematik **Prä-Hilbertraum** (oder manchmal auch **unitärer Vektorraum**).

1.1.6 Vektorprodukt

Das Vektorprodukt, bzw. das sog. **Kreuzprodukt**, ordnet zwei Vektoren einen Vektor zu:

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c}\;. \tag{1.27}$$

Dieser Vektor hat folgende Eigenschaften:

1. Der **Betrag** von $\vec{c}$ ist
$$c = ab\,\sin\varphi\;. \tag{1.28}$$
Damit ist die Maßzahl des Betrags von $\vec{c}$ gleich der Maßzahl der **Fläche** des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms, vgl. Abb. 1.16.

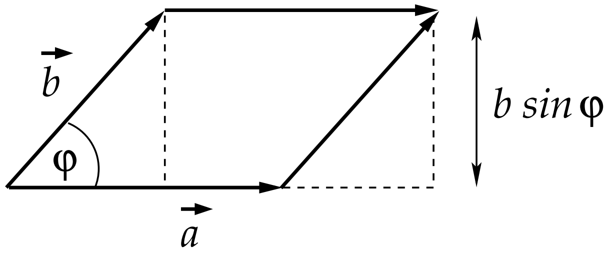

Abbildung 1.16: Zur Interpretation des Betrags des Kreuzproduktes $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$.

2. Der Vektor $\vec{c}$ steht senkrecht auf der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene. Seine Orientierung ergibt sich daraus, dass man den ersten Vektor ($\vec{a}$) auf kürzestem Weg in den zweiten Vektor ($\vec{b}$) dreht. Die Orientierung von $\vec{c}$ stimmt dabei mit dem Drehsinn einer Rechtsschraube überein, s. Abb. 1.17. Gemäß der (zweiten) Definition eines rechtshändigen Koordinatensystems bilden die Vektoren $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ also gerade ein solches. Das Kreuzprodukt besitzt allerdings weniger eine Richtung als vielmehr einen **Drehsinn**.

3. **Raumspiegelungen:** Das Kreuzprodukt $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$ hat andere Eigenschaften unter Raumspiegelungen als die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$. Spiegeln wir die Vektoren $\vec{a}$ oder $\vec{b}$ am Ursprung (ihrem gemeinsamen Fußpunkt), so werden sie in die zu ihnen antiparallelen Vektoren transformiert (ihre Richtung kehrt sich um),
$$\vec{a} \longrightarrow -\vec{a}\;, \quad \vec{b} \longrightarrow -\vec{b}\;,$$

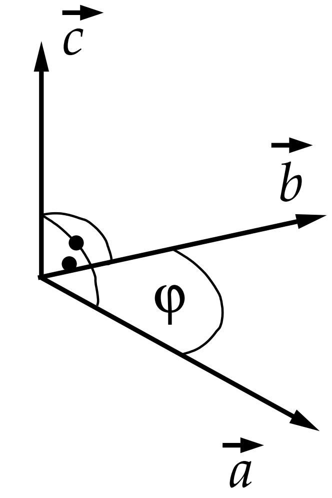

Abbildung 1.17: Zur Orientierung des Kreuzproduktes $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

vgl. Abb. 1.18. Solche Vektoren heißen **polare Vektoren**. Wie aber verhält sich

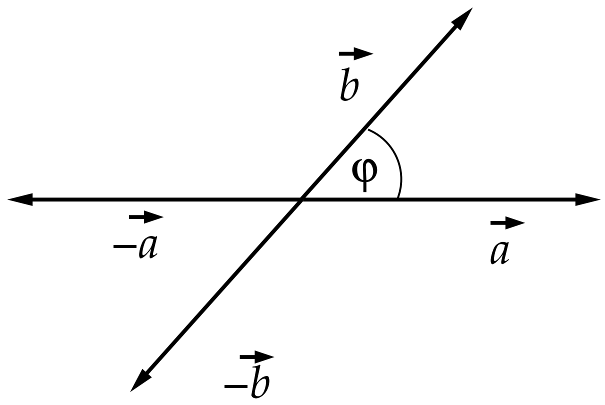

Abbildung 1.18: Transformation polarer Vektoren unter Raumspiegelungen.

das Kreuzprodukt unter Raumspiegelung? Rein mathematisch ergibt sich

$$(-\vec{a}) \times (-\vec{b}) = \vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}\,,$$

d.h. das Kreuzprodukt ändert sein Vorzeichen **nicht** unter Raumspiegelungen. Dies kann man sich aber auch über das Argument hinsichtlich des Drehsinnes von $\vec{c}$ graphisch veranschaulichen. Der Drehsinn, wenn man $-\vec{a}$ auf dem kürzesten Weg in $-\vec{b}$ dreht, bleibt der gleiche wie bei der Drehung von $\vec{a}$ in $\vec{b}$, s. Abb. 1.19. Solche Vektoren heißen **axiale Vektoren** oder **Pseudovektoren**. Bemerkung: Skalarprodukte aus zwei polaren oder zwei axialen Vektoren ändern sich nicht unter Raumspiegelungen, sind also echte Skalare. Skalarprodukte aus einem polaren und einem axialen Vektor ändern ihr Vorzeichen unter Raumspiegelungen. Man nennt sie daher **Pseudoskalare**.

