
Statische Potentiale für schwere Quarkonia im Echtzeit-Formalismus

DIPLOMARBEIT

vorgelegt von: NINA GAUSMANN
Betreuer: Prof. Dr. OWE PHILIPSEN



MÜNSTER, August 2010

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Grundlagen der Quantenchromodynamik	7
2.1	Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik	7
2.2	Nicht-abelsche Eichtheorien	8
2.2.1	Quantenchromodynamik	8
2.2.2	Yang-Mills Theorie	9
2.2.3	Transformationsverhalten	9
3	Schwere Quarkonia	11
3.1	Bindungszustände schwerer Quarks	11
3.2	Schmelzen schwerer Quarkoniumzustände	13
3.3	Das Potential der starken Wechselwirkung	14
3.4	Skalen für gebundene $q\bar{q}$ -Zustände bei endlichen Temperaturen	15
4	Thermische Feldtheorie	17
4.1	Pfadintegraldarstellung der Zustandssumme	17
4.2	Echtzeit-Formalismus	19
4.2.1	Pfadzeitordnung	19
4.2.2	Operatorformalismus und Zweipunktfunktionen	20
5	Störungstheoretische Betrachtung der Potentiale	23
5.1	Das statische Singulett-Potential	23
5.1.1	Nicht-relativistische Betrachtung des Potentials	24
5.1.2	Störungstheoretische Betrachtung des Potentials	25
5.2	Das statische Oktett-Potential	30
5.2.1	Einfügen von $SU(N)$ -Generatoren in den Korrelator	30
5.2.2	Ersetzen der Generatoren durch Felder	31
5.2.3	Störungstheoretische Betrachtung des Oktett-Korrelators	33
6	Gitter-Eichtheorie	39
6.1	Diskretisierung durch Raumzeit-Gitter	39
6.2	Eichfelder im Gitterformalismus	40
6.3	Lokale Eichinvarianz	40
6.4	Diskretisierte thermische Erwartungswerte	41
7	Numerischer Zugang	43
7.1	Klassische Gitter-Eichsimulationen	43
7.1.1	Monte-Carlo Verfahren	43
7.1.2	Thermalisierungsphase und numerische Umsetzung	44

7.2	Imaginärteil der statischen Echtzeit-Potentiale	45
7.2.1	Singulett-Potential	45
7.2.2	Oktett-Potential	49
8	Zusammenfassung und Ausblick	55
A	Anhang	57
A.1	Notation	57
A.2	Generatoren	58
A.2.1	Pauli-Matrizen	58
A.2.2	Gell-Mann-Matrizen	58
A.2.3	Nützliche Identitäten	59
A.3	Räumliche Integrale zur Berechnung der statischen Potentiale	60
A.4	Übersicht der Parameter für die durchgeführten Echtzeit-Simulationen .	60
A.5	Singulett-Diagramme	61
A.6	Übersicht der Diagramme für das Verhalten bei großen Zeiten	62
A.6.1	Singulett	62
A.6.2	Oktett	64

1 Einleitung

Die Novemberrevolution 1974 bot ein völlig neues Verständnis der Struktur von Materie, da sie unter anderem die Entdeckung eines schweren gebundenen Quark-Antiquark-Paares hervorbrachte. Durch das gefundene Charm-Quark [1, 2] wurden neue Erkenntnisse über die Phänomenologie der starken Wechselwirkung erzielt, insbesondere für das Verhalten bei kurzen Abständen. Aufgrund seiner hohen Quarkmasse bewegt sich das Charm-Quark relativ langsam, wodurch eine nicht-relativistische Betrachtung ermöglicht wird. Dies gewährleistet im Zusammenhang mit hohen Temperaturen eine Betrachtung im Schwachkopplungsregime. Zum weiteren Verständnis ist das statische Potential zwischen zwei stark wechselwirkenden Konstituenten von besonderem theoretischen Interesse. Die scharfen Resonanzen ermöglichen eine sehr präzise Untersuchung der Spektren der Quark-Antiquark-Zustände, was die These für die Existenz von Quarks als fundamentale Bestandteile hadronischer Masse festigte. Wenige Jahre später wurde das Bottom-Quark [3] gefunden und im Zusammenhang mit den Teilchenfamilien das entsprechende Top-Quark postuliert, welches erst 1995 am Fermilab experimentell bestätigt werden konnte [4]. Damit standen die sechs Flavour der Quarks fest: up, down, strange, charm, bottom und top. Als interner Freiheitsgrad wurde die Farbladung eingeführt, welche von stark wechselwirkenden Teilchen getragen wird. Die vorliegende Farbsymmetrie ist exakt, demzufolge ist die Kraft zwischen den Quarks unabhängig von der involvierten Farbladung. Die Farbladungen werden durch acht Vektorbosonen vermittelt, die selbst farbgeladen sind und daher untereinander wechselwirken. Ihre Farbladung setzt sich aus einer der drei möglichen Farben und einer Antifarbe zusammen, wodurch sich die Gluonen aus gruppentheoretischen Überlegungen in ein Singulett und Oktett aufspalten:

