Theoretische Physik I: Mathematische Methoden

Dirk H. Rischke

Wintersemester 2016/2017

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematische Vorbereitungen

1.1 Vektoren

1.1.1 Einführung

21.10.2016

Wir haben ein intuitives Verständnis von Naturvorgängen:

- **Beispiel 1:** Morgens geht die Sonne auf, abends geht sie unter.
  Frage: Warum geht sie auf und unter?
- **Beispiel 2:** Wenn die Sonne aufgeht, wird es hell.
  Frage: Was läßt die Sonne scheinen?
- **Beispiel 3:** Ein Ball, der losgelassen wird, fällt zu Boden (das berühmte Apfel-Experiment von Sir Isaac Newton!).
  Frage: Was läßt den Ball fallen?

Die **Physik** befaßt sich mit der Erklärung intuitiv akzeptierter, aber auch neuer, bislang unverstandener Erfahrungstatsachen mit Hilfe **wissenschaftlicher Methoden**.

Die **experimentelle Physik** befaßt sich mit der **Beobachtung** von erfahrbaren Tatsachen durch reproduzierbare **Experimente**.

Die **Theoretische Physik** befaßt sich mit der Erklärung der Beobachtung mit Hilfe **mathematisch-analytischer Methoden**. Manche meiner Kollegen fassen das so zusammen: "Der Experimentator blättert die Seiten im Buch der Natur um, der Theoretiker liest in ihm".

Um die Gesetzmäßigkeit zu verstehen, warum der Ball zu Boden fällt, müssen wir zunächst seine Bewegung beobachten und **quantitativ** (nicht nur qualitativ) erfassen. Mit anderen Worten, wir müssen festlegen, zu welchem **Zeitpunkt** er sich an welchem **Ort** befindet. Bei geradliniger Bewegung ist dies besonders einfach, s. Abb. 1.1.

Dieses einfache Beispiel macht deutlich, dass physikalische Größen (mindestens) durch die Angabe von **zwei** Größen bestimmt sind: **Maßeinheit** (auch landläufig **"Dimension"** genannt) und **Maßzahl**. Beispiele sind in Tabelle 1.1 aufgeführt. Physikalische Größen, die durch diese zwei Größen bestimmt sind, nennt man in der Physik **skalare** Größen, oder kurz **Skalare**.

Es gibt aber auch Größen, die zusätzlich die Angabe einer **Richtung** benötigen. Ein Beispiel ist die **Geschwindigkeit**. Im oben genannten Beispiel des fallenden Balls zeigt die Geschwindigkeit nach unten. Solche Größen nennt man **vektorielle** Größen, oder kurz **Vektoren**.

Dies ist verallgemeinerbar: es gibt Größen, die durch die Angabe von zwei, drei, vier *etc.* Richtungen definiert sind. Diese Größen nennt man **Tensoren zweiter, dritter,**

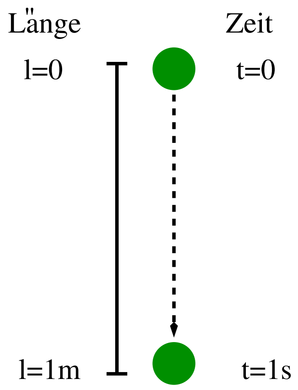

Abbildung 1.1: Ein nach unten fallender Ball.

Physikalische Größe	Maßeinheit/Dimension	Maßzahl
Länge	Meter (m)	(z.B.) 1
Zeit	Sekunde (s)	(z.B.) 1
Masse	Kilogramm (kg)	(z.B.) 79
Temperatur	Grad Celsius (°C)	(z.B.) 36.5

Tabelle 1.1: Beispiele für physikalische Größen mit Maßeinheit/Dimension und Maßzahl.

vierter *etc.* Stufe. Ein Vektor ist ein Tensor erster Stufe, ein Skalar ein Tensor nullter Stufe.

1.1.2 Definition eines Vektors

Der einfachste Vektor in der Mechanik ist der **Ortsvektor**. Er mißt den Abstand eines Raumpunktes von einer vorher festgelegten Ausgangsposition, dem **Ursprung** eines vorher festgelegten **Koordinatensystems**, s. Abb. 1.2. Im oben genannten Beispiel des fallenden Balles sei der Koordinatenursprung die Position des Balles zum Zeitpunkt $t = 0$. Zum Zeitpunkt $t = 1$s ist die Position des Balles 1m nach unten vom Koordinatenursprung entfernt. Der Ortsvektor des Balles zeigt deshalb nach unten und hat die Länge 1m.