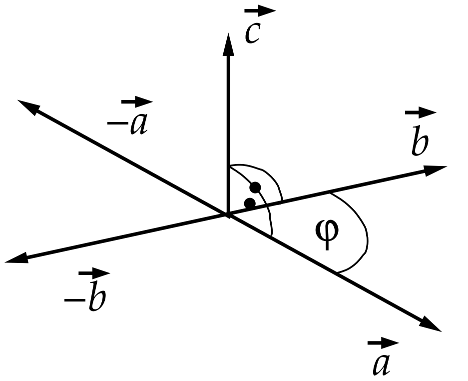

Abbildung 1.19: Transformation des Kreuzproduktes unter Raumspiegelungen.

4. **Antikommutativität:**
$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \ . \tag{1.29}$$
Beweis: aufgrund der Definition des Kreuzproduktes ist der Vektor $\vec{b} \times \vec{a}$ vom Betrag her identisch mit $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, aber er zeigt in die entgegengesetzte Richtung, s. Abb. 1.20. Daraus folgt $-\vec{c} = \vec{b} \times \vec{a}$. Nach Multiplikation beider Seiten dieser Gleichung mit -1 folgt die Behauptung, q.e.d.

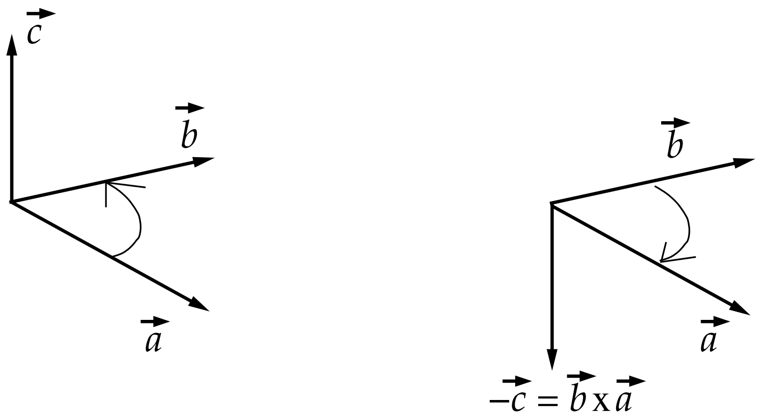

Abbildung 1.20: Zur Antikommutativität des Kreuzproduktes.

5. $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, falls (i) $\vec{a} = \vec{0}$ und/oder $\vec{b} = \vec{0}$, (ii) $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$, d.h. wenn die beiden Vektoren in dieselbe (oder die entgegengesetzte) Richtung zeigen. Dies folgt unmittelbar aus $\sin 0 = 0$. Solche Vektoren nennt man **kollinear**. Kollineare Vektoren spannen keine Ebene auf.

6. **Distributivität:**
$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \ . \tag{1.30}$$
Beweis: Man zerlege $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} + \vec{b}$ in Komponenten parallel und senkrecht zu $\vec{c}$, s. Abb. 1.21.

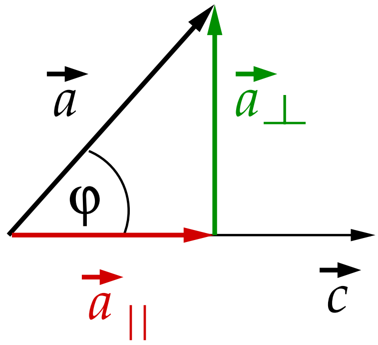

Abbildung 1.21: Zerlegung von $\vec{a}$ in Komponenten parallel und senkrecht zu $\vec{c}$.

