Theoretische Physik I: Mathematische Methoden
Wintersemester 2019/2020
Prof. Dr. Luciano Rezzolla
Dr. Ralf-Arno Tripolt

Ausgabe des Übungsblattes: 24.10.2019
Abgabe des Übungsblattes: 31.10.2019

Übungsblatt 2

Aufgabe 1: Allgemeine Vektorrelationen (3 Punkte = 1+1+1)

Beweisen Sie folgende Relationen:

1.1: $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

1.2: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$

1.3: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot [(\vec{b} \times \vec{c}) \times (\vec{c} \times \vec{a})] = [\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})]^2$

Aufgabe 2: Mehrfachprodukte von Vektoren (3 Punkte = $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$)

Berechnen Sie für die Vektoren $\vec{a} = (1, 0, 2)$, $\vec{b} = (-1, 1, 5)$ und $\vec{c} = (-2, 1, 0)$ folgende Ausdrücke:

2.1: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

2.2: $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

2.3: $|(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}|$

2.4: $|\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})|$

2.5: $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{b} \times \vec{c})$

2.6: $(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{b} \cdot \vec{c})$

Aufgabe 3: Vektoren in der Ebene (4 Punkte = 2 + 2)

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$, für die gilt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a} \ ,$$

mit $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$.

3.1: Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ in einer Ebene liegen müssen.

3.2: Zeigen Sie, dass die Summe der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ verschwinden muss, d.h.

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \ .$$

Aufgabe 4: Festkörperphysik - Basisvektoren des reziproken Gitters (10 Punkte = 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 2)

Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a}_1 = \frac{a}{2}(-\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) \ , \quad \vec{a}_2 = \frac{a}{2}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3) \ , \quad \vec{a}_3 = \frac{a}{2}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3) \ ,$$

sowie

$$\vec{b}_1 = \frac{a}{2}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \ , \quad \vec{b}_2 = \frac{a}{2}(\vec{e}_1 + \vec{e}_3) \ , \quad \vec{b}_3 = \frac{a}{2}(\vec{e}_2 + \vec{e}_3) \ ,$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ und $\vec{e}_i \in \mathbb{R}^3$, $i = 1, 2, 3$, die drei Einheitsvektoren eines rechtshändigen kartesischen Koordinatensystems sind.

4.1: Zeichnen Sie die Vektoren $\vec{a}_i$ und $\vec{b}_i$, mit $i = 1, 2, 3$, jeweils in ein kartesisches Koordinatensystem.

4.2: Berechnen Sie das Volumen V_a bzw. V_b des Spats, welcher jeweils durch die Vektoren $\vec{a}_i$ und $\vec{b}_i$, mit $i = 1, 2, 3$, aufgespannt wird.

4.3: Berechnen Sie die Vektoren

$$\vec{g}_1^{(v)} = \frac{2\pi}{V_v} (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) \ , \quad \vec{g}_2^{(v)} = \frac{2\pi}{V_v} (\vec{v}_3 \times \vec{v}_1) \ , \quad \vec{g}_3^{(v)} = \frac{2\pi}{V_v} (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) \ ,$$

jeweils für $\vec{v}_i = \vec{a}_i$ und $\vec{v}_i = \vec{b}_i$, mit $i = 1, 2, 3$.

4.4: Zeichnen Sie die Vektoren $\vec{g}_i^{(v)}$, mit $i = 1, 2, 3$, für beide Fälle jeweils in ein kartesisches Koordinatensystem. Was fällt Ihnen auf?

4.5: Berechnen Sie den Ausdruck

$$\vec{v}_i \cdot \vec{g}_j^{(v)}$$

für die Vektoren $\vec{v}_i = \vec{a}_i$ und $\vec{v}_i = \vec{b}_i$, mit $i, j = 1, 2, 3$.

4.6: Berechnen Sie den Ausdruck

$$\vec{v}_i \cdot \vec{g}_j^{(v)}$$

für $i, j = 1, 2, 3$ für beliebige Vektoren $\vec{v}_i = \sum_{j=1}^{3} v_{ij} \vec{e}_j \in \mathbb{R}^3$.