Bei einer **eindimensionalen** Bewegung (wie im Beispiel des fallenden Balles) ist die Richtung klar und man benötigt nicht unbedingt einen Vektor, um diese festzulegen. Die Sache verkompliziert sich, wenn die Bewegung des Balles **zwei-** oder **dreidimensional** wird.

Im allgemeinen beschreiben Ortsvektoren $\vec{r}$ Punkte im dreidimensionalen **Euklidschen Raum $\boldsymbol{E_3}$**. Bevor man einen Ortsvektor definieren kann, benötigt man den **Koordinatenursprung** O. Der Ortsvektor eines Punktes A ergibt sich dann dadurch, dass man den Ursprung O mit A verbindet. Die Richtung des Ortsvektors ergibt sich aus der Festlegung, die Strecke OA von O nach A zu durchlaufen, s. Abb. 1.3.

Jeder Vektor $\vec{a}$ hat eine **Länge** (einen **Betrag**),

$$a = |\vec{a}| \ , \tag{1.1}$$

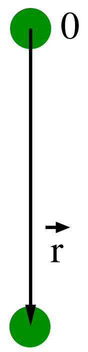

Abbildung 1.2: Der Ortsvektor $\vec{r}$ des nach unten fallenden Balls aus Abb. 1.1.

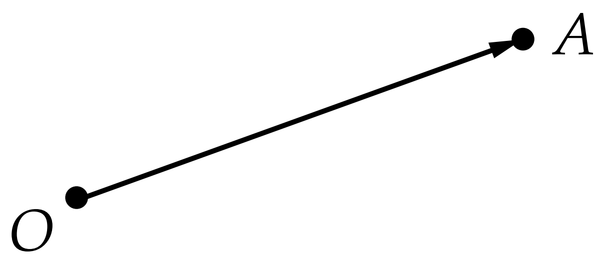

Abbildung 1.3: Der Ortsvektor des Punktes A.

und eine **Richtung**, die durch einen Vektor vom Betrag eins, einen sog. **Einheitsvektor**, festgelegt wird:

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{a} \ , \quad |\hat{a}| = 1 \ . \tag{1.2}$$

Der Betrag eines Vektors ist vom **Bezugs-** oder **Koordinatensystem** unabhängig. Die Richtung eines Vektors kann sich aber bei einem Wechsel des Bezugs- bzw. Koordinatensystems **scheinbar** ändern, wenn sie durch ihre Koordinaten im **neuen** Bezugssystems ausgedrückt wird. Hierzu später mehr.

1.1.3 Definition des kartesischen Koordinatensystems

Das einfachste Bezugs- bzw. Koordinatensystem besteht aus drei senkrecht, d.h. **rechtwinklig** aufeinanderstehenden Geraden, die sich in einem gemeinsamen Punkt, dem Koordinatenursprung O, schneiden, s. Abb. 1.4.

Diese Geraden nennt man **Achsen** des Koordinatensystems. Man gibt ihnen Richtungen, und zwar so, dass sie in der Reihenfolge (1,2,3) bzw. (x, y, z) ein **rechtshändiges** System bilden. Woran sieht man, dass es sich um ein rechtshändiges System handelt? Die folgenden Finger der rechten Hand bilden ein solches System: Daumen $= x$, Zeigefinger $= y$, Mittelfinger $= z$. Eine weitere Möglichkeit ist, die Gerade 1 auf kürzestem Weg in die Gerade 2 zu drehen. Dann zeigt die Gerade 3 in die Richtung der Bewegung einer **Rechtsschraube**. Ein solches rechtshändiges Koordinatensystem nennt man **kartesisches Koordinatensystem**.

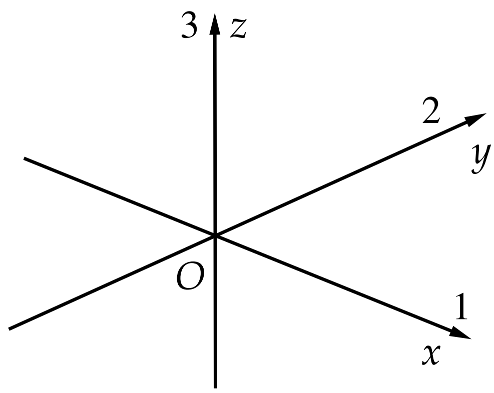

Abbildung 1.4: Rechtshändiges Koordinatensystem.

