Theoretische Physik I: Mathematische Methoden
Wintersemester 2019/2020
Prof. Dr. Luciano Rezzolla — Ausgabe des Übungsblattes: 31.10.2019
Dr. Ralf-Arno Tripolt — Abgabe des Übungsblattes: 7.11.2019

Übungsblatt 3

Aufgabe 1: Komponentendarstellung und “höhere” Vektorprodukte (6 Punkte = 1+2+3)

Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \; , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \; , \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \; , \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

aus $\mathbb{R}^3$.

1.1: Definieren Sie den sogenannten Levi-Civitä-Tensor durch das Spatprodukt der kartesischen Einheitsvektoren $\vec{e}_i, i = 1, 2, 3$. Argumentieren Sie, ausgehend von dieser Definition, dass der Levi-Civitä-Tensor vollständig antisymmetrisch ist.

1.2: Beweisen Sie die sogenannte Jacobi-Identität

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) + \vec{b} \times \left(\vec{c} \times \vec{a}\right) + \vec{c} \times \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = 0 \; .$$

1.3: Beweisen Sie die folgenden Kontraktionsidentitäten für den Levi-Civitä-Tensor

(a) $\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \quad ,$

(b) $\sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{mjk} = 2\delta_{im} \quad ,$

(c) $\sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6 \quad .$

Aufgabe 2: Schraubenlinie (8 Punkte = 1 + 2 + 1 + 2 + 2)

Betrachten Sie die Raumkurve $\vec{r}$, welche durch die folgende Abbildungsvorschrift definiert ist:

$$\vec{r} : \mathbb{R} \supset [t_a = 0, t_e] \to \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^3 \; , \qquad t \mapsto \vec{r}(t) = (R\cos(\omega t), R\sin(\omega t), b\omega t) \; ,$$

wobei R, ω positive reelle Konstanten sind und $b \in \mathbb{R}$ gelte.

2.1: Erklären Sie die Bedeutung der Konstanten R, ω mit Hilfe von Abbildung 1. Erklären Sie die geometrische Bedeutung des Vorzeichens der Konstanten b. Welches Vorzeichen hat b in Abbildung 1? Geben Sie die Steighöhe der Raumkurve $\vec{r}$ an.

2.2: Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Raumkurve $\vec{v}(t)$, deren Betrag $|\vec{v}(t)|$, sowie die Beschleunigung der Raumkurve $\vec{a}(t)$ und deren Betrag $|\vec{a}(t)|$.

2.3: Berechnen Sie die Bogenlänge $s(t)$ und geben Sie die Raumkurve in ihrer natürlichen Parametrisierung als $\vec{r}(s)$ an.

2.4: Berechnen Sie das begleitende Dreibein $(\hat{t}, \hat{n}, \hat{b})$ als Funktion der Bogenlänge.

2.5: Berechnen Sie den Krümmungs- und Torsionsradius der Raumkurve $\vec{r}$.

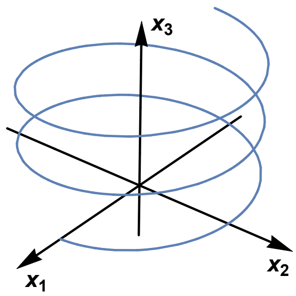

Abbildung 1: Schraubenlinie.

Aufgabe 3: Logarithmische Spirale (6 Punkte = 2 + 2 + 2)

Betrachten Sie die Raumkurve $\vec{r}$, welche durch die folgende Abbildungsvorschrift definiert ist:

$$\vec{r} : \mathbb{R} \supset [t_a = 0, t_e] \to \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^3 \ , \qquad t \mapsto \vec{r}(t) = \left(e^{bt}\cos(\omega t), e^{bt}\sin(\omega t), 0\right) \ ,$$

wobei b, ω positive reelle Konstanten sind.

3.1: Berechnen Sie die Geschwindigkeit der Raumkurve $\vec{v}(t)$, deren Betrag $|\vec{v}(t)|$, sowie die Beschleunigung der Raumkurve $\vec{a}(t)$ und deren Betrag $|\vec{a}(t)|$.

3.2: Berechnen Sie die Bogenlänge der ersten Windung der Raumkurve $\vec{r}$.

3.3: Berechnen Sie den Krümmungsradius als Funktion der Zeit. Was passiert mit diesem im Limes $b \to \infty$?