$$3 \otimes 3^* = 1 \oplus 8 \quad . \quad (1.1)$$

Dabei ist das Oktett durch acht aktive, also farbgeladene, Gluonen charakterisiert, wohingegen der Singulett-Zustand farblos ist. Obwohl alle in der Natur vorkommenden Teilchen Farbsingulett sind, konnte der farblose Zustand experimentell nicht beobachtet werden, was sich unter anderem in der kurzen Reichweite der starken Wechselwirkung widerspiegelt. Dies erklärt die Erweiterung auf die $SU(3)$ -Eichgruppe mit acht Generatoren. Ähnlich zu diesem Vorgehen lassen sich für ein Quark-Antiquark-Paar ein Farbsingulett und -oktett definieren.

Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt in der Untersuchung des Einflusses des Aufbrechens eines gebundenen Farbsingulett-Zustandes in ein Oktett auf die thermische Zerfallsbreite von schweren Quarkonia. Das thermische Aufbrechen ist auf die Wechselwirkung mit dem Plasma zurückzuführen. Es wird vermutet [5], dass der Mechanismus der Landau-Dämpfung durch den Imaginärteil der Gluon-Selbstenergie [6] nicht alleine für die Verbreiterung des Resonanzpeaks in der Spektralfunktion verantwortlich ist.

Das thermische Aufbrechen soll bei kurzen Abständen ebenso beitragen, weshalb eine Modifikation des in [7] dargelegten Singulett-Potentials vorgenommen werden muss. Im nachfolgenden Kapitel werden die Grundlagen zu nicht-abelschen Eichtheorien beschrieben, wobei insbesondere auf die Yang-Mills Theorie eingegangen wird. Anschließend wird explizit eine physikalische Einleitung in das Themengebiet der Bindungszustände schwerer Quarks gegeben, da diese für die vorliegende Arbeit von besonderer Bedeutung sind. Dabei werden sowohl das Dissoziationsverhalten von Quarkonium als auch die benötigten Skalen näher erläutert. Die im darauf folgenden Kapitel behandelte thermische Feldtheorie bietet die quantenfeldtheoretische Beschreibung der zu berechnenden Potentiale unter Berücksichtigung der Temperatureffekte. Es werden die wichtigsten Formalismen aus dieser Theorie vorgestellt. In Kapitel 5 wird zuerst das thermische Singulett-Potential hergeleitet, gefolgt von der Betrachtung eines Korrelators, der zudem das thermische Aufbrechen bei kurzen Abständen berücksichtigt. Es soll gezeigt werden, dass dieser Prozess zur Verbreiterung des Resonanzpeaks beiträgt. Die beiden Potentiale werden in Kapitel 7 durch Gitter-Eichsimulationen nicht-perturbativ reproduziert. Nach einer Einführung in die Gitter-Eichtheorie sowie in die grundlegenden numerischen Methoden wird die Simulation der Potentiale mit besonderem Augenmerk auf das Verhalten bei großen Zeiten aufgezeigt, um den Effekt der beiden Prozesse auf die thermische Zerfallsbreite bestimmen zu können.

2 Grundlagen der Quantenchromodynamik

2.1 Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik

Die fundamentalen Wechselwirkungen zwischen Elementarteilchen werden durch das Standardmodell beschrieben, dessen Entstehung auf die 1960er und 1970er datiert werden kann. Ausgenommen vom Standardmodell ist die Gravitation, für die bisher keine geeignete Quantentheorie gefunden werden konnte. Als mathematische Grundlage dieses Modells dient die Quantenfeldtheorie (QFT), welche durch die Quantisierung klassischer Feldtheorien charakterisiert ist. Dabei erweisen sich der Operator- und Pfadintegralformalismus als äquivalente Ansätze, deren Einsatz je nach Problemstellung vorteilhaft sein kann. So eignen sich Pfadintegrale insbesondere bei der Beschreibung von Eichtheorien, welche durch eine lokale Eichsymmetrie gekennzeichnet sind. Bei endlichen Temperaturen ist der Gebrauch beider Formalismen sinnvoll, worauf in Kapitel 4 näher eingegangen wird.

