Theoretische Physik I: Mathematische Methoden
Wintersemester 2019/2020
Prof. Dr. Luciano Rezzolla
Dr. Ralf-Arno Tripolt

Ausgabe des Übungsblattes: 30.1.2020
Abgabe des Übungsblattes: 6.2.2020

Übungsblatt 13

Aufgabe 1: Runge-Lenz-Vektor (7 Punkte = 3 + 2 + 2)

Ein Punktteilchen der Masse m bewege sich in einem Zentralpotential $V(r) = -\frac{\alpha}{r}$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Der Vektor

$$\vec{A} = \dot{\vec{r}} \times \vec{L} + V(r)\vec{r}$$

wird als Runge-Lenz-Vektor bezeichnet.

1.1: Zeigen Sie, dass der Runge-Lenz-Vektor für diesen Fall eine Erhaltungsgröße ist,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = 0 \ .$$

Zeigen Sie weiterhin, dass der Runge-Lenz-Vektor $\vec{A}$ und der Drehimpulsvektor $\vec{L}$ senkrecht aufeinander stehen, $\vec{A} \perp \vec{L}$.

1.2: Berechnen Sie den Betrag des Runge-Lenz-Vektors drücken Sie diesen durch die Konstante α, die Energie E und den Betrag des Drehimpulses L aus.

1.3: Verwenden Sie den Runge-Lenz-Vektor, um die Bahngleichung des Kepler-Problems

$$r(\varphi) = \frac{k}{1 + \epsilon \cos\varphi}$$

aufzustellen. Drücken Sie die Konstanten k und ϵ durch die Konstante α, die Masse m, die Energie E und den Betrag des Drehimpulses L aus. Erläutern Sie anschließend die anschauliche Bedeutung des Runge-Lenz-Vektors $\vec{A}$.

Hinweis: Für Aufgabenteil 3 ist es sinnvoll, das Skalarprodukt $\vec{A} \cdot \vec{r}$ zu betrachten.

Aufgabe 2: Stabile Kreisbahnen im allgemeinen Zentralkraftfeld (13 Punkte = 1 + 2 + 1 + 2 + 2 + 3 + 2)

Betrachten Sie die Bewegung eines Punktteilchens der Masse m in einem allgemeinen Zentralkraftfeld $V(r)$. Die auf das Punktteilchen wirkende Kraft ist dann durch

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(r)$$

gegeben.

2.1: Zeigen Sie zunächst, dass die Kraft $\vec{F}(\vec{r})$ auch in der Form

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r = F_r \vec{e}_r$$

angegeben werden kann.

2.2: Zeigen Sie, dass aus der Newtonschen Bewegungsgleichung des Punktteilchens die Erhaltung seiner Energie

$$E = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + V(r)$$

und des Gesamtdrehimpulses

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

folgt.

2.3: Drücken Sie den Betrag des Drehimpulses in Polarkoordinaten aus.

2.4: Verwenden Sie Energie- und Drehimpulserhaltung, um die Bewegungsgleichungen für die Polarkoordinaten r und φ zu bestimmen. Zeigen Sie hierbei, dass die Bewegung der Radialkoordinate r durch die eindimensionale Bewegung eines Punktteilchens in einem effektiven Potential $U(r)$ bestimmt ist. Geben Sie das effektive Potential $U(r)$ explizit an.

2.5: Finden Sie ein Kriterium, so dass für vorgegebene Energie E und vorgegebenen Betrag des Drehimpulses L eine Kreisbahn $r = R = const.$ als Lösung der Radialgleichung existiert. Geben Sie den Betrag des Drehimpulses für diesen Fall explizit an.

2.6: Das Punktteilchen besitze nun den Drehimpuls aus dem vorherigen Aufgabenteil, bewege sich aber auf einer infinitesimal gestörten Kreisbahn, $r(t) = R + \rho(t)$, mit $\rho(t)/R \ll 1$. Diskutieren Sie, ob die Kreisbahn stabil unter der infinitesimalen Störung bleibt. Setzen Sie $r(t)$ hierzu zunächst in die Bewegungsgleichung ein und entwickeln Sie diese bis zur linearen Ordnung in $\rho(t)$. Diskutieren Sie anschließend die dabei entstehende näherungsweise Bewegungsgleichung für $\rho(t)$.

2.7: Betrachten Sie nun Zentralkräfte der Form

$$F_r(r) = -\frac{\alpha}{r^n} \ ,$$

für $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Für welche Potenzen n bleiben die Kreisbahnen unter infinitesimalen Störungen stabil? Wie verhält es sich demnach bei der Planetenbewegung?