Es gibt auch **linkshändige** Koordinatensysteme. Sie lassen sich nicht durch stetige **Drehungen** (welche eine sog. **kontinuierliche Symmetrieoperation** darstellen) in rechtshändige überführen, sondern nur durch eine **Raumspiegelung** (eine sog. **diskrete Symmetrieoperation**). Dazu müssen eine **ungerade** Anzahl von Koordinatenachsen ihre Richtung umkehren, z.B. alle drei, wie in Abb. 1.5 gezeigt. Es genügt aber auch, lediglich eine Achse, z.B. die z-Achse, umzudrehen. Die Umkehrung einer geraden Anzahl von Achsen ändert die Händigkeit des Koordinatensystems nicht.

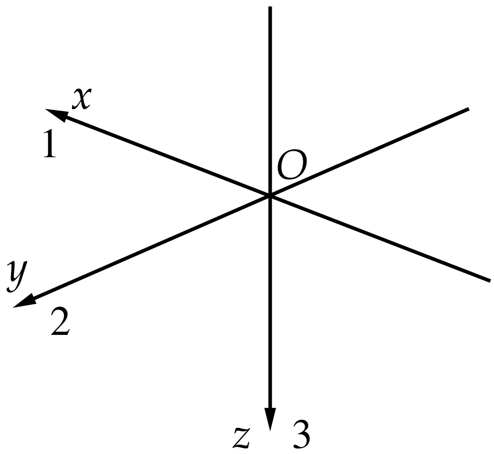

Abbildung 1.5: Linkshändiges Koordinatensystem.

1.1.4 Rechenregeln für Vektoren

Vorbemerkungen

1. Man bezeichnet zwei Vektoren als gleich, wenn sie die gleiche Länge und die gleiche Richtung aufweisen. Sie brauchen **nicht** den gleichen Ausgangspunkt zu haben, s. Abb. 1.6. Mit anderen Worten, Vektoren sind **frei verschiebbar**.

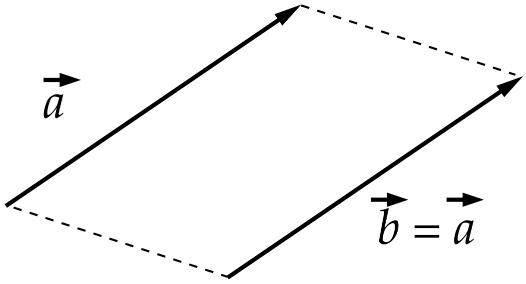

Abbildung 1.6: Zwei gleiche Vektoren.

2. Zu jedem Vektor $\vec{a}$ gibt es einen gleich langen, aber **antiparallelen** Vektor $-\vec{a}$.
3. Ein sog. **Einheitsvektor** ist ein Vektor vom Betrag 1 (s. o.).

Addition von Vektoren

1. **Parallelogrammregel:** Gegeben seien zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, vgl. Abb. 1.7(a). Man verschiebe nun $\vec{b}$ so, dass der Fußpunkt von $\vec{b}$ an der Spitze von $\vec{a}$ zu liegen kommt. Der **Summenvektor** $\vec{a} + \vec{b}$ beginnt am Fußpunkt von $\vec{a}$ und endet an der Spitze von $\vec{b}$, s. Abb. 1.7(b). Die Addition von Vektoren ist einfach, da zwei Vektoren eine Ebene aufspannen. Man kann sie sich also einfach graphisch verdeutlichen.

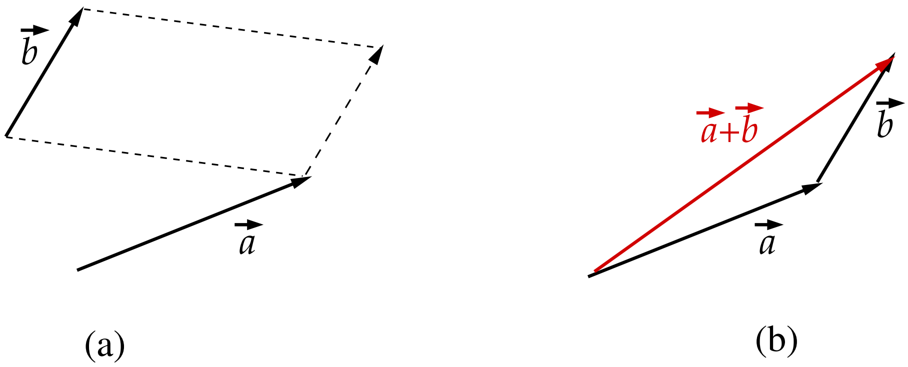

Abbildung 1.7: Addition von Vektoren mit Hilfe der Parallelogrammregel.