Von besonderem Interesse für diese Arbeit ist die Quantenchromodynamik (QCD), welche sich als bewährte theoretische Beschreibung der starken Wechselwirkung etabliert hat und für die noch keine Diskrepanz beobachtet wurde (siehe z.B. [8,9]). Angefangen mit einer theoretischen Einordnung von Hadronen in Multipletts durch den von Gell-Mann und Ne'eman 1961 eingeführten *Eightfold Way* [10,11], entstand darauf beruhend das Partonmodell nach Zweig [12] und Gell-Mann [13], in welchem die Quarks als die elementaren Bestandteile der Hadronen angesehen werden. Das daraus resultierende SU(3)-Flavour-Modell musste um die Freiheitsgrade einer SU(3)-Farbsymmetriegruppe erweitert werden, um alle hadronischen Zustände, die zu dieser Zeit bekannt waren, systematisieren zu können. Die Einführung dieser zusätzlichen Farbquantenzahl erklärte, warum das Δ^{++} -Teilchen trotz der scheinbaren Verletzung des Pauli-Prinzips aufgrund der symmetrischen Orts-, Spin- und Flavour-Wellenfunktionen existieren kann.

Anders als bei der Quantenelektrodynamik (QED), welche mit der abelschen Eichgruppe U(1) als Theorie der elektromagnetischen Wechselwirkung fungiert, handelt es sich bei der QCD um eine nicht-abelsche Eichtheorie. Dies führte zu der Postulierung eines Oktetts von Eichbosonen, den Gluonen, welche als Vermittler der Wechselwirkung dienen und ebenfalls Farbladungen tragen (siehe Kapitel 2.2). Dies und der Beweis der Renormierbarkeit von Eichtheorien durch 't Hooft [14] hatten zur Konsequenz, dass die schon zuvor konstatierte Yang-Mills Theorie erheblich an Aufmerksamkeit gewann.

2.2 Nicht-abelsche Eichtheorien

Abhängig von der zugrunde liegenden Eichgruppe wird der abelsche bzw. nicht-abelsche Charakter einer Eichtheorie bestimmt. Bei einer nicht-abelschen Eichgruppe ist die Multiplikation von zwei Gruppenelementen nicht kommutativ, was zu Selbstwechselwirkungstermen der Eichbosonen in der Lagrangedichte führt. Nachfolgend wird dies anhand der QCD und Yang-Mills Theorie dargelegt.

2.2.1 Quantenchromodynamik

Die QCD ist ein bedeutendes Beispiel für eine nicht-abelsche Eichtheorie und entspricht dem Fall $N = 3$, wobei N die Anzahl der Farben ist. Dabei handelt es sich um eine renormierbare Feldtheorie, deren Kopplungsstärke, beschrieben durch die Kopplungskonstante g , eine Abhängigkeit von der Energieskala aufweist. Eine prägnante Eigenschaft der QCD ist die asymptotische Freiheit. So strebt die Kopplungsstärke mit zunehmender Energie logarithmisch gegen Null, wodurch eine perturbative Betrachtung ermöglicht wird. Bei niedrigen Energieskalen nimmt die Kopplungskonstante große Werte an, was zum Zusammenbruch einer störungstheoretischen Betrachtung und dem Einschluss der Quarks in Hadronen führt. Dieses Verhalten bezeichnet man als *Confinement* und erklärt, warum in der Natur keine einzelnen Quarks beobachtet werden. Nachstehend wird die Lagrangedichte der QCD aufgeführt, deren Herleitung u.a. in [15, 16] nachvollzogen werden kann:

$$\mathcal{L}(\psi, \bar{\psi}) = \bar{\psi} (i\gamma_\mu D^\mu - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \quad . \quad (2.1)$$

Die durch $\psi_{f\alpha}$ repräsentierten fermionischen Felder besitzen drei Indizes: *Flavour* f , wodurch eine Unterscheidung der sechs Quarksorten ermöglicht wird, die eingeführte Farbe $a = 1, \dots, N^2 - 1$ als zusätzlichen internen Freiheitsgrad zum Erhalt des Pauli-Prinzips und einen Spinorindex α . $F_{\mu\nu}$ ist der Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu}^a(x) T^a = \left(\partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) + g f^{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x) \right) T^a \quad (2.2)$$

und definiert die auftretenden Eichfelder $A_\mu(x)$, welche als Austauschbosonen der starken Wechselwirkung fungieren. Sowohl die Eichfelder $A_\mu(x) = A_\mu^a(x) T^a$, welche Elemente der Lie-Algebra $\mathfrak{su}(N)$ sind, als auch der Feldstärketensor tragen einen Farbindex a . Durch die Farbladung der Austauschbosonen wird die Selbstwechselwirkung der Gluonen begründet. Die Dirac'schen Gammamatrizen werden mit γ_μ und die total antisymmetrischen Strukturkonstanten mit f^{abc} bezeichnet. Die Rechnungen dieser Arbeit werden sich im Folgenden auf den reinen Eichsektor begrenzen, d.h. auf die Yang-Mills Theorie.