Offenbar gilt $\vec{a} = \vec{a}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp}$ und analog $\vec{b} = \vec{b}_{\parallel} + \vec{b}_{\perp}$, $\vec{a} + \vec{b} = (\vec{a} + \vec{b})_{\parallel} + (\vec{a} + \vec{b})_{\perp}$. Im Vektorprodukt mit $\vec{c}$ tragen aber ausschließlich die **senkrechten** Komponenten dieser Vektoren bei, z.B.

$$\vec{a} \times \vec{c} = \vec{a}_{\perp} \times \vec{c}\,.$$

Um dies zu beweisen, bemerkt man zunächst, dass $\vec{a} \times \vec{c}$ und $\vec{a}_{\perp} \times \vec{c}$ in die gleiche Richtung zeigen. Man muss also nur noch zeigen, dass ihre Beträge übereinstimmen. Dies folgt unmittelbar aus Abb. 1.21:

$$|\vec{a}_{\perp} \times \vec{c}| = a_{\perp} c \sin\frac{\pi}{2} = a_{\perp} c = (a \sin\varphi) c = ac \sin\varphi = |\vec{a} \times \vec{c}|\ .$$

Weil also der parallele Anteil $\vec{a}_{\parallel}$ von $\vec{a}$ beim Bilden des Kreuzprodukts mit $\vec{c}$ wegfällt, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit (o.B.d.A.) im folgenden annehmen, dass $\vec{a}$ bereits senkrecht zu $\vec{c}$ steht, vgl. Abb. 1.22. Gleiches gilt für $\vec{b}$ und $\vec{a}+\vec{b}$.

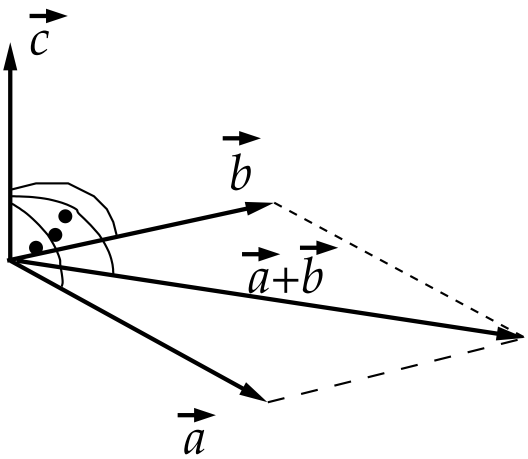

Abbildung 1.22: Zum Beweis des Distributivgesetzes.

Wir machen folgende Beobachtungen:

(i) Die Vektoren $\vec{a}\times\hat{c}$, $\vec{b}\times\hat{c}$, $(\vec{a}+\vec{b})\times\hat{c}$ liegen in der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene. Dies liegt daran, dass $\vec{c}$ bereits senkrecht zu den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a}+\vec{b}$ steht.

(ii) Für die Richtungen gilt:

$$\begin{aligned} \vec{a}\times\hat{c} &\perp \vec{a}\,, \\ \vec{b}\times\hat{c} &\perp \vec{b}\,, \\ (\vec{a}+\vec{b})\times\hat{c} &\perp \vec{a}+\vec{b}\,. \end{aligned}$$

Damit sind die Vektoren $\vec{a}\times\hat{c}$, $\vec{b}\times\hat{c}$ und $(\vec{a}+\vec{b})\times\hat{c}$ gegenüber den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a}+\vec{b}$ lediglich um $\pi/2$ gedreht. Untereinander stehen die erstgenannten aber im selben Winkel zueinander wie die letztgenannten, vgl. Abb. 1.23.

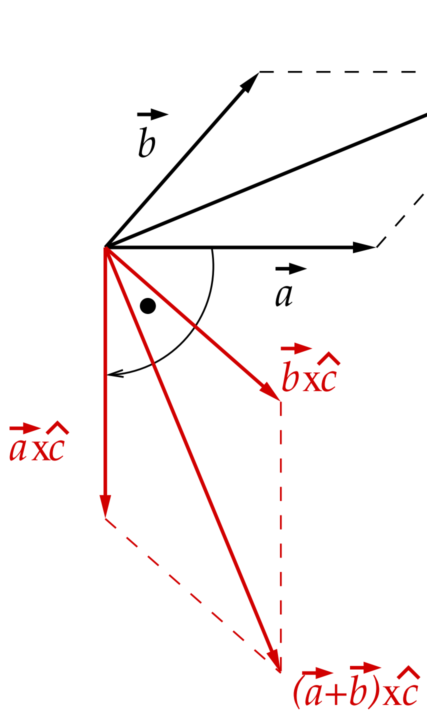

Abbildung 1.23: Die Vektoren $\vec{a}\times\hat{c}$, $\vec{b}\times\hat{c}$ und $(\vec{a}+\vec{b})\times\hat{c}$ sind im Vergleich zu $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a}\times\vec{b}$ um $\pi/2$ gedreht. Alle Vektoren liegen in der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene.

