Theoretische Physik I: Mathematische Methoden
Wintersemester 2019/2020
Prof. Dr. Luciano Rezzolla
Dr. Ralf-Arno Tripolt

Ausgabe des Übungsblattes: 23.1.2020
Abgabe des Übungsblattes: 30.1.2020

Übungsblatt 12

Aufgabe 1: Gekoppelte Schwingungen von Massepunkten auf einem Kreis (6 Punkte = 2 + 2 + 2)

Gegeben sei ein System von drei Punktmassen $m_1 = m_2 = m_3 \equiv m$, die in gleichem Abstand auf einem Kreis mit konstantem Radius R ruhen. Diese Punktmassen seien durch drei Federn mit den Federkonstanten $k_1 = k_2 = k_3 \equiv k$ verbunden. Die Massen und die Federn können sich entlang des Kreises reibungsfrei bewegen, aber nicht in radialer Richtung.

1.1: Fertigen Sie eine Skizze des Systems an, erläutern Sie die wirkenden Kräfte und bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen der Massenpunkte.

1.2: Lösen Sie die Bewegungsgleichungen mit Hilfe des Ansatzes $x_i(t) = A_i e^{i\omega t}$, $i = 1, 2, 3$, und bestimmen Sie die möglichen Eigenfrequenzen.

1.3: Diskutieren Sie die möglichen Eigenschwingungen anhand der Eigenfrequenzen aus Aufgabenteil 1.2.

Aufgabe 2: Konservative Felder und Kurvenintegrale (6 Punkte = 2 + 2 + 1 + 1)

Gegeben seien die Vektorfelder

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ , \quad \vec{r} \mapsto \left(y^2 z^3 - 6xz^2\right) \vec{e}_x + 2xyz^3 \vec{e}_y + \left(3xy^2 z^2 - 6x^2 z\right) \vec{e}_z \ , \\
\vec{F}_2 &: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \ , \quad \vec{r} \mapsto x^2 yz \vec{e}_x - xyz^2 \vec{e}_z \ , \\
\vec{F}_3 &: \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^2 \ , \quad \vec{r} \mapsto \frac{-y}{x^2+y^2} \vec{e}_x + \frac{x}{x^2+y^2} \vec{e}_y \ .
\end{aligned}$$

2.1: Überprüfen Sie, ob die Vektorfelder $\vec{F}_i$, $i = 1, 2, 3$, konservativ sind.

2.2: Berechnen Sie die Kurvenintegrale über die Vektorfelder $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ entlang beider Wege $\mathscr{C}_1$ und $\mathscr{C}_2$, wobei die Wege durch

$$\mathscr{C}_1 : (1,1,2) \to (2,1,2) \to (2,2,2) \ , \quad \mathscr{C}_2 : (1,1,2) \to (1,2,2) \to (2,2,2)$$

gegeben sind und die obigen Punkte jeweils durch gerade Teilstücke verbunden sind.

2.3: Berechnen Sie das Kurvenintegral über das Vektorfeld $\vec{F}_3$ entlang eines Kreises um den Ursprung in $\mathbb{R}^2$. Was fällt Ihnen auf?

2.4: Bestimmen Sie die Potentiale für die Vektorfelder $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$, sofern diese existieren.

Aufgabe 3: Newtonsches Gravitationsfeld und Kurvenintegrale (8 Punkte = 3 + 3 + 2)

Gegeben sei das Gravitationsfeld einer Masse m

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^3 \ , \quad \vec{r} \mapsto -\frac{Gm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \ .$$

3.1: Berechnen Sie das Kurvenintegral über das Vektorfeld $\vec{F}$ entlang des Weges $\mathscr{C}_1$, wobei der Weg durch

$$\mathscr{C}_1 : (a,0,a) \to (3a,0,a) \to (3a,2a,a) \to (3a,2a,2a) \ , \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ ,$$

gegeben ist und die Punkte jeweils durch gerade Teilstücke verbunden sind.

3.2: Berechnen Sie das Kurvenintegral über das Vektorfeld $\vec{F}$ entlang des Weges $\mathscr{C}_2$, wobei der Weg durch

$$\mathscr{C}_2 : (a,0,a) \to (a,0,2a) \to (a,2a,2a) \to (3a,2a,2a) \ , \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ ,$$

gegeben ist und die Punkte jeweils durch gerade Teilstücke verbunden sind.

3.3: Finden Sie ein skalares Feld $\varphi(\vec{r})$, so dass

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r}) \ .$$