2.2.2 Yang-Mills Theorie

Chen Ning Yang und Robert Mills formulierten 1954 eine Eichtheorie [17], welche eine Erweiterung der abelschen Eichtheorien darstellt. Die Yang-Mills Theorie ist invariant unter lokalen $SU(N)$ -Transformationen und da für diese Arbeit der reine Eichsektor bzw. die Beschränkung auf gluonische Freiheitsgrade von besonderer Bedeutung ist, wird die Beschreibung der fermionischen Felder vernachlässigt und lediglich die Yang-Mills Lagrangedichte (vgl. z.B. [9])

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{2} \text{Tr} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \quad (2.3)$$

verwendet. Bei den Eichfeldern handelt es sich um hermitesche und spurlose $(N \times N)$ -Matrizen, die zur Gewährleistung der lokalen Eichsymmetrie durch die Definition der kovarianten Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu(x) \quad (2.4)$$

eingeführt wurden. Der Feldstärketensor und die kovariante Ableitung sind über die Beziehung

$$[D_\mu, D_\nu] = igF_{\mu\nu} \quad (2.5)$$

verbunden. Die ebenfalls spurlosen und hermiteschen Matrizen T^a unterliegen der Normierungsbedingung

$$\text{Tr} T^a T^b = \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad (2.6)$$

und der Kommutatorrelation

$$[T^a, T^b] = if^{abc} T^c \quad (2.7)$$

Nicht-verschwindende Strukturkonstanten f^{abc} indizieren eine nicht-abelsche Gruppe. Weitere gruppentheoretische Relationen bezüglich der Generatoren können im Anhang A.2 gefunden werden. Da das Transformationsverhalten insbesondere für die Beschreibung der Potentiale relevant ist, wird hierauf explizit eingegangen¹.

2.2.3 Transformationsverhalten

Durch Voraussetzen einer lokalen Eichsymmetrie muss die Lagrangedichte invariant unter lokalen Transformationen

$$\psi(x) \rightarrow U(x)\psi(x) \quad (2.8)$$

sein, wobei $\psi(x)$ für ein Fermionfeld steht und die unitäre Transformationsmatrix $U(x)$ hinsichtlich der Generatoren ausgedrückt werden kann durch

$$U(x) = \exp \{-ig\alpha^a(x)T^a\} \quad , \quad (2.9)$$

$$U^\dagger(x)U(x) = \mathbf{1} \quad , \quad (2.10)$$

¹Für eine detaillierte Ausführung siehe u.a. [8, 9].

mit $\alpha(x)$ als eine beliebige reelle Funktion von x . Das Transformationsverhalten der kovarianten Ableitung aus (2.4) ergibt sich demnach zu

$$D_\mu \rightarrow U(x)D_\mu U^\dagger(x) \quad . \quad (2.11)$$

Für den Feldstärketensor folgt durch die Beziehung (2.5) das gleiche Transformationsverhalten.

3 Schwere Quarkonia

Die Entdeckung der schweren Quarks ermöglichte eine neue Herangehensweise an derzeitige Problemstellungen, wie beispielsweise das Verhalten von Quarks bei kurzen Abständen. Durch die hohen Massen ist eine Betrachtung der starken Wechselwirkung auf einem nicht-relativistischen Hintergrund durchführbar.

3.1 Bindungszustände schwerer Quarks

Gebundene Zustände aus einem Quark und dem jeweiligen Antiquark werden Quarkonium genannt. Ihren Namen erhielten diese Systeme in Anlehnung an das Positronium, welches ein elektromagnetisch-wechselwirkendes System aus einem Elektron und Positron beschreibt [18]. Nur den schweren Quarks können gebundene $q\bar{q}$ -Zustände eindeutig zugeordnet werden, die man als Charmonium ($c\bar{c}$), Bottomonium ($b\bar{b}$) und Toponium ($t\bar{t}$) bezeichnet. Leichte Quarks tendieren aufgrund ihrer ähnlichen Massen dazu, Mischzustände einzugehen und bilden daher keine wohl definierten Quarkoniumzustände. Scharfe Resonanzen des Toponiums werden nicht erwartet, da es wegen der extrem hohen Massen der Konstituentenquarks schwach zerfällt ($t \rightarrow W^+b$, $\bar{t} \rightarrow W^-\bar{b}$) und nur eine geringe Lebensdauer aufweist (siehe u.a. [19]). Als erstes Quarkonium wurde das J/Ψ -Meson, der erste angeregte Zustand des Charmoniums, 1974 am *SLAC National Accelerator Laboratory* durch e^+e^- -Kollisionen bei Schwerpunktsenergien von 3 – 4,5 GeV über ein virtuelles Photon erzeugt¹ [2]. Dabei wurden verschiedene, äußerst schmale Resonanzen beobachtet, die auf unterschiedliche Zustände des Charmoniums hindeuten, deren Quantenzahlen jedoch auf die des Photons beschränkt sind².

