Theoretische Physik I: Mathematische Methoden
Wintersemester 2019/2020
Prof. Dr. Luciano Rezzolla
Dr. Ralf-Arno Tripolt

Übungsblatt 0

Aufgabe 1: Bruchrechnung

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke und kürzen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich.

1.1:
$$\left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\right]^2$$

1.2:
$$\left(5+\frac{3}{4}\right)+\frac{0.2}{\frac{15}{4}-\left(3+\frac{1}{2}\right)}$$

Aufgabe 2: Gewöhnliche Gleichungen und Lineare Gleichungssysteme

2.1: Betrachten Sie eine Menge gleichartiger Ziegelsteine. Ein Ziegelstein wiege 1 Kilogramm plus die Hälfte eines anderen Steines. Wieviel Kilogramm wiegt ein Ziegelstein?

2.2: Lösen Sie nach x auf
$$\frac{x}{x-2}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2x-4}\ .$$

Aufgabe 3: Differentialrechnung

3.1: Beantworten Sie zunächst folgende allgemeine Fragen:

(a) Wann ist eine Funktion $f(x)$ stetig in x_0? Wann ist sie stetig in dem Intervall (a, b)?

(b) Nennen Sie ein Beispiel von einer Funktion $f(x) : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, die nicht stetig in $x_0 = 0$ ist.

(c) Was ist die Ableitung einer Funktion in x_0? Wann ist eine Funktion in dem Intervall (a, b) ableitbar?

(d) Nennen Sie ein Beispiel von einer Funktion, die stetig aber nicht ableitbar in $x_0 = 0$ ist.

(e) Wie lauten Produkt-, Quotienten- und Kettenregel für allgemeine Funktionen $f(x)$ und $g(x)$?

3.2. Berechnen Sie die erste Ableitung folgender Funktionen:

(a)	$f(x) = x^2\cos(x)$	(b)	$f(x) = \dfrac{x^3}{1-x^2}$
(c)	$f(x) = \arcsin x$	(d)	$f(x) = 5$
(e)	$f(x) = e^{\tan\sqrt{x}}$	(f)	$f(x) = \ln\left(1-e^{\sqrt{x^2+a^2}}\right)$

Aufgabe 4: Integralrechnung

4.1: Beantworten Sie zunächst folgende allgemeine Fragen:

(a) Was ist die geometrische Bedeutung der bestimmten Integrale $\int_a^b f(x)dx$ und $\int_a^b |f(x)|\,dx$ (wobei $a < b$)?

(b) Was ist eine Stammfunktion?

(c) Wie lautet die Substitutionsregel und wie integriert man mit Hilfe partieller Integration?

4.2: Berechnen Sie folgende bestimmte und unbestimmte Integrale:

(a) $$\int dx\, x^\alpha \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

(b) $$\int dx\, a^x$$

(c) $$\int dx\, \frac{x^3}{(x^4+2)^3}$$

(d) $$\int_{e^2}^{e^3} dx\, \frac{1}{x(\ln x)}$$

(e) $$\int_0^{n\pi} dx\, x^2 \cos x \qquad (n \in \mathbb{N})$$

(f) $$\int (4+2x)^2$$

Theoretische Physik I: Mathematische Methoden
Wintersemester 2019/2020
Prof. Dr. Luciano Rezzolla — Ausgabe des Übungsblattes: 17.10.2019
Dr. Ralf-Arno Tripolt — Abgabe des Übungsblattes: 24.10.2019

Übungsblatt 1

Aufgabe 1: Skalarprodukt (4 Punkte = 1+1+1+1)

Welche Relationszeichen gehören statt des Fragezeichens in die folgenden Ausdrücke? Begründen Sie Ihre Wahl mathematisch.

1.1: $\vec{a} \cdot \vec{b} \quad ? \quad \vec{b} \cdot \vec{a}$

1.2: $k(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad ? \quad (k\vec{a}) \cdot \vec{b}$

1.3: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) \quad ? \quad (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$

1.4: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) \quad ? \quad \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

Aufgabe 2: Vektoren in der Ebene (6 Punkte = 1+1+1+1+1+1)

Gegeben seien die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ in der x-y-Ebene bzgl. einer kartesischen Basis: $\vec{a} = (1,2)^T$, $\vec{b} = (3,0)^T$, $\vec{c} = (-1,1)^T$.

2.1: Zeichnen Sie die drei Vektoren in ein Koordinatensystem.

2.2: Bestimmen Sie den Betrag der drei Vektoren.

2.3: Berechnen und zeichnen Sie die Vektoren $(-\vec{a})$, $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ und $2\vec{a} - \vec{b}$.

2.4: Wie lautet der Einheitsvektor $\vec{e}_c$ in Richtung des Vektors $\vec{c}$?

2.5: Bestimmen Sie jeweils die Projektion der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} + \vec{b}$ auf den Einheitsvektor $\vec{e}_c$.

2.6: Bestimmen Sie die reellen Zahlen α und β derart, dass $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{c}$.

Aufgabe 3: Vektoren in drei Dimensionen (10 Punkte = 2+1+1+2+2+2)

Seien $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ die orthogonalen Einheitsvektoren in x-, y- und $z-$Richtung.

3.1: Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke

(a) $\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 - 5\vec{e}_3)$,
(b) $(\pi\vec{e}_1 + 5\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2) \cdot (8\vec{e}_3 - 5\vec{e}_2)$,
(c) $(\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2) \cdot (8\vec{e}_2 - 6\vec{e}_2)$,
(d) $(6\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3) \cdot (2\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 + 18\vec{e}_3)$.

3.2: Bestimmen Sie den Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren $\vec{a} = \vec{e}_1 - 6\alpha\vec{e}_2 + \alpha\vec{e}_3$ und $\vec{b} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 3\alpha\vec{e}_3$ orthogonal zueinander sind.

3.3: Welche Länge hat die Projektion des Vektors $\vec{a} = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$ auf die Richtung des Vektors $\vec{b} = 2\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$?

3.4: Bestimmen Sie den Winkel

(a) zwischen den Vektoren $\vec{a} = -\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$ und $\vec{b} = 2\vec{e}_1 - 6\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$;

(b) zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $2\vec{a}$;

(c) zwischen den Vektoren $\vec{b}$ und $5\vec{b}$;

(d) zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{e}_1$

in Grad.

3.5: Zerlegen Sie den Vektor $\vec{a} = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$ in einen Vektor $\vec{a}_\perp$ senkrecht und einen Vektor $\vec{a}_\parallel$ parallel zum Vektor $\vec{b} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3$. Überprüfen Sie anschließend, dass $\vec{a}_\perp \cdot \vec{a}_\parallel = 0$ gilt.

3.6: Bestimmen Sie all jene Einheitsvektoren, die orthogonal zum Vektor $\vec{e}_3$ sind.