(iii) Für die Beträge gilt:

$$\begin{aligned} |\vec{a}\times\hat{c}| &= a = |\vec{a}|\,, \\ |\vec{b}\times\hat{c}| &= b = |\vec{b}|\,, \\ |(\vec{a}+\vec{b})\times\hat{c}| &= |\vec{a}+\vec{b}|\,, \end{aligned}$$

d.h. der Betrag von $\vec{a}\times\hat{c}$ identisch mit dem von $\vec{a}$, *etc.*

Folglich ist die Relation $(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}+\vec{b}$ nach Drehung aller beteiligten Vektoren um $\pi/2$ (durch vektorielle Multiplikation aller Vektoren mit $\hat{c}$) gemäß (ii) und (iii) identisch mit:

$$(\vec{a}+\vec{b}) \times \hat{c} = \vec{a} \times \hat{c} + \vec{b} \times \hat{c} \, .$$

Multiplikation beider Seiten mit c ergibt die Behauptung, q.e.d.

7. Das Kreuzprodukt ist **nicht assoziativ**,

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \, .$$

Dies wird unmittelbar klar, wenn man sich überlegt, dass der Vektor auf der linken Seite ein Vektor in der von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Ebene ist, während der auf der rechten Seite ein Vektor in der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Ebene ist. Diese können i.a. also nicht identisch sein.

8. **Bilinearität:** $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a} \times \vec{b}) \, . \tag{1.31}$$

Beweis: Die Multiplikation eines Vektors mit einer Konstanten ändert nichts an seiner Richtung. Aufgrund der Definition des Kreuzprodukts stimmen daher die Richtungen aller in dieser Gleichung beteiligten Vektoren überein. Wir brauchen sie also nur für die Beträge der beteiligten Vektoren überprüfen. Ferner ist die Gleichung trivial erfüllt für $\alpha = 0$. Wir betrachten daher nur $\alpha \neq 0$ und unterscheiden:

(i) $\alpha > 0$:

$$|(\alpha\vec{a}) \times \vec{b}| = (\alpha a) b \sin\varphi = a(\alpha b) \sin\varphi = |\vec{a} \times (\alpha\vec{b})| = \alpha(ab \sin\varphi) = \alpha|\vec{a} \times \vec{b}| \, .$$

(ii) $\alpha < 0$: wegen $\alpha\vec{a} = |\alpha|(-\vec{a})$, $\alpha\vec{b} = |\alpha|(-\vec{b})$, $\alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = |\alpha|(-\vec{a} \times \vec{b})$ und Abb. 1.18 gilt

$$\begin{aligned} |(\alpha\vec{a}) \times \vec{b}| &= |\alpha|\, ab \sin(\pi - \varphi) = -|\alpha|\, ab \sin\varphi = \alpha|\vec{a} \times \vec{b}| \, , \\ |\vec{a} \times (\alpha\vec{b})| &= |\alpha|\, ab \sin(\pi - \varphi) = -|\alpha|\, ab \sin\varphi = \alpha|\vec{a} \times \vec{b}| \, , \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

31.10.2016

Anwendungsbeispiel: **Sinussatz**
Betrachte Abb. 1.24. Es gilt $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = 0$. Daraus folgt unter Zuhilfenahme des Distributivgesetzes, der Antikommutativität und der Tatsache, dass das Kreuzprodukt für kollineare Vektoren verschwindet:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \vec{a} \times (-\vec{a} - \vec{c}) = -\vec{a} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a} \\ &= (-\vec{b} - \vec{c}) \times \vec{b} = -\vec{c} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} \, . \end{aligned}$$

Offenbar gilt für Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$, die $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = 0$ erfüllen, dass $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{c}$. Betrachten wir den Betrag der letzten Gleichung, $ab \sin(\pi - \gamma) = ca \sin(\pi - \beta) = bc \sin(\pi - \alpha)$ und benutzen $\sin(\pi - \varphi) = -\sin\varphi$, so folgt $ab \sin\gamma = ca \sin\beta = bc \sin\alpha$, oder, nach Division durch die entsprechenden Größen,

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \, , \quad \text{q.e.d.} \tag{1.32}$$

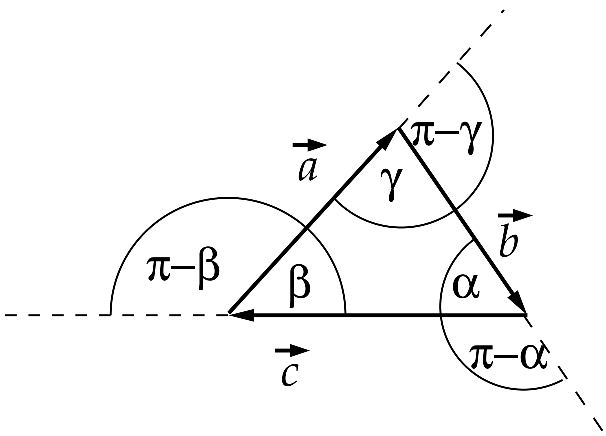

Abbildung 1.24: Zum Sinussatz.