Die Breite der Resonanzen ist durch die Zerfallskanäle bzw. Zustandsänderungen des J/Ψ bestimmt [21], welche in Abbildung 3.1 graphisch dargestellt sind. So zerfällt das Charmonium aufgrund der starken Wechselwirkung bei ausreichend hohen Energien durch Bildung von leichten Mesonen. Unterhalb dieser Energieschwelle ist eine Annihilation von Quark und Antiquark zu drei Gluonen möglich, die wiederum Hadronen erzeugen. Die Farbladung des Gluons und die Erhaltung der C-Parität in der starken Wechselwirkung führen dazu, dass hier kein Prozess mit weniger als drei entstehenden Gluonen stattfindet, da der gebundene $c\bar{c}$ -Zustand eine negative C-Parität besitzt.

¹Gleichzeitig wurde das J/Ψ -Teilchen am *Brookhaven National Laboratory* bei Kollisionen von Protonen (28 GeV) auf ein Berillium Target entdeckt [1], was zu der doppelten Namensgebung führte. Der beobachtete Peak lag bei einer Masse von 3,1 GeV.

²Der energetisch etwas niedriger liegende $c\bar{c}$ -Zustand η_c kann wegen seiner Quantenzahlen 0^{-+} nicht direkt aus e^+e^- -Experimenten hervorgehen [20].

Dies ist zudem verantwortlich dafür, dass das Charmonium trotz der deutlich kleineren Kopplungskonstante des elektromagnetischen Prozesses auch zu einem virtuellen Photon annihilieren kann. Laut Zweig-Regel werden jedoch Prozesse über virtuelle Zwischenzustände unterdrückt, wodurch die Mesonenbildung, bei der alle Quarklinien durchgängig sind, gegenüber der Annihilation favorisiert wird. Dies erklärt die verhältnismäßig lange Lebensdauer des Charmoniums und die sehr engen Resonanzen unterhalb der Schwellenenergie [22].

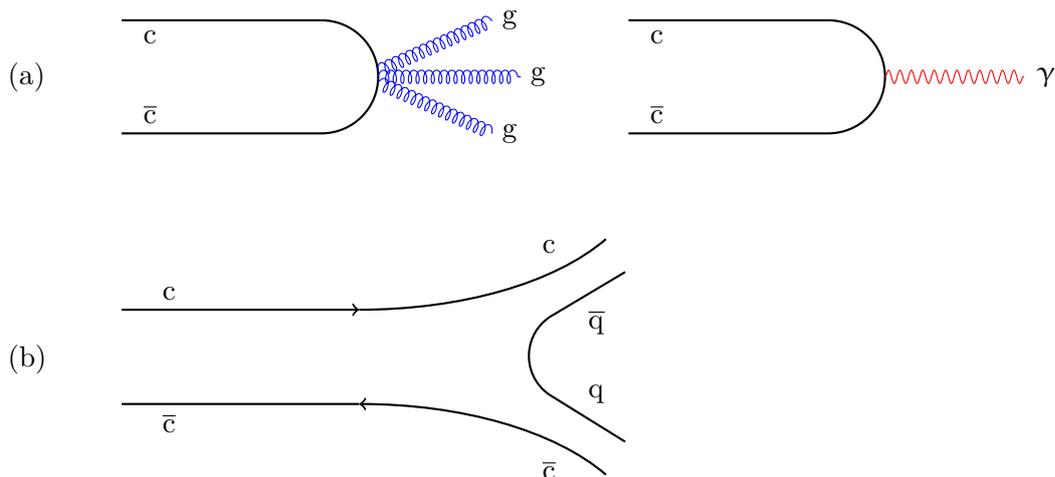


Abbildung 3.1: Die unterschiedlichen Zerfallskanäle des Charmoniums. (a) Annihilation des Quarks und Antiquarks zu drei Gluonen (stark) bzw. einem virtuellem Photon (elektromagnetisch). (b) Bildung von leichten Mesonen aus einem Prozess mit einem $q\bar{q}$ -Paar aus dem Vakuum (stark).