2. **Kommutativität:**
$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}\ . \tag{1.3}$$
Dies wird unmittelbar aus Abb. 1.8 deutlich.
3. **Assoziativität:**
$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})\ . \tag{1.4}$$
Auch dies kann man sich noch graphisch veranschaulichen, da drei Vektoren maximal den dreidimensionalen Raum aufspannen, vgl. Abb. 1.9.

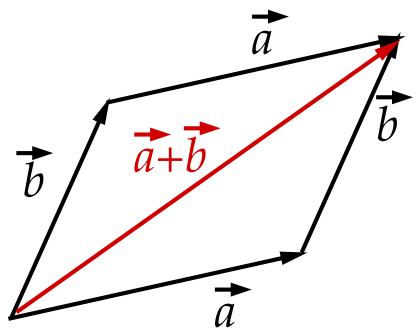

Abbildung 1.8: Verdeutlichung der Kommutativität der Vektoraddition.

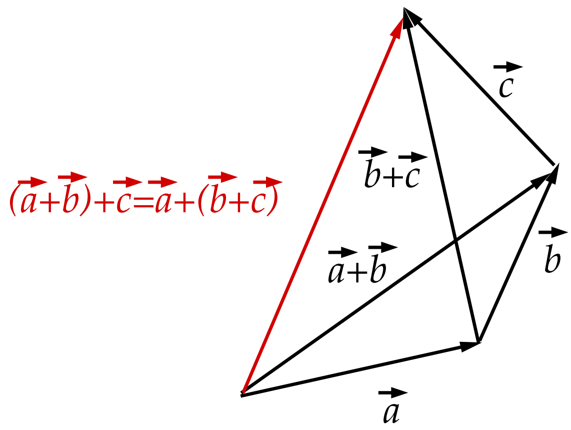

Abbildung 1.9: Verdeutlichung der Assoziativität der Vektoraddition.

4. **Subtraktion:**

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \; . \tag{1.5}$$

Die Subtraktion des Vektors $\vec{b}$ von Vektor $\vec{a}$ ergibt sich aus der **Addition** des zu $\vec{b}$ **antiparallelen** Vektors $-\vec{b}$ zu Vektor $\vec{a}$, s. Abb. 1.10. Der Vektor $\vec{a} - \vec{b}$ ist ein Vektor, der von der Spitze von $\vec{b}$ zur Spitze von $\vec{a}$ zeigt.

5. Subtrahiert man $\vec{a}$ von sich selbst, so ergibt sich der sog. **Nullvektor** $\vec{0}$,

$$\vec{a} - \vec{a} = \vec{0} \; . \tag{1.6}$$

Er ist der einzige Vektor, der **keine** Richtung hat, damit ist er gleichzeitig ein **Skalar**, $\vec{0} = 0$. Für alle Vektoren $\vec{a}$ gilt

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \; . \tag{1.7}$$

Die Eigenschaften (1.3), (1.4), (1.6) und (1.7) bedeuten, dass die Gesamtheit der Vektoren im $\boldsymbol{E_3}$ eine **kommutative** (oder **Abelsche**) **Gruppe** bilden.

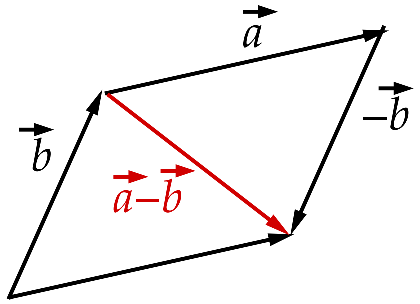

Abbildung 1.10: Verdeutlichung der Vektorsubtraktion.

Multiplikation von Vektoren mit einer Zahl

24.10.2016

1. **Einfache Multiplikation:** α sei eine reelle Zahl, $\alpha \in \mathbb{R}$, und $\vec{a}$ sei ein beliebiger Vektor. $\alpha\vec{a}$ ist ein Vektor mit folgenden Eigenschaften:
   (i) Falls $\alpha > 0$, so ist $\alpha\vec{a}$ **parallel** zu $\vec{a}$.
   (ii) Falls $\alpha < 0$, so ist $\alpha\vec{a}$ **antiparallel** zu $\vec{a}$.
   (iii) $|\alpha\vec{a}| = |\alpha|a$.
   (iv) $1\vec{a} = \vec{a}$.
   (v) $0\vec{a} = \vec{0} = 0$.
   (vi) $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

2. **Distributivität:** $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\vec{a}, \vec{b}$ seien Vektoren. Dann gilt:

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}\ . \tag{1.8}$$

Beweis: s. Abb. 1.11.