1.1.7 “Höhere” Vektorprodukte

Das Kreuzprodukt bildet einen Vektor, den man auf zwei verschiedene Arten mit anderen Vektoren multiplizieren kann.

Spatprodukt

Wir bilden das **Skalarprodukt** eines Kreuzproduktes mit einem Vektor,

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\,. \tag{1.33}$$

Dieses Skalarprodukt heißt **Spatprodukt**. Zur Interpretation des Spatprodukts betrachten wir das von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannte **Parallelepiped**, vgl. Abb. 1.25.

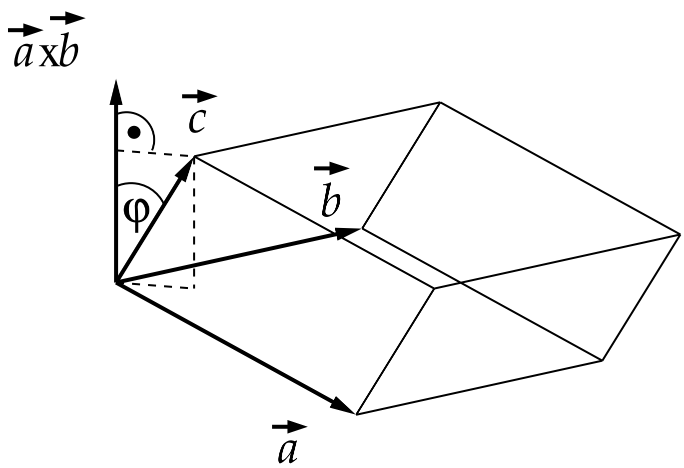

Abbildung 1.25: Zur geometrischen Interpretation des Spatprodukts.

Offenbar ist

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a} \times \vec{b}| \, c \cos\varphi \, ,$$

d.h. die Fläche $|\vec{a} \times \vec{b}|$ des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms, multipliziert mit der Projektion von $\vec{c}$ auf $\vec{a} \times \vec{b}$. Ersteres ist aber auch die **Grundfläche** und letzteres die **Höhe** des Parallelepipeds. Grundfläche mal Höhe ergibt genau das **Volumen** des Parallelepipeds. Das Spatprodukt ist mit dem Volumen des von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Parallelepipeds identisch.

Da es keine Rolle spielt, welche der Seitenflächen des Parallelepipeds als Grundfläche gewählt wird, ändert sich das Spatprodukt nicht unter **zyklischer Vertauschung** der Vektoren,

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} \, . \tag{1.34}$$

Doppeltes Kreuzprodukt

Wir bilden das **Kreuzprodukt** eines Kreuzprodukts mit einem Vektor,

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \, . \tag{1.35}$$

Es gilt der **Entwicklungssatz**

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \, (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \, (\vec{a} \cdot \vec{b}) \, , \tag{1.36}$$

den wir weiter unten beweisen werden. Mit dem Entwicklungssatz beweist man die **Jacobi-Identität**

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 \, . \tag{1.37}$$

Der Beweis wird als Übungsaufgabe gestellt.

1.1.8 Basisvektoren und Komponentendarstellung

Im folgenden sollen Vektoren durch Zahlenschemata dargestellt werden, welche ihre Komponenten in einer vorgegebenen Basis enthalten. Dazu bemerken wir zunächst, dass jeder Vektor $\vec{a}$ als Produkt seines Betrags a mit dem Einheitsvektor $\hat{a}$ in $\vec{a}$-Richtung dargestellt werden kann,

$$\vec{a} = a \, \hat{a} \, .$$

Wir betrachten nun zwei **kollineare** Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, d.h. zwei Vektoren, die in dieselbe Richtung zeigen, $\hat{a} = \hat{b}$, aber i.a. unterschiedliche Beträge haben. Offenbar kann man $\vec{a}$ durch $\vec{b}$ folgendermaßen ausdrücken:

$$\vec{a} = a \, \hat{a} = a \, \hat{b} = \frac{a}{b} \, b \, \hat{b} = \frac{a}{b} \, \vec{b} \, ,$$

oder

$$b \, \vec{a} - a \, \vec{b} = 0 \, . \tag{1.38}$$

Allgemein bezeichnet man zwei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ als **linear abhängig**, wenn man nichtnegative Zahlen α, $\beta \in \mathbb{R}$ finden kann, für die gilt:

$$\alpha \, \vec{a} + \beta \, \vec{b} = 0 \, . \tag{1.39}$$

Kollineare Vektoren sind offenbar linear abhängig, denn Gl. (1.39) ist für die Wahl $\alpha = b$ und $\beta = -a$ wegen Gl. (1.38) identisch erfüllt.