Für die Entdeckung des Bottomoniums 1977 am Fermilab [3] waren Schwerpunktsenergien von etwa 10 GeV notwendig. Der angeregte Zustand des Bottomoniums Υ , welcher in etwa dreimal so schwer wie das J/Ψ ist, ermöglicht eine genauere nicht-relativistische und störungstheoretische Betrachtung. Die Zerfallskanäle gleichen denen des Charmoniums und in beiden Fällen ermöglichen die entstehenden Zerfallsphotonen den Nachweis der Zustände. Eine Auflistung der unterschiedlichen Zustände des Charmoniums und Bottomoniums ist in Tabelle 3.1 zu finden.

$n^{2s+1}l_J$	J^{PC}	$c\bar{c}$	$b\bar{b}$
1^1S_0	0^{-+}	η_c	η_b
1^3S_1	1^{--}	J/Ψ	Υ
2^3S_1	1^{--}	$\Psi(2S)$	$\Upsilon(2S)$
1^1P_1	1^{+-}	h_c	h_b
1^3P_0	0^{++}	χ_{c0}	χ_{b0}
1^3P_1	1^{++}	χ_{c1}	χ_{b1}
1^3P_2	2^{++}	χ_{c2}	χ_{b2}

Tabelle 3.1: Klassifizierung der Charmonium- und Bottomoniumzustände [23].

3.2 Schmelzen schwerer Quarkoniumzustände

Schwere Quarkonia können in einem thermischen Medium aus Gluonen und leichten Quarks existieren, wenn die Temperatur und alle weiteren thermodynamischen Skalen (siehe Kap. 3.4) kleiner als die schwere Quarkmasse³ M sind. Ihre Eigenschaften sind anfällig für den Deconfinement-Übergang der thermischen QCD, obwohl die kritische Temperatur weit unterhalb der schweren Quarkmasse liegt. Schwere Quarkonia eignen sich daher, die Bildung von Quark-Gluon-Plasma nachzuweisen [25]. Der Zerfall von schweren gebundenen $q\bar{q}$ -Zuständen kann über ein virtuelles Photon und der anschließenden Produktion von Dilepton-Paaren gemessen werden, da die Leptonen nicht der starken Wechselwirkung unterliegen und somit dem thermischen System entfliehen können. Die Spektralfunktion, welche die Produktionsrate der Dilepton-Paare bestimmt, zeigt einen einzelnen Resonanzpeak für Quarkonia, welcher sich mit ansteigender Temperatur verbreitert und ab einer gewissen Temperatur verschwindet [26]. Dies ist darauf zurückzuführen, dass oberhalb des Deconfinement-Übergangs das farbelektrische Feld, welches verantwortlich für die Bindung zwischen dem schweren Quark und seinem Antiquark ist, Debye-abgeschirmt wird. Bei großen Abschirmungen treten keine gebundenen Zustände mehr auf und das Quarkonium “schmilzt”. In Abbildung 3.2 ist das Verhalten anhand der Spektralfunktion von Bottomonium aufgezeigt [27].

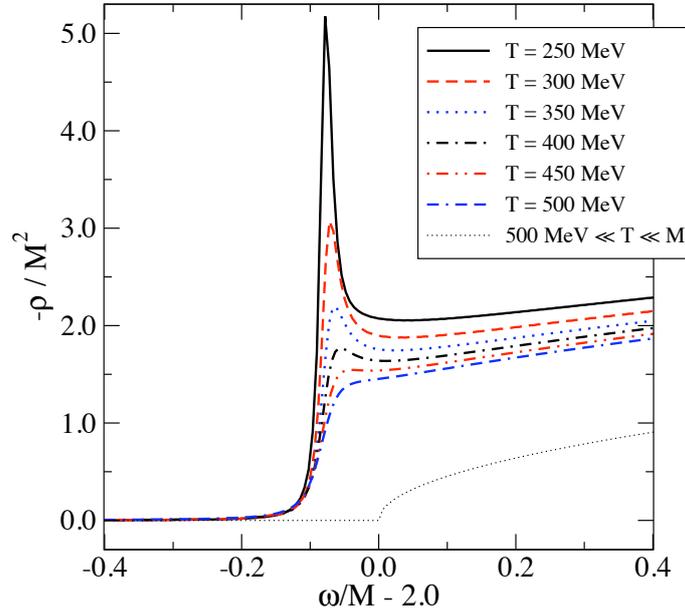


Abbildung 3.2: Verkleinerung des Resonanzpeaks von Bottomonium in der Spektralfunktion bei zunehmenden Temperaturen und mit schwerer Quarkmasse M im nicht-relativistischen Regime [27].