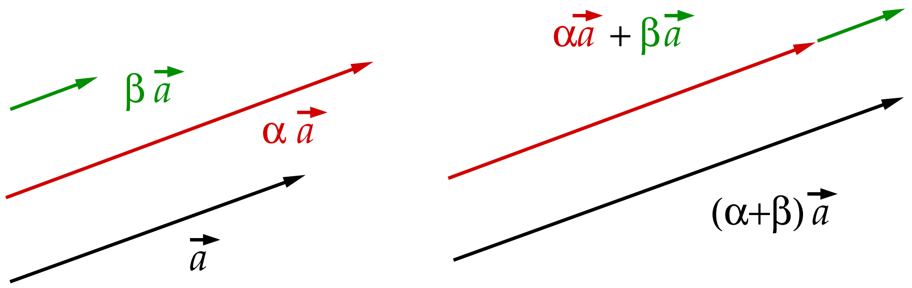

Abbildung 1.11: Veranschaulichung des ersten Distributivgesetzes.

Ferner gilt:

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}\ . \tag{1.9}$$

Beweis: s. Abb. 1.12. Es gilt $\alpha\vec{a}+\vec{x} = \vec{y}$. Außerdem gilt $\vec{x} = \hat{\alpha}\vec{b}$ mit einer Konstanten $\hat{\alpha} > 0$. Ferner gilt $\vec{y} = \bar{\alpha}(\vec{a}+\vec{b})$ mit einer Konstanten $\bar{\alpha} > 0$. Die Behauptung ist bewiesen, wenn wir zeigen können, dass $\hat{\alpha} = \bar{\alpha} = \alpha$, denn dann ist $\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{y} = \alpha\vec{a}+\vec{x} = \alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$, q.e.d.

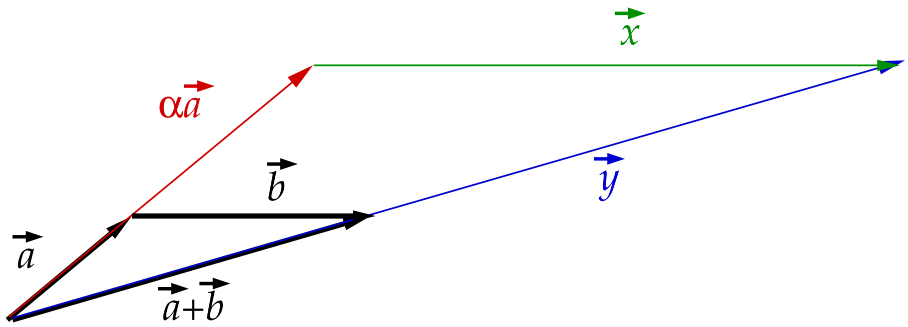

Abbildung 1.12: Veranschaulichung des zweiten Distributivgesetzes.

Nach dem ersten Strahlensatz gilt

$$\frac{|\vec{y}|}{|\vec{a}+\vec{b}|} = \frac{|\alpha\vec{a}|}{|\vec{a}|} = \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{|\bar{\alpha}(\vec{a}+\vec{b})|}{|\vec{a}+\vec{b}|} = \bar{\alpha} = \alpha\ . \tag{1.10}$$

Nach dem zweiten Strahlensatz gilt

$$\frac{|\vec{x}|}{|\vec{b}|} = \frac{|\alpha\vec{a}|}{|\vec{a}|} = \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{|\hat{\alpha}\vec{b}|}{|\vec{b}|} = \hat{\alpha} = \alpha\ , \quad \text{q.e.d.} \tag{1.11}$$

3. **Assoziativität:** $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\vec{a}$ sei ein beliebiger Vektor. Dann gilt:

$$\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a} = \alpha\beta\vec{a}\ . \tag{1.12}$$

Beweis: Die Beträge der Vektoren auf beiden Seiten der Gleichung sind gleich, $|\alpha||\beta\vec{a}| = |\alpha||\beta||\vec{a}| = |\alpha\beta||\vec{a}| = |\alpha\beta\vec{a}|$. Die Richtungen der Vektoren ist ebenfalls gleich, alle Richtungen zeigen in Richtung von $\vec{a}$, q.e.d.

