Theoretische Physik I: Mathematische Methoden
Wintersemester 2019/2020
Prof. Dr. Luciano Rezzolla — Ausgabe des Übungsblattes: 28.11.2019
Dr. Ralf-Arno Tripolt — Abgabe des Übungsblattes: 5.12.2019

Übungsblatt 7

Aufgabe 1: Inverse von Matrizen (3 Punkte)

Es seien die folgenden drei reellen Matrizen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} x & 2x+2 & 3x+5 \\ 0 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} a & d & xa+yd \\ b & e & xb+ye \\ c & f & xc+yf \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 2+\alpha & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die zugehörigen Inversen, falls sie existieren.

Aufgabe 2: Lineare Gleichungssysteme (5 Punkte = 2 + 3)

2.1: Es sei das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 &= 2 \end{aligned}$$

gegeben. Lösen Sie es mit Hilfe der Cramerschen Regel.

2.2: Überprüfen Sie, ob das homogene Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (1+\alpha)x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 8x_1 + (10+\alpha)x_2 + 12x_3 &= 0 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 &= 0 \end{aligned}$$

nicht-triviale Lösungen besitzt. Falls ja, geben Sie sie in der Form $\{x_1(x_3), x_2(x_3), x_3\}$ an.

Aufgabe 3: Orthogonale Transformationen und die Uhr (6 Punkte = 3 + 3)

Betrachten Sie eine Uhr, deren Zeiger exakt 3 Uhr anzeigen.

3.1: Wieviel Zeit muss vergehen, bis die Zeiger erneut orthogonal zueinander stehen?

3.2: Wieviel Zeit muss vergehen, bis die Zeiger zum ersten Mal parallel zueinander stehen?

Aufgabe 4: Milne-Koordinaten (6 Punkte = 3 + 3)

Durch die Abbildungen

$$\tau(t,z) = \sqrt{t^2 - z^2}\,, \qquad \eta(t,z) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{t+z}{t-z}\right)$$

sei eine Koordinatentransformation $(t,z) \mapsto (\tau,\eta)$ für den Bereich $t > |z| > 0$ gegeben.

4.1: Diskutieren Sie qualitativ den Verlauf der τ- und η-Koordinatenlinien in der (t,z)-Ebene. Fertigen Sie dazu eine Skizze dieser Koordinatenlinien an.

4.2: Zeigen Sie, dass die Transformationen für den Bereich $t > |z| > 0$ lokal umkehrbar sind.