Theoretische Physik I: Mathematische Methoden
Wintersemester 2019/2020
Prof. Dr. Luciano Rezzolla — Ausgabe des Übungsblattes: 5.12.2019
Dr. Ralf-Arno Tripolt — Abgabe des Übungsblattes: 12.12.2019

Übungsblatt 8

Aufgabe 1: Elliptische Zylinderkoordinaten (11 Punkte = 1 + 2 + 1 + 1 + 1 + 3 + 2)

Betrachten Sie eine Koordinatentransformation $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (\chi, \phi, z)$ der folgenden Form

$$\begin{aligned} x_1 &= a \cosh\chi \cos\phi \ , \\ x_2 &= a \sinh\chi \sin\phi \ , \\ x_3 &= z \ , \end{aligned}$$

wobei $\chi > 0$, $\phi \in [0, 2\pi)$ und $z \in \mathbb{R}$. Zusätzlich sei der Parameter a eine positive reelle Zahl, $a \in \mathbb{R}^+$.

1.1: Zeigen Sie, dass die Kurven für $\chi = \mathit{const.}$ Ellipsen in der (x_1, x_2)-Ebene entsprechen. Zeigen Sie zusätzlich, dass die Kurven für $\phi = \mathit{const.}$ Hyperbeln in der (x_1, x_2)-Ebene entsprechen.

1.2: Berechnen Sie die Skalenfaktoren b_χ, b_ϕ, b_z und die Einheitsvektoren $\vec{e}_\chi$, $\vec{e}_\phi$, $\vec{e}_z$ für die obige Koordinatentransformation. Überprüfen Sie die Einheitsvektoren auf Orthonormalität.

1.3: Berechnen Sie das infinitesimale Wegelement $\mathrm{d}\vec{r}$ in elliptischen Zylinderkoordinaten.

1.4: Berechnen Sie das infinitesimale Volumenelement $\mathrm{d}V$ in elliptischen Zylinderkoordinaten.

1.5: Berechnen Sie den Nabla-Operator in elliptischen Zylinderkoordinaten.

1.6: Berechnen Sie die Divergenz und die Rotation in elliptischen Zylinderkoordinaten.

1.7: Berechnen Sie den Laplace-Operator in elliptischen Zylinderkoordinaten.

Aufgabe 2: Krummlinige Koordinaten (4 Punkte = 2 + 2)

Gegeben seien die folgenden bzgl. einer kartesischen Basis definierten Vektorfelder

$$\vec{A}(x, y, z) = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 3\vec{e}_z \ , \qquad \vec{B}(x, y, z) = xy\vec{e}_x + yz\vec{e}_y + zx\vec{e}_z \ .$$

2.1: Drücken Sie die obigen Vektorfelder in Zylinderkoordinaten aus.

2.2: Drücken Sie die obigen Vektorfelder in Kugelkoordinaten aus.

Hinweis: Die Vektorfelder sind in der Form $\vec{V}(x, y, z) = v_x(x, y, z)\vec{e}_x + v_y(x, y, z)\vec{e}_y + v_z(x, y, z)\vec{e}_z$ gegeben. Ziel dieser Aufgabe ist es, diese in die Form $\vec{V}(\rho, \varphi, z) = v_\rho(\rho, \varphi, z)\vec{e}_\rho + v_\varphi(\rho, \varphi, z)\vec{e}_\phi + v_z(\rho, \varphi, z)\vec{e}_z$ bzw. $\vec{V}(r, \vartheta, \varphi) = v_r(r, \vartheta, \varphi)\vec{e}_r + v_\vartheta(r, \vartheta, \varphi)\vec{e}_\vartheta + v_\phi(r, \vartheta, \varphi)\vec{e}_\varphi$ zu bringen.

Aufgabe 3: Sphärisch-symmetrische Felder (5 Punkte = 3 + 2)

Berechnen Sie die Ausdrücke

$$\vec{\nabla}\varphi(r) \ , \quad \vec{\nabla} \cdot [\varphi(r)\vec{e}_r] \ , \quad \Delta\varphi(r) \ , \quad \vec{\nabla} \times [\varphi(r)\vec{e}_r] \ ,$$

für

3.1: ein beliebiges sphärisch-symmetrisches skalares Feld $\varphi(r)$,

3.2: den Spezialfall $\varphi(r) = r^n$, $n \in \mathbb{N}$.