
Übungsblatt 5

Aufgabe 1: Partielle Ableitungen, Gradient, Divergenz und Rotation (5 Punkte = 1 + 1 + 1 + 2)

Betrachten Sie das skalare Feld

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \supset \mathcal{M}_3 \rightarrow \mathcal{N}_1 \subset \mathbb{R}, \quad \vec{r} \mapsto \varphi(\vec{r}) = xy + yz + zx,$$

und das Vektorfeld

$$\vec{a} : \mathbb{R}^3 \supset \mathcal{M}_3 \rightarrow \mathcal{N}_3 \subset \mathbb{R}^3, \quad \vec{r} \mapsto \vec{a}(\vec{r}) = x^2 y \vec{e}_1 + y^2 z \vec{e}_2 + z^2 x \vec{e}_3.$$

- 1.1: Berechnen Sie $\partial_x \varphi, \partial_y \varphi, \partial_z \varphi, \partial_x^2 \varphi, \partial_y^2 \varphi, \partial_z^2 \varphi, \partial_x \partial_y \varphi, \partial_x \partial_z \varphi, \partial_y \partial_z \varphi, \partial_y \partial_x \varphi, \partial_z \partial_x \varphi$ und $\partial_z \partial_y \varphi$.
- 1.2: Berechnen Sie $\vec{\nabla} \phi$ und $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \varphi)$.
- 1.3: Berechnen Sie $\vec{\nabla} \times \vec{a}$ und $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a})$.
- 1.4: Berechnen Sie $\vec{\nabla} \times (\varphi \vec{a})$.

Aufgabe 2: Hydrodynamik (6 Punkte = 2 + 4)

- 2.1: Beschreibe $\vec{v} : \mathbb{R}^4 \supset \mathcal{M}_4 \rightarrow \mathcal{N}_3 \subset \mathbb{R}^3, (t, \vec{r}) \mapsto \vec{v}(t, \vec{r})$ die Strömungsgeschwindigkeit und $\rho : \mathbb{R}^4 \supset \mathcal{M}_4 \rightarrow \mathcal{N}_1 \subset \mathbb{R}, (t, \vec{r}) \mapsto \rho(t, \vec{r})$ das Dichtefeld einer kompressiblen Flüssigkeit. Dann gilt die sogenannte Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0.$$

Zeigen Sie, dass, wenn das Dichtefeld nicht explizit von t abhängt, folgende Gleichung gilt

$$v \frac{\partial \rho}{\partial v} = -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v},$$

wobei die sogenannte Richtungsableitung eines skalaren Feldes ϕ in Richtung des Einheitsvektors \hat{n} gemäß

$$\frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}} = \hat{n} \cdot \vec{\nabla} \phi$$

definiert ist.

- 2.2: Die Strömungsgeschwindigkeit einer zweidimensionalen Flüssigkeit sei durch

$$\vec{v}(x, y) = v_1(x, y) \vec{e}_1 - v_2(x, y) \vec{e}_2$$

gegeben. Zeigen Sie, dass, wenn die Flüssigkeit inkompressibel ($\rho = \text{const.}$) und die Strömung wirbelfrei ist, die sogenannten Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen gelten, d.h.

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial v_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial y} = -\frac{\partial v_2}{\partial x}.$$

Aufgabe 3: Klassische Elektrodynamik (9 Punkte = 2 + 2 + 3 + 2)

Betrachten Sie die Vektorfelder $\vec{E}, \vec{B} : \mathbb{R}^4 \supset \mathcal{M}_4 \rightarrow \mathcal{N}_3 \subset \mathbb{R}^3$, $(t, \vec{r}) \mapsto \vec{E}(t, \vec{r}), \vec{B}(t, \vec{r})$. Hierbei wird \vec{E} als elektrisches Feld und \vec{B} als magnetisches Induktionsfeld bezeichnet. Im Vakuum erfüllen diese Vektorfelder die sogenannten Maxwell-Gleichungen

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \vec{E}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}.$$

Die Größen ϵ_0 und μ_0 bezeichnet man als elektrische und magnetische Feldkonstanten.

3.1: Erklären Sie die Bedeutung der Maxwell-Gleichungen.

3.2: Zeigen Sie, dass das elektrische Feld \vec{E} und das magnetische Induktionsfeld \vec{B} im Vakuum der sogenannten homogenen Wellengleichung genügen, d.h. es gilt

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} - \Delta \vec{E} = 0, \quad \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} - \Delta \vec{B} = 0,$$

wobei $\epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$ gilt und c der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum entspricht.

Hinweis: Verwenden Sie Relation 3.2 von Übungsblatt 4.

3.3: Das sogenannte Vektorpotential \vec{A} eines magnetischen Dipolmoments \vec{m} sei gegeben durch

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}.$$

Zeigen Sie, dass das zum Vektorpotential \vec{A} zugehörige magnetische Induktionsfeld \vec{B} durch

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right)$$

gegeben ist, wobei das magnetische Dipolmoment als räumlich konstant angenommen wurde.

Hinweis: Aus einem gegebenen Vektorpotential \vec{A} lässt sich das zugehörige magnetische Induktionsfeld \vec{B} gemäß $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ berechnen.

3.4: Sei $\chi : \mathbb{R}^4 \supset \mathcal{M}_4 \rightarrow \mathcal{N}_1 \subset \mathbb{R}$, $(t, \vec{r}) \mapsto \chi(t, \vec{r})$ ein hinreichend oft stetig differenzierbares skalares Feld. Erklären Sie, warum das Vektorpotential

$$\vec{A}'(t, \vec{r}) = \vec{A}(t, \vec{r}) + \vec{\nabla} \chi(t, \vec{r})$$

zum gleichen magnetischen Induktionsfeld \vec{B} führt wie $\vec{A}(t, \vec{r})$.

Hinweis: Verwenden Sie den Zusammenhang zwischen dem Vektorpotential und dem magnetischen Induktionsfeld.