³ $M_c = 1,27^{+0,07}_{-0,11}$ GeV, $M_b = 4,20^{+0,17}_{-0,07}$ GeV, $M_t = 171,2 \pm 2,1$ GeV [24].

3.3 Das Potential der starken Wechselwirkung

Experimentell konnte folgendes Potential für zwei stark wechselwirkende Teilchen verifiziert werden [28]:

$$V(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s(r)}{r} + kr \quad . \quad (3.1)$$

Dabei steht kr für die rückstellende Kraft und $\alpha_s(r)$ stellt die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung dar. In Abb. 3.3 wird zum einen der Verlauf des gesamten Potentials und zum anderen nur der coulombartige Teil des Potentials illustriert.

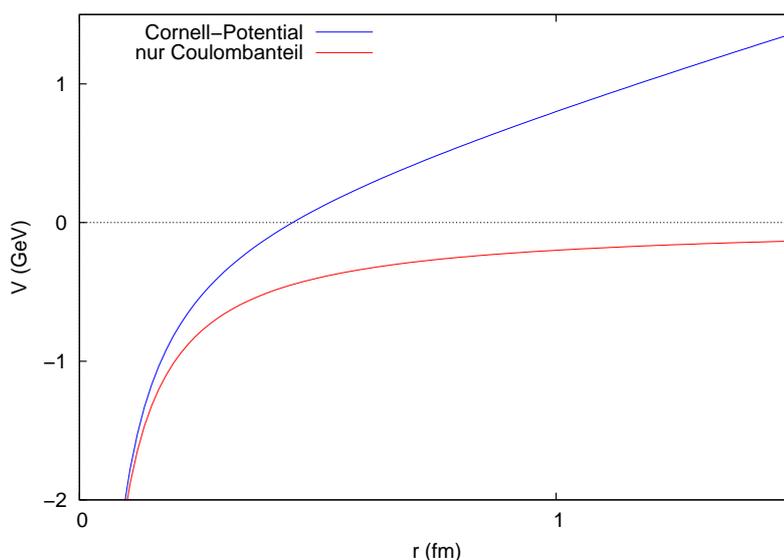


Abbildung 3.3: In der oberen Kurve (blau) ist der Verlauf des Cornell-Potentials inklusive des linearen Terms kr , der für den *Confinement*-Effekt verantwortlich ist, dargestellt. Die untere Kurve (rot) beschreibt den Verlauf für den coulombartigen Beitrag $-\frac{4}{3} \frac{\alpha_s(r)}{r}$. Für die Quark-Gluon-Kopplung wurde $\alpha_s(r) = 0,2$ und $k \approx 1 \text{ GeV/fm}$ für die Saitenspannung (engl. *string tension*) gewählt.

Der erste Term des sogenannten Cornell-Potentials (3.1) zeigt eine coulombartige Struktur, die auf den Austausch eines einzelnen Gluons zurückzuführen ist und bei kleinen Abständen überwiegt. Zusätzlich tritt ein linearer Beitrag auf, dessen Existenz in der Bildung eines röhrenförmigen Feldflusses (*flux tube*) durch Separation der beiden Wechselwirkungspartner begründet liegt [29]. Bei räumlicher Ausdehnung der Bindungspartner gewinnt dieses Verhalten immer mehr an Bedeutung und impliziert den *Confinement*-Effekt, welcher für den Einschluss von Quarks verantwortlich ist. Dadurch sind stark geladene Teilchen nicht einzeln beobachtbar, da bei großen Entfernungen Energien oberhalb des Schwellenwerts erreicht werden, was zum Aufbruch des starken chromoelektrischen Feldes zwischen den Quarks (*string breaking*) und anschließender Produktion von leichten Quark-Antiquark-Paaren führt. Das Potential beschreibt das Spektrum der gebundenen $c\bar{c}$ -Zustände in guter Näherung (für einen Überblick siehe [30]).

