Theoretische Physik I: Mathematische Methoden
Wintersemester 2019/2020
Prof. Dr. Luciano Rezzolla
Dr. Ralf-Arno Tripolt

Ausgabe des Übungsblattes: 16.1.2020
Abgabe des Übungsblattes: 23.1.2020

Übungsblatt 11

Aufgabe 1: Kette (4 Punkte)

Gegeben sei eine Kette mit Gesamtlänge L. Ein Stück der Länge l dieser Kette habe die Masse $M(l) = \lambda l$, wobei $\lambda \in \mathbb{R}^+$ ein konstanter Parameter ist. Zum Zeitpunkt $t = 0$ hänge ein Teil der Kette mit Länge l_0 vom Tisch. Der übrige Teil der Kette liege auf dem Tisch. Für $t > 0$ beginnt die Kette unter dem Einfluss der Schwerkraft vom Tisch zu rutschen. Beschreiben Sie die Bewegung der Kette als Funktion der Zeit. Vernachlässigen Sie hierbei die Reibung auf dem Tisch sowie die Luftreibung. Worin unterscheidet sich dieses System von einem Pendel und worin ähnelt es ihm?

Aufgabe 2: Mathematisches Pendel mit Reibung (8 Punkte = 2 + 2 + 4)

Die Bewegung eines Pendels der Masse m und der Fadenlänge l wird unter Annahme kleiner Auslenkwinkel ϕ und unter Vernachlässigung der Reibung durch die folgende gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung beschrieben

$$ml\ddot{\phi} = -mg\phi \ .$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$\phi(t) = A_0 \cos(\omega t + \delta) \ , \quad \omega = \sqrt{g/l} \ .$$

Ergänzen Sie nun die obige Bewegungsgleichung um eine Stokessche Reibungskraft der Form

$$F_R = -\alpha l\dot{\phi} \ ,$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R}^+$ gilt.

2.1: Bestimmen Sie die Lösung der Bewegungsgleichung unter Einbezug der Stokesschen Reibungskraft F_R.

2.2: Bei einer hinreichend schwachen Reibung $\alpha < \alpha_C$, wobei α_C der kritische Wert des Reibungsparameters α ist, bleibt das System schwingungsfähig. Wie lautet α_C?

2.3: Zeigen Sie, dass für den Fall hinreichend schwacher Reibung (siehe 2.2) die Lösung der Bewegungsgleichung von der oben angegebenen Form ist, wobei man aber eine veränderte Schwingungsfrequenz $\tilde{\omega}$ und eine zeitlich exponentiell abklingende Schwingungsamplitude $A(t)$ hat. Geben Sie die Schwingungsfrequenz $\tilde{\omega}$ als Funktion von l, g und α an und bestimmen Sie die Funktion $A(t)$.

Aufgabe 3: Gekoppelte Schwingung (8 Punkte = 4 + 4)

Berechnen Sie die Bewegung der beiden Massen $m_1 = m_2 = m$, die durch zwei Federn mit den Federkonstanten $k_1 = k_2 = k$ gekoppelt sind, vgl. Abbildung 1.

3.1: Stellen Sie hierzu die Bewegungsgleichungen auf und lösen Sie diese mit Hilfe des Ansatzes

$$x_1 = A\cos(\omega t) \ , \quad x_2 = B\cos(\omega t) \ .$$

3.2: Bestimmen Sie die möglichen Eigenfrequenzen und diskutieren Sie die Bedeutung der möglichen Lösungen anhand der Vorzeichen der Konstanten A und B.

Hinweis: Als Eigenfrequenz eines schwingungsfähigen Systems bezeichnet man eine Frequenz, mit der das System nach einmaliger Anregung schwingen kann.

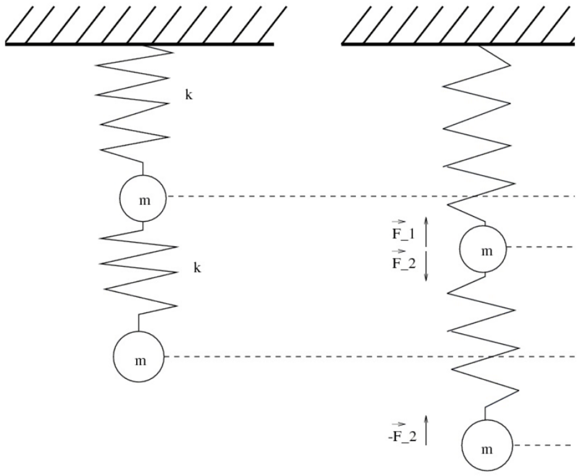

Abbildung 1: Gekoppelte Schwingung.