Definition: n Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbf{V}$ heißen **linear unabhängig**, wenn aus

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, \vec{a}_j = 0$$

folgt, dass $\alpha_j = 0 \;\; \forall \, j \, , \; 1 \leq j \leq n$. Falls nicht, so heißen sie linear abhängig.

Definition: Die **Dimension** eines Vektorraums $\mathbf{V}$ ist gleich der **maximalen** Anzahl linear unabhängiger Vektoren.

Definition: Die **Basis** eines d-dimensionalen Vektorraumes $\mathbf{V}$ ist eine Menge von d linear unabhängigen Vektoren.

Satz: Jeder **beliebige** Vektor $\vec{b} \in \mathbf{V}$ läßt sich als Linearkombination der Vektoren einer Basis von $\mathbf{V}$ schreiben.

Beweis: Sei $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_d\}$ eine Basis des d-dimensionalen Vektorraums $\mathbf{V}$. Per Definition sind $\{\vec{b}, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_d\}$ linear abhängig, denn sonst wäre $\mathbf{V}$ $(d+1)$-dimensional. Daraus folgt, dass $\exists$ Koeffizienten $\{\beta, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d\} \neq \{0, 0, 0, \ldots, 0\}$ mit

$$\sum_{j=1}^{d} \alpha_j \, \vec{a}_j + \beta \, \vec{b} = 0 \; .$$

Offenbar muss $\beta \neq 0$ sein, da ansonsten $\sum_{j=1}^{d} \alpha_j \, \vec{a}_j = 0$ mit Koeffizienten $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d\}$ $\neq \{0, 0, \ldots, 0\}$, was aber wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_d\}$ unmöglich ist. Dann darf man die obige Gleichung mittels Division durch β nach $\vec{b}$ auflösen:

$$\vec{b} = -\sum_{j=1}^{d} \frac{\alpha_j}{\beta} \, \vec{a}_j = \sum_{j=1}^{d} \gamma_j \, \vec{a}_j \; ,$$

mit $\gamma_j = -\alpha_j / \beta$, q.e.d.

Definition: Eine Menge paarweise zueinander **orthogonaler** Vektoren, $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n\}$, mit $\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j = 0 \;\; \forall \, i \neq j \, , \; 1 \leq i, j \leq n \, , \; n < d$, bezeichnet man als **Orthogonalsystem**. Falls $n = d$ (Dimension von $\mathbf{V}$), so bilden diese Vektoren eine Basis und man spricht von einem **vollständigen Orthogonalsystem**, bzw. einer **Orthogonalbasis** von $\mathbf{V}$.

Die beste Wahl für die Basisvektoren stellen **Einheitsvektoren** dar, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_d\}$, welche paarweise zueinander **orthogonal** sind,

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \; , \\ 0 & \text{falls } i \neq j \; . \end{cases} \tag{1.40}$$

Hier haben wir das sog. **Kronecker-Delta** δ_{ij} eingeführt. Jede Menge von paarweise zueinander orthogonalen Einheitsvektoren bezeichnet man als **Orthonormalsystem**. Eine Basis von orthogonalen Einheitsvektoren bezeichnet man als **vollständiges Orthonormalsystem**, bzw. als **Orthonormalbasis** von $\mathbf{V}$.

Aufgrund des oben bewiesenen Satzes gilt $\forall \, \vec{a} \in \mathbf{V}$:

$$\vec{a} = \sum_{j=1}^{d} a_j \, \vec{e}_j \; . \tag{1.41}$$

Man bezeichnet die Koeffizienten a_j als **Komponenten** von $\vec{a}$ bezüglich der Basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_d\}$, bzw. als **Koordinaten** von $\vec{a}$ in dieser Basis.

Die Komponenten bzw. Koordinaten sind von der Wahl der Basis abhängig. Man kann sie als Projektionen von $\vec{a}$ auf die einzelnen Basisvektoren darstellen,

$$\vec{e}_i \cdot \vec{a} = \sum_{j=1}^{d} a_j \, \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \sum_{j=1}^{d} a_j \, \delta_{ij} = a_i \ , \quad i = 1, \ldots, d \ , \tag{1.42}$$

wobei wir Gl. (1.40) benutzt haben. Die spezielle Eigenschaft des Kronecker-Deltas läßt die Summe über j "zusammenbrechen" und nur der Term mit $j = i$ "überlebt".

