Prof. Dr. Luciano Rezzolla
Dr. Ralf-Arno Tripolt

Ausgabe des Übungsblattes: 21.11.2019
Abgabe des Übungsblattes: 28.11.2019

Übungsblatt 6

Aufgabe 1: Symmetrien des gleichseitigen Dreiecks (7 Punkte = 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1)

Für ein gleichseitiges Dreieck existieren sechs Möglichkeiten, das Dreieck durch Spiegelung oder Drehung in sich selbst zu überführen. Diese Operationen bezeichnet man als die Symmetrietransformationen des gleichseitigen Dreiecks.

1.1: Erklären Sie anschaulich, um welche sechs Symmetrietransformationen es sich im Falle des gleichseitigen Dreiecks handelt.

Die Symmetrietransformationen des gleichseitigen Dreiecks lassen sich durch die folgenden (3×3)-Matrizen darstellen

$$D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \qquad D(r_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad D(r_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$D(p_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad D(p_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \qquad D(p_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

1.2: Ordnen Sie die obigen Matrizen den jeweiligen Symmetrietransformationen aus Aufgabenteil 1.1 zu.

Anleitung: Ordnen Sie den Ecken des Dreiecks die Bezeichnungen a, b und c zu. Lassen Sie nun die obigen Matrizen auf den Vektor $\vec{D} = (a, b, c)^T$ wirken und interpretieren Sie die Resultate bzgl. der Ecken des gleichseitigen Dreiecks.

1.3: Berechnen Sie alle möglichen Produkte der Matrizen $\{D(e), D(r_1), D(r_2)\}$.

1.4: Berechnen Sie die Inversen der Matrizen $D(r_1)$ und $D(p_1)$.

1.5: Überprüfen Sie das Produkt der Matrizen $D(r_1)$ und $D(p_1)$ auf Kommutativität.

1.6: Berechnen Sie alle möglichen Produkte der Matrizen $\{D(e), D(p_1)\}$.

Aufgabe 2: Drehungen in zwei und drei Dimensionen (13 Punkte = 4 + 4 + 5)

Wie bereits in der Vorlesung gesehen, bilden die sogenannten eigentlichen Drehungen in n Dimensionen die Gruppe der speziellen orthogonalen $(n \times n)$-Matrizen $SO(n)$. Im Folgenden sollen Sie die Eigenschaften dieser Drehungen für die Fälle $n = 2$ und $n = 3$ genauer untersuchen.

2.1: Gruppeneigenschaften von $SO(n)$ (4 Punkte = 1 + 1 + 1 + 1):

(a) Zeigen Sie zunächst, dass für $(n \times n)$-Matrizen im Allgemeinen $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ und $(AB)^T = B^T A^T$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass, falls O_1 und O_2 orthogonale $(n \times n)$-Matrizen sind, auch $O_1 O_2$ eine orthogonale $(n \times n)$-Matrix ist. Zeigen Sie darüber hinaus, dass, falls $\det(O_1) = \det(O_2) = 1$ gilt, auch $\det(O_1 O_2) = 1$ gilt.

Anleitung: Verwenden Sie die Resultate aus (a), sowie die Rechenregeln für Determinanten.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{1}_n$ eine orthogonale Matrix ist und dass $\det(\mathbb{1}_n) = 1$ ist, wobei $\mathbb{1}_n$ die n-dimensionale Einheitsmatrix bezeichnet.

(d) Zeigen Sie, dass, falls O_1 eine orthogonale $(n \times n)$-Matrix ist, auch $(O_1)^{-1}$ eine orthogonale $(n \times n)$-Matrix ist. Zeigen Sie darüber hinaus, dass, falls $\det(O_1) = 1$ gilt, auch $\det[(O_1)^{-1}] = 1$ gilt.

Anleitung: Verwenden Sie die Resultate aus (a), sowie die Rechenregeln für Determinanten.

2.2: Drehungen um eine feste Achse (4 Punkte = 1 + 2 + 1):

(a) In der Vorlesung haben Sie gesehen, wie man die Drehmatrix $D(\phi)$ für eine Drehung um den Winkel ϕ um die z-Achse herleitet. Zeigen Sie, dass $D(\phi)D(\psi) = D(\phi+\psi)$, $D(0) = \mathbb{1}_3$, $[D(\phi)]^{-1} = D(-\phi)$ und $D(\phi)D(\psi) = D(\psi)D(\phi)$ gilt.

(b) Leiten Sie Drehmatrizen für Drehungen um die x- und die y-Achse her.

Anleitung: Wiederholen Sie die Schritte, die im Skript vorgeführt wurden, um die Drehung $D(\phi)$ um die z-Achse herzuleiten.

(c) Zeigen Sie, dass Drehungen um verschiedene Achsen im Allgemeinen nicht kommutieren.

2.3: Die 2-Sphäre (5 Punkte = 1 + 1 + 2 + 1):

Die Oberfläche einer 3-dimensionalen Einheitskugel bezeichnet man als 2-Sphäre, S^2, und definiert sie als Menge aller dreidimensionalen Vektoren vom Betrag 1,

$$S^2 = \left\{ \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \middle| \, |\vec{r}|^2 = 1 \right\} .$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{1}_3 \vec{r} = \vec{r}$ und $(O_1 O_2)\vec{r} = O_1(O_2 \vec{r})$ gilt, wobei $O_1, O_2 \in SO(3)$.

(b) Zeigen Sie, dass eigentliche Drehungen die Länge von Vektoren nicht ändern.

Anleitung: Zeigen Sie hierzu, dass sich das Betragsquadrat eines Vektors $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$ nicht ändert, wenn der Vektor durch eine Matrix $O \in SO(3)$ gedreht wird.

(c) Zeigen Sie, dass man ausgehend von einem beliebigen Punkt auf S^2 jeden anderen Punkt auf S^2 durch eine eigentliche Drehung erreichen kann, d.h.

$$\vec{r} = O\vec{r}_0 \ ,$$

wobei $\vec{r}, \vec{r}_0 \in S^2$, $O \in SO(3)$.

Anleitung: Wählen Sie $\vec{r}_0 = (1, 0, 0)^T$. Wählen Sie zwei orthonormale Vektoren $\tilde{\vec{e}}_1$ und $\tilde{\vec{e}}_2$ so, dass $\left\{ \vec{r}, \tilde{\vec{e}}_1, \tilde{\vec{e}}_2 \right\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bildet. Verwenden Sie nun die im Skript beschriebenen Eigenschaften orthogonaler Matrizen, um eine orthogonale Matrix O gerade so zu konstruieren, dass der Vektor $\vec{r}_0$ in den Vektor $\vec{r} = (x, y, z)^T$ überführt wird. Zeigen Sie abschließend, dass für diese Matrix $\det(O) = 1$ gilt.

(d) Betrachten Sie die folgende spezielle orthogonale Matrix $H \in SO(3)$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{h}} \\ 0 & & \end{pmatrix} ,$$

wobei $h \in SO(2)$ eine spezielle orthogonale (2×2)-Matrix ist. Zeigen Sie, dass diese Matrix den Vektor $\vec{r}_0 = (1, 0, 0)^T$ unberührt lässt, d.h., dass $H\vec{r}_0 = \vec{r}_0$ gilt. Zeigen Sie weiters, dass die Matrix OHO^{-1} jeden beliebigen Vektor $\vec{r} \in S^2$ unberührt lässt, wobei $O \in SO(3)$ ist.