Prof. Dr. Luciano Rezzolla
Dr. Ralf-Arno Tripolt
Ausgabe des Übungsblattes: 7.11.2019
Abgabe des Übungsblattes: 14.11.2019

Übungsblatt 4

Aufgabe 1: Bahnkurve eines Teilchens (6 Punkte = 1 + 1 + 2 + 2)

Betrachten Sie die Raumkurve $\vec{r}$, welche durch die folgende Abbildungsvorschrift definiert ist:

$$\vec{r} : \mathbb{R} \supset [t_a = 0, t_e] \to \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^3 \ , \qquad t \mapsto \vec{r}(t) = (r_0 \cosh(kt), r_0 \sinh(kt), r_0 kt) \ ,$$

wobei r_0, k positive reelle Konstanten sind.

1.1: Diskutieren Sie den Verlauf der Raumkurve.

1.2: Berechnen Sie die Bogenlänge $s(t)$ unter der Bedingung, dass $s(t = 0) = 0$ gelte.

1.3: Berechnen Sie das begleitende Dreibein $(\hat{t}, \hat{n}, \hat{b})$ als Funktion der Zeit.

1.4: Berechnen Sie den Krümmungs- und den Torsionsradius als Funktion der Zeit.

Aufgabe 2: Begleitendes Dreibein (7 Punkte = 2 + 1 + 3 + 1)

Betrachten Sie die Raumkurve $\vec{r}$, welche durch die folgende Abbildungsvorschrift definiert ist:

$$\vec{r} : \mathbb{R} \supset [t_a = 0, t_e] \to \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^3 \ , \qquad t \mapsto \vec{r}(t) = \left(4t + 5, \frac{\sqrt{8}}{3} t^3, \frac{t^5}{5} - 1\right) \ .$$

2.1: Berechnen Sie Geschwindigkeit der Raumkurve $\vec{v}(t)$, deren Betrag $|\vec{v}(t)|$, sowie die Beschleunigung der Raumkurve $\vec{a}(t)$ und deren Betrag $|\vec{a}(t)|$.

2.2: Berechnen Sie die Bogenlänge $s(t)$.

2.3: Berechnen Sie das begleitende Dreibein $(\hat{t}, \hat{n}, \hat{b})$ als Funktion der Zeit.

2.4: Berechnen Sie die Torsion als Funktion der Zeit.

Aufgabe 3: $\vec{\nabla}$-Gymnastik (7 Punkte = 1 + 1 + 2 + 1 + 2)

Seien $\vec{a}, \vec{b} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{r} \mapsto \vec{a}(\vec{r}), \vec{b}(\vec{r})$ hinreichend oft differenzierbare Vektorfelder und sei $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\vec{r} \mapsto \phi(\vec{r})$ ein differenzierbares skalares Feld. Beweisen Sie die folgenden Relationen

3.1: $\vec{\nabla} \times (\phi\vec{a}) = \phi\vec{\nabla} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{\nabla}\phi$,

3.2: $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \Delta\vec{a}$,

3.3: $\vec{\nabla}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} + (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b} + \vec{b} \times (\vec{\nabla} \times \vec{a}) + \vec{a} \times (\vec{\nabla} \times \vec{b})$,

3.4: $\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{b})$,

3.5: $\vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \vec{\nabla})\vec{a} - \vec{b}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - (\vec{a} \cdot \vec{\nabla})\vec{b} + \vec{a}(\vec{\nabla} \cdot \vec{b})$.

Hinweis: Entwickeln Sie sowohl den Nabla-Operator als auch die Vektorfelder in eine Orthonormalbasis und berechnen Sie die Ausdrücke in Komponentendarstellung.