Bei fest vorgegebener Basis ist jeder Vektor $\vec{a}$ **eindeutig** durch seine Komponenten festgelegt. Man kann ihn daher auch durch ein **Zahlenschema** darstellen, z.B. als **Spaltenvektor**

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} .$$

oder als **Zeilenvektor**

$$\vec{a}^T = (a_1, \, a_2, \ldots, \, a_d) \ .$$

Das Superskript T bedeutet **Transposition**, d.h. Vertauschung von Spalten und Zeilen. Der transponierte Spaltenvektor $\vec{a}^T$ ist damit ein Zeilenvektor. In der Regel definieren wir Vektoren $\vec{a}$ als Spaltenvektoren.

Beispiel: Das Orthonormalsystem $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ (auch als $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ bezeichnet) bildet eine Basis des $\boldsymbol{E_3}$, vgl. Abb. 1.26 (a). Daraus folgt (s. Abb. 1.26(b)):

$$\vec{a} = a_1 \, \vec{e}_1 + a_2 \, \vec{e}_2 + a_3 \, \vec{e}_3 \ (= a_x \, \vec{e}_x + a_y \, \vec{e}_y + a_z \, \vec{e}_z) \ , \quad \text{mit } a_i = \vec{e}_i \cdot \vec{a} = a \, \cos \varphi_i \, , \ i = 1, 2, 3 \ .$$

Hierbei ist φ_i der Winkel zwischen dem Einheitsvektor $\vec{e}_i$ und dem Vektor $\vec{a}$, $\varphi_i = \angle(\vec{e}_i, \vec{a})$. Man bezeichnet $\cos \varphi_i = a_i/a$ als **Richtungskosinus**.

Der Betrag von $\vec{a}$ ist eindeutig durch seine Komponenten festgelegt,

$$a = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{3} a_i a_j \, \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{3} a_i a_j \, \delta_{ij}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} a_i^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \ .$$

Daraus folgt auch

$$1 = \sqrt{\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3} \ , \quad \text{oder} \quad 1 = \cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3 \ .$$

Bei Vorgabe von zwei Richtungskosinus ist der dritte also bis auf das Vorzeichen festgelegt, $\cos \varphi_3 = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \varphi_1 - \cos^2 \varphi_2}$.

1.1.9 Rechenregeln in Komponentendarstellung

In diesem Abschnitt beschränken wir uns auf den Vektorraum $\boldsymbol{E_3}$ mit der Orthonormalbasis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, d.h. Vektoren $\vec{a} \in \boldsymbol{E_3}$ kann man schreiben als $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = \sum_{j=1}^{3} a_j \, \vec{e}_j$.

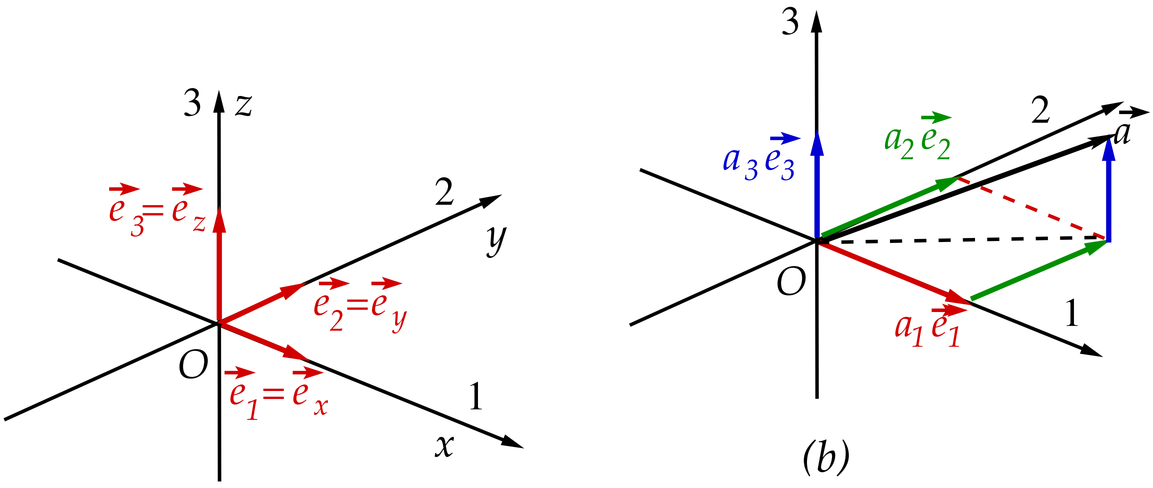

Abbildung 1.26: (a) Das Orthonormalsystem $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ als Basis des $\boldsymbol{E}_3$. (b) Der Vektor $\vec{a}$ als Summe der mit den Komponenten a_i skalierten Einheitsvektoren $\vec{e}_i$.