3.4 Skalen für gebundene $q\bar{q}$ -Zustände bei endlichen Temperaturen

Um Störungstheorie im Schwachkopplungsregime, in welchem die Kopplung g kleine Werte annimmt, ausführen zu können, ist es notwendig, die Skalen des Systems festzuhalten⁴. Bei schweren Quarkonia lassen sich verschiedene Skalenarten unterscheiden. So gehören zu den thermodynamischen Skalen, welche die Bewegung der Teilchen beschreiben, die Temperatur und die Debye-Masse m_D . Letztere kennzeichnet die Abschirmung durch ein farbelektrisches Feld. Schwere gebundene $q\bar{q}$ -Zustände werden durch folgende dimensionsbehaftete Skalen charakterisiert: die schweren Quarkmassen M , der inverse Abstand r^{-1} zwischen den gebundenen Quarks (wobei für kurze Abstände $r^{-1} \gg \Lambda_{\text{QCD}}$ gilt) und die Bindungsenergie der Wechselwirkungspartner ϵ_B . Der QCD-Skalenparameter Λ_{QCD} beschreibt den Übergangspunkt, an welchem eine perturbative Betrachtung möglich ist. Um das Schwachkopplungsregime ($m_D \sim gT \ll T$) gewährleisten zu können, werden nachfolgende Annahmen getroffen:

$$gT \gg \Lambda_{\text{QCD}} \quad , \quad (3.2)$$

$$\epsilon_B > \Lambda_{\text{QCD}} \quad . \quad (3.3)$$

Für das Quark-Gluon-Plasma (QGP) können drei relevante Impulsskalen k identifiziert werden [26]:

- **Harte Impulse** $k \sim T$ beschreiben die massiven Quarks und energiereichen Gluonen des QGPs.
- **Weiche Impulse** $k \sim gT \sim m_D$ sind durch die Abschirmung durch farbelektrische Wechselwirkungen charakterisiert.
- In der **ultraweichen Skala** $k \sim g^2T$ dominieren Beiträge höherer Ordnungen. Sie wird mit der Abschirmung durch farbmagnetische Felder assoziiert.

⁴Für eine ausführliche Beschreibung siehe [26].

4 Thermische Feldtheorie

Die thermische Feldtheorie ermöglicht einen Zugang zu Eichtheorien, in denen Temperatureffekte berücksichtigt werden. Da der Schwerpunkt dieser Arbeit in der Untersuchung von statischen Potentialen schwerer Quarkonia in einem thermischen Medium liegt, ist die Verwendung von thermischen Feldtheorien erforderlich. Viele Probleme der thermischen Feldtheorie lassen sich durch die analytische Fortsetzung von Minkowski-Raumzeit zur euklidischen Zeit vermeiden. Dies geschieht durch eine Wick-Rotation, wodurch die Zeitachse um 90° gedreht wird. Dem entspricht die Ersetzung der Minkowski-Zeitkomponente $x_0 = t$ durch die euklidische Komponente $x_4 = i\tau = \beta$, wobei τ reell ist (siehe auch Anhang A.1 oder [31]). Aufgrund der Analogie von statistischer Mechanik und thermischer Feldtheorie eignen sich Pfadintegrale für eine Betrachtung von dynamischen Systemen bei endlichen Temperaturen.

4.1 Pfadintegraldarstellung der Zustandssumme

Aufgrund der nun vorhandenen Temperatureffekte wird die kanonische Zustandssumme

$$Z(\beta) = \text{Tr} \left(e^{-\beta H} \right) = \sum_n e^{-\beta E_n} \quad (4.1)$$

$$= \int dx \langle x | e^{-\beta H} | x \rangle \quad (4.2)$$

eingeführt. Es wird allgemein in dieser Arbeit von einem verschwindenden chemischen Potential $\mu = 0$ ausgegangen, wodurch lediglich die inverse Temperatur $\beta = T^{-1}$ und $H(x_i, p_i)$, als vollständige Hamiltonfunktion der vorliegenden Theorie mit den Freiheitsgraden x_i und p_i , die Zustandssumme kennzeichnen. Die Spur impliziert die Summation die über alle Konfigurationen, die im System erlaubt sind, und führt zu der Einführung eines kompletten Satzes von Eigenvektoren des Ortsoperators in (4.2). Im thermischen Gleichgewicht kann der hier verwendete thermische Erwartungswert für einen Operator A anhand der Zustandssumme dargestellt werden:

$$\langle A \rangle = \frac{1}{Z} \text{Tr} \left(A e^{-\beta H} \right) . \quad (4.3)$$

Formal kann $e^{-\beta H}$ dabei als Entwicklungsoperator zu imaginären Zeiten betrachtet werden. Dem Vorgehen aus [15, Kapitel 3] folgend, lässt sich (4.1) mit der Bewegung eines Teilchens in einem zeitabhängigen Potential vergleichen, deren Anfangspunkt durch x_i und Endpunkt durch x_f bestimmt ist, wobei die Wahl der Anfangszeit beliebig ist.

In der Quantenmechanik bezeichnet man dies als Übergangsamplitude, welche sich hinsichtlich eines Pfadintegrals ausdrücken lässt:

$$\begin{aligned} \langle x_f(t_f) | x_i(t_0) \