

Übungsblatt 9

Aufgabe 1: Rotation eines Zentralfeldes (2 Punkte)

Gegeben sei ein Vektorfeld $\vec{u}(\vec{r}) = \vec{r}f(r)$ mit einer nur vom Abstand $r = |\vec{r}|$ abhängigen differenzierbaren Funktion $f(r)$ (d.h. einem Zentralfeld). Berechnen Sie die Rotation

$$\text{rot}(\vec{u}) := \vec{\nabla} \times \vec{u}$$

dieses Feldes.

Aufgabe 2: Punktteilchen auf schiefer Ebene (3 Punkte)

Ein Punktteilchen der Masse m rutscht unter dem Einfluß der Schwerkraft reibungsfrei entlang der schiefen Ebene AB , die unter dem Winkel α zur Horizontalen geneigt ist, vgl. Abbildung 1. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit, die Beschleunigung und den zurückgelegten Weg s als Funktion der Zeit.

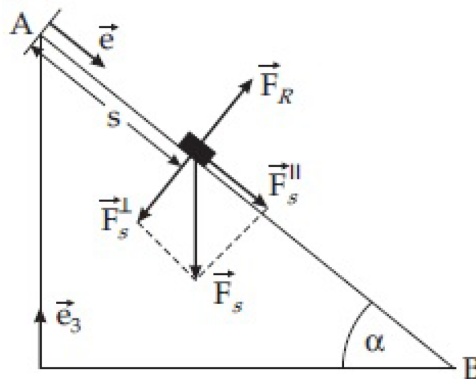


Abbildung 1: Punktteilchen auf schiefer Ebene AB .

Aufgabe 3: Punktteilchen auf Ellipse (5 Punkte = 1 + 2 + 1 + 1)

Ein Punktteilchen der Masse m bewege sich mit einer Kreisfrequenz $\omega > 0$ auf einer Ellipse mit Halbachsen a und b in der (x, y) -Ebene, vgl. Abbildung 2.

3.1: Verwenden Sie Abbildung 2, um die Trajektorie $\vec{r}(t)$ des Punktteilchens anzugeben.

Hinweis: Verwenden Sie ebene Polarkoordinaten und reskalieren Sie die x - und y -Koordinatenachsen gemäß den Halbachsen der Ellipse.

3.2: Bestimmen Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Punktteilchens.

3.3: Berechnen Sie die Kraft \vec{F} , die auf das Punktteilchen wirkt, und zeigen Sie, dass diese immer zum Ursprung des Koordinatensystems zeigt.

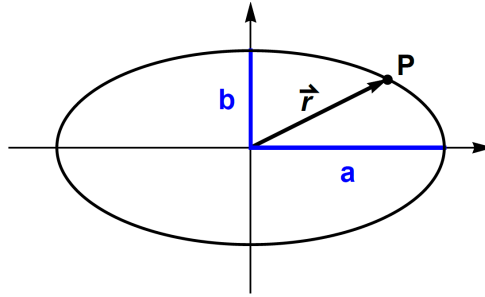


Abbildung 2: Punktteilchen auf Ellipsenbahn.

3.4: Berechnen Sie $\vec{\nabla} \times \vec{F}$.

Aufgabe 4: Punktteilchen im elektrischen Feld (10 Punkte = 4 + 2 + 4)

Betrachten Sie ein ruhendes Punktteilchen der Masse m am Ort $x(t = 0) = 0$ und positiver Ladung q in einem äußeren elektrischen Feld \vec{E} . Auf dieses Punktteilchen wirkt dann eine Kraft der Form $\vec{F} = q\vec{E}$. Das elektrische Feld \vec{E} habe die Form $\vec{E}(\vec{r}) = (E_x(x), 0, 0)^T$, wobei

$$E_x(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 0 \text{ und } x > 2x_1 \\ E_1 > 0, & \text{für } 0 \leq x \leq x_1 \\ E_2, & \text{für } x_1 < x \leq 2x_1 \end{cases} .$$

- 4.1: Zeigen Sie, dass das Punktteilchen den Raumpunkt $x = 2x_1$ für den Fall $E_2 > -E_1$ erreichen kann. Wie lautet die Trajektorie des Punktteilchens im Raumbereich $x > 2x_1$? Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Punktteilchens in diesem Raumbereich.
- 4.2: Kann das Punktteilchen den Raumpunkt $x = 2x_1$ für den Fall $E_2 = -E_1$ erreichen? Wie lautet die Trajektorie des Punktteilchens im Raumbereich $x > 2x_1$ für diese Einstellung des Feldes E_2 ?
- 4.3: Diskutieren Sie nun den Fall $E_2 < -E_1$: Zeigen Sie, dass das Punktteilchen den Raumpunkt $2x_1$ nicht erreichen kann. Bestimmen Sie die Zeitpunkte, für die das Punktteilchen die Raumpunkte $x = x_1$ und $x = 0$ wieder erreicht. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit im Raumpunkt $x = 0$. Was passiert dann?