1. **Spezielle Vektoren:**
   (i) Nullvektor: $\vec{0} = (0, 0, 0)^T$.
   (ii) Basisvektoren:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= (1, 0, 0)^T \,, \\ \vec{e}_2 &= (0, 1, 0)^T \,, \\ \vec{e}_3 &= (0, 0, 1)^T \,. \end{aligned} \tag{1.43}$$

2. **Addition:**

$$\begin{aligned} & \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \\ \Longleftrightarrow\quad & \sum_{j=1}^{3} c_j\, \vec{e}_j = \sum_{j=1}^{3} (a_j + b_j)\, \vec{e}_j \\ \Longrightarrow\quad & \vec{e}_i \cdot \vec{c} = c_i = \sum_{j=1}^{3} (a_j + b_j)\, \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \sum_{j=1}^{3} (a_j + b_j)\, \delta_{ij} = a_i + b_i \\ \Longrightarrow\quad & \vec{c} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)^T \,. \end{aligned}$$

   Bei vorgegebener Basis entspricht die Addition von Vektoren der Addition der Komponenten der Vektoren.

3. **Multiplikation mit reellen Zahlen:** Sei $\vec{b} = \alpha\vec{a}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \vec{b} = \sum_{j=1}^{3} b_j\, \vec{e}_j = \alpha\vec{a} = \sum_{j=1}^{3} (\alpha a_j)\, \vec{e}_j \\ \Longrightarrow\quad & b_i = \alpha\, a_i \\ \Longrightarrow\quad & \vec{b} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)^T \,. \end{aligned}$$

Bei vorgegebener Basis entspricht die Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl der Multiplikation jeder Komponente des Vektors mit dieser Zahl.

4. **Skalarprodukt:**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j \, \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j \, \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i \, .$$

Das Skalarprodukt ist gleich der Summe der Produkte der Komponenten.

4.11.2016

5. **Vektorprodukt:** Man überzeugt sich zunächst anhand von Abb. 1.26, dass folgende Identitäten gelten:

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \, , \quad \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \, , \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \, .$$

Daraus folgt

$$\vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) = \epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j,k) \textbf{ gerade} \text{ Permutation von } (1,2,3) \text{ ist} \, , \\ -1 & \text{falls } (i,j,k) \textbf{ ungerade} \text{ Permutation von } (1,2,3) \text{ ist} \, , \\ 0 & \text{sonst} \, . \end{cases} \tag{1.44}$$

Gerade Permutationen von (1,2,3) sind **zyklische** Permutationen, also (2,3,1) und (3,1,2). Ungerade Permutationen sind **antizyklische** Permutationen, also (3,2,1), (2,1,3) und (1,3,2). In Gl. (1.44) haben wir mit dem Symbol ϵ_{ijk} den **total antisymmetrischen Tensor dritter Stufe**, auch **Levi-Cività-Tensor** genannt, eingeführt.

Eigenschaften des Levi-Cività-Tensors:

(i) Die Komponenten des Tensors verschwinden für zwei oder drei **gleiche** Indizes,

$$\epsilon_{iik} = \epsilon_{iji} = \epsilon_{ijj} = 0 \quad \forall \, i,j,k \, . \tag{1.45}$$

Nur **unterschiedliche** Indizes ergeben eine von null verschiedene Komponente.

(ii) Die Komponenten des Tensors wechseln ihr Vorzeichen unter Vertauschung zweier Indizes,

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj} = \epsilon_{kij} = -\epsilon_{kji} = \epsilon_{jki} = -\epsilon_{jik} \, . \tag{1.46}$$

Dies folgt aus der Definition (1.44) des Tensors.

(iii) **Konvolutionssatz:**

$$\sum_{j=1}^{3} \epsilon_{ikj} \, \epsilon_{jlm} = \delta_{il} \, \delta_{km} - \delta_{im} \, \delta_{kl} \, . \tag{1.47}$$

Dies beweist man leicht durch Ausschreiben der Summe auf der linken Seite und eine explizite Fallbetrachtung für die “freien” Indizes i,k,l,m (benutze, dass die Komponenten des Levi-Cività-Tensors für zwei oder drei gleiche Indizes verschwinden).