Ausgabe des Übungsblattes: 19.12.2019
Abgabe des Übungsblattes: 16.1.2020

Übungsblatt 10

Aufgabe 1: Punktteilchen auf Schraubenlinie (6 Punkte = 1 + 1 + 2 + 2)

Ein Punktteilchen der Masse m gleite unter dem Einfluß der Schwerkraft reibungsfrei entlang der Kurve

$$\vec{r}(t) = \big(R\cos[\phi(t)], R\sin[\phi(t)], b\phi(t)\big)^T ,$$

wobei R und b positive reelle Konstanten sind, $R, b \in \mathbb{R}^+$. Die Position des Punktteilchens auf der Schraubenlinie wird durch den Winkel $\phi(t)$ eindeutig festgelegt.

1.1: Welche Komponente der Schwerkraft wirkt beschleunigend auf das Punktteilchen?

1.2: Berechnen Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung auf der Kurve $\vec{r}(t)$.

1.3: Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für den Winkel $\phi(t)$.

Hinweis: Verwenden Sie die Resultate aus den Aufgabenteilen 1.1 und 1.2.

1.4: Bestimmen Sie die Lösung der Bewegungsgleichung für den Winkel $\phi(t)$ für die Anfangsbedingungen $\phi(t = 0) = \phi_0$ und $\dot{\phi}(t = 0) = \dot{\phi}_0$.

Aufgabe 2: Zykloidenbahnen (7 Punkte = 3 + 1 + 2 + 1)

Ein dünnwandiger Hohlzylinder mit Radius R rolle mit konstanter Geschwindigkeit in x-Richtung. Die Geschwindigkeit seines Schwerpunktes S sei durch $\vec{v}_S = (v, 0, 0)^T$, $v = const.$, gegeben. Betrachten Sie den Punkt P, der den Endpunkt einer relativ zum Zylinder festen Strecke der Länge a darstellt, die P mit dem Schwerpunkt S des Zylinders verbindet, vgl. Abbildung 1. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich der Punkt Q im Koordinatenursprung.

2.1: Bestimmen Sie die Trajektorie $\vec{r}(t)$ des Punktes P.

2.2: Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}(t)$ des Punktes P.

2.3: Zu welchen Zeiten ist der Betrag der Geschwindigkeit $\left|\dot{\vec{r}}(t)\right|$ maximal bzw. minimal?

2.4: Berechnen Sie die Beschleunigung $\ddot{\vec{r}}(t)$ des Punktes P.

Zeichnen Sie für jeden Aufgabenteil die jeweiligen Parameterkurven für die Fälle $a < R$, $a = R$ und $a > R$ und diskutieren Sie deren qualitativen Verlauf.

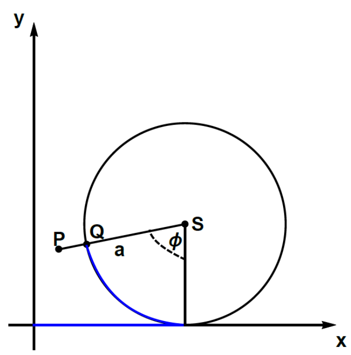

Abbildung 1: Rollender Hohlzylinder.

Aufgabe 3: Freier Fall (7 Punkte)

Auf einem ebenen Platz in Mitteleuropa (geographische Breite $\phi_0 = 50°$) befindet sich ein Turm der Höhe $h = 200$ m. Der Platz stelle die (x', y')-Ebene, der Turm zeige in Richtung der z'-Achse. Berechnen Sie in diesem Koordinatensystem, wie weit ein von Turm fallender Körper neben dem Turm aufschlägt. Verifizieren Sie das Ergebnis, indem Sie den freien Fall in einem Inertialsystem behandeln.

Anleitung: Zeigen Sie, dass die Relativbeschleunigung der beiden Koordinatensysteme $\ddot{\vec{r}}_0$ von der Ordnung ω^2 (ω bezeichnet die Erdrotationsfrequenz.) ist und vernachlässigen Sie alle Terme der Ordnung ω^2. Warum macht diese Näherung Sinn? Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für die x'-, y'- und z'-Komponente und entkoppeln Sie das Gleichungssystem, indem Sie Terme $\sim \omega$ gegen Terme $\sim g$ vernachlässigen.