4. **Einheitsvektor:** Aus jedem Vektor $\vec{a}$ läßt sich durch Multiplikation mit dem Inversen seines Betrages ein Einheitsvektor in Richtung von $\vec{a}$ konstruieren:

$$\vec{e}_a = \hat{a} = \frac{1}{a}\vec{a}\ , \quad |\vec{e}_a| = |\hat{a}| = \frac{1}{a}|\vec{a}| = \frac{a}{a} = 1\ . \tag{1.13}$$

Einheitsvektoren werden in der Regel mit dem Symbol $\vec{e}$ oder $\vec{n}$ oder mit einem "Hut" anstelle des Vektorzeichens gekennzeichnet.

Definition eines Vektorraums

Die o.g. Eigenschaften von Vektoren kann man – anstelle sie für bestimmte Vektoren im $\boldsymbol{E_3}$ zu beweisen – auch zunächst **fordern**. Sie sind dann sog. **Axiome**. Alle Objekte, die dann diese Eigenschaften erfüllen, bezeichnet man als **Vektoren**. Die Menge **aller** Vektoren, die diesen Axiomen genügen, nennt man einen **linearen Vektorraum** $\boldsymbol{V}$ über dem Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Die Axiome lauten noch einmal zusammengefaßt:

1. Zwischen zwei Elementen $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbf{V}$ ist eine Verknüpfung (Addition) definiert,

   $$\vec{a} + \vec{b} = \vec{s}\ , \tag{1.14}$$

   mit folgenden Eigenschaften:

   (i) $\vec{s} \in \mathbf{V}$,

   (ii) Assoziativität:

   $$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})\ , \quad \vec{c} \in \mathbf{V}\ , \tag{1.15}$$

   (iii) $\exists$ Nullelement $\vec{0}$ mit $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}\ \ \forall\, \vec{a} \in \mathbf{V}$,

   (iv) $\forall\, \vec{a} \in \mathbf{V}\ \ \exists(-\vec{a}) \in \mathbf{V}$ mit $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$,

   (v) Kommutativität:

   $$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}\ . \tag{1.16}$$

2. Multiplikation mit reellen Zahlen α, β:

   (i) $\alpha \in \mathbb{R}, \vec{a} \in \mathbf{V} \longrightarrow \alpha\vec{a} \in \mathbf{V}$,

   (ii) Distributivität:

   $$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}\ , \tag{1.17}$$
   $$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}\ , \tag{1.18}$$

   (iii) Assoziativität:

   $$\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}\ , \tag{1.19}$$

   (iv) $\exists$ Einselement 1 mit $1\vec{a} = \vec{a}\ \ \forall\, \vec{a} \in \mathbf{V}$.

Dies definiert die Multiplikation von Vektoren mit Skalaren. Aber kann man auch Vektoren mit Vektoren multiplizieren? Dies geht in der Tat und zwar auf zwei verschiedene Arten und Weisen, wie in den nächsten beiden Abschnitten erläutert. Man unterscheidet ein sog. **inneres Produkt**, das **Skalarprodukt**, und ein sog. **äußeres Produkt**, das **Vektorprodukt**.

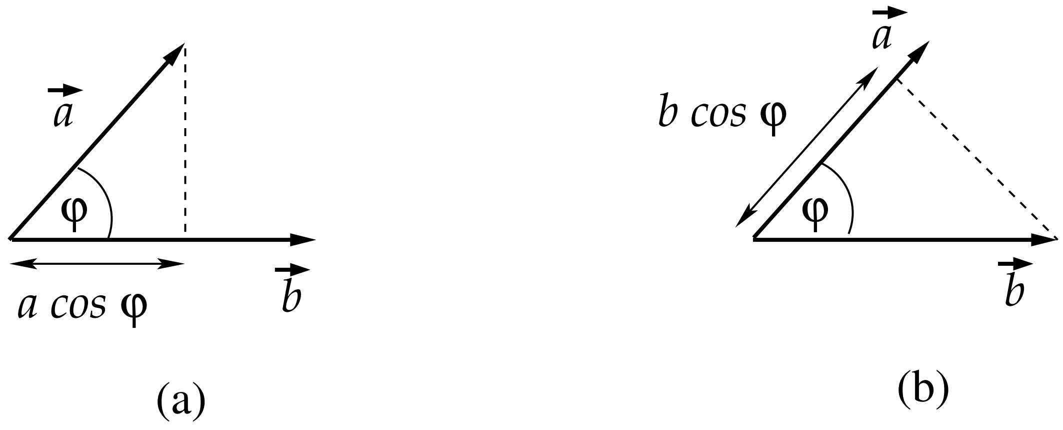

Abbildung 1.13: Graphische Veranschaulichung des Skalarprodukts.

1.1.5 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ ist definiert als

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos\varphi \ . \tag{1.20}$$

wobei φ der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist, vgl. Abb. 1.13. Aus der Definition ist sofort ersichtlich, dass das Skalarprodukt **kommutativ** ist,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \ . \tag{1.21}$$

Die graphische Veranschaulichung in Abb. 1.13(a) besagt, dass das Skalarprodukt das Produkt aus der Länge des zweiten Vektors und der Projektion des ersten Vektors in Richtung des zweiten Vektors ist. Aufgrund der Kommutativität (1.21) des Skalarprodukts kann man auch umgekehrt den zweiten Vektor auf den ersten projizieren und dann mit der Länge des ersten Vektors multiplizieren, s. Abb. 1.13(b).

Das Skalarprodukt hat folgende Eigenschaften:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, falls (i) $a = 0$ und/oder $b = 0$, oder (ii) $\varphi = \pi/2$ (da $\cos\pi/2 = 0$). In diesem Fall stehen die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ **orthogonal** zueinander, $\vec{a} \perp \vec{b}$.

2. **Projektionen** eines Vektors $\vec{a}$ in Richtung eines anderen Vektors $\vec{b}$ lassen sich durch das Skalarprodukt von $\vec{a}$ mit dem **Einheitsvektor** in Richtung von $\vec{b}$ darstellen: $\vec{a} \cdot \hat{b} = a\cos\varphi$.

3. **Distributivität:**
$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \ . \tag{1.22}$$
Beweis: Aus Abb. 1.14 ist ersichtlich, dass für die Projektion von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} + \vec{b}$ auf die Richtung von $\vec{c}$ gilt: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \hat{c} = \vec{a} \cdot \hat{c} + \vec{b} \cdot \hat{c}$. Multipliziert man diese Gleichung mit c, so folgt wegen $\vec{c} = c\,\hat{c}$ die Behauptung, q.e.d.

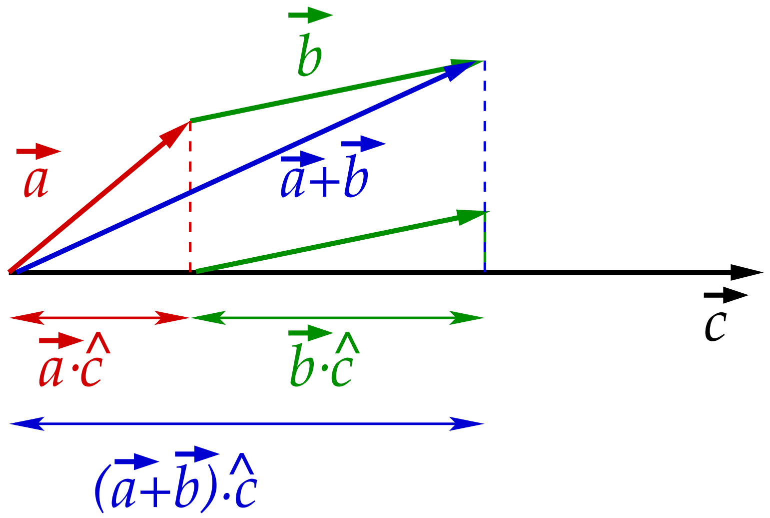

Abbildung 1.14: Veranschaulichung des Distributivgesetzes für das Skalarprodukt.

4. **Bilinearität:** $\forall\,\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) \ . \tag{1.23}$$

   Beweis: Für $\alpha = 0$ ist die Behauptung trivial erfüllt. Für $\alpha \neq 0$ unterscheiden wir zwei Fälle,

   (i) $\alpha > 0$:

$$\begin{aligned}(\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} &= (\alpha a)b\cos\varphi = \alpha ab\cos\varphi = \alpha(ab\cos\varphi) = \alpha(\vec{a}\cdot\vec{b}) \\ &= a(\alpha b)\cos\varphi = \vec{a}\cdot(\alpha\vec{b}) \ ,\end{aligned}$$

   (ii) $\alpha < 0$: Wir benutzen $\alpha\vec{a} = |\alpha|(-\vec{a})$ und die Tatsache, dass der Winkel zwischen den Vektoren $-\vec{a}$ und $\vec{b}$ gerade $\pi - \varphi$ beträgt, s. Abb. 1.15. Dann gilt wegen $\cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$:

$$\begin{aligned}(\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} &= |\alpha|ab\cos(\pi-\varphi) = -|\alpha|ab\cos\varphi = \alpha ab\cos\varphi = \alpha(ab\cos\varphi) = \alpha(\vec{a}\cdot\vec{b}) \\ &= a(\alpha b\cos\varphi) = \vec{a}\cdot(\alpha\vec{b}) \ .\end{aligned}$$

5. **Betrag** eines Vektors: Es gilt für das Skalarprodukt eines Vektors $\vec{a}$ mit sich selbst:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = aa\cos 0 = a^2 \geq 0 \ , \tag{1.24}$$

   wobei das Gleichheitszeichen für den Fall steht, dass $\vec{a} = \vec{0}$. Daraus folgt, dass man den Betrag oder die sog. **Norm** eines Vektors wie folgt berechnen kann: $a = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$. Für Einheitsvektoren gilt natürlich $\hat{a} \cdot \hat{a} = 1$.

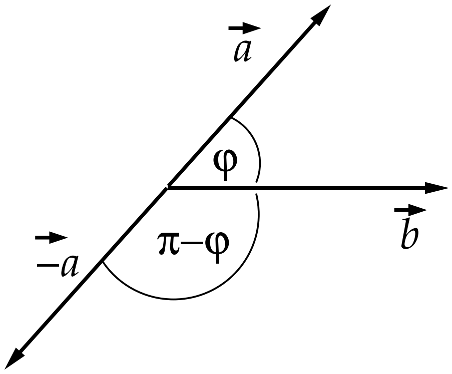

Abbildung 1.15: Zum Beweis der Bilinearität des Skalarprodukts für $\alpha < 0$.

28.10.2016

6. **Schwarzsche Ungleichung:**
$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq ab\,. \tag{1.25}$$
Dies folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass $|\cos\varphi| \leq 1$.

7. **Dreiecksungleichung:**
$$|a - b| \leq |\vec{a} + \vec{b}| \leq a + b\,. \tag{1.26}$$
Beweis: Die Schwarzsche Ungleichung (1.25), bzw. die Tatsache, dass $-1 \leq \cos\varphi \leq 1$, liefert $-ab \leq \vec{a} \cdot \vec{b} \leq ab$. Wir multiplizieren mit 2 und addieren $a^2 + b^2$:
$$\begin{aligned} & a^2 + b^2 - 2ab \leq a^2 + b^2 + 2\,\vec{a} \cdot \vec{b} \leq a^2 + b^2 + 2ab \\ \Longleftrightarrow\quad & (a-b)^2 \leq (\vec{a} + \vec{b})^2 \leq (a+b)^2 \\ \Longleftrightarrow\quad & |a-b| \leq |\vec{a} + \vec{b}| \leq a + b\,, \text{q.e.d.} \end{aligned}$$
Die zweite Zeile folgt aus der ersten, indem man das Distributivgesetz (1.22) und die Kommutativität (1.21) anwendet.

Wir haben die Glgen. (1.21), (1.22), (1.23) und (1.24) aus den Eigenschaften des Skalarprodukts für Vektoren im $\boldsymbol{E_3}$ bewiesen. In der Mathematik wird das Skalarprodukt aber in abstrakter Weise durch die Zuordnung $\vec{a} \cdot \vec{b} \to \gamma \in \mathbb{R}$ definiert, die die Eigenschaften (1.21), (1.22), (1.23) und (1.24) haben muss. Wir wollen die Schwarzsche Ungleichung (1.25) nur mit Hilfe dieser Eigenschaften beweisen, ohne die geometrische Veranschaulichung zu Hilfe zu nehmen. Zunächst ist der Beweis trivial, falls $\vec{a} = \vec{0}$ und/oder $\vec{b} = \vec{0}$ ist. Daher können wir uns auf den Fall beschränken, dass $\vec{a} \neq \vec{0}$ **und** $\vec{b} \neq \vec{0}$ ist. In diesem Fall gilt aufgrund von Gl. (1.24) $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} 0 &\leq (\vec{a} + \alpha\vec{b})^2 = (\vec{a} + \alpha\vec{b}) \cdot (\vec{a} + \alpha\vec{b}) \\ &= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot (\alpha\vec{b}) + (\alpha\vec{b}) \cdot \vec{a} + (\alpha\vec{b}) \cdot (\alpha\vec{b}) \\ &= a^2 + \alpha^2 b^2 + 2\,\alpha\,\vec{a} \cdot \vec{b}\,. \end{aligned}$$
Hierbei haben wir von der Kommutativität (1.21), der Distributivität (1.22) und der Bilinearität (1.23) Gebrauch gemacht. Da das Ergebnis für beliebige α gilt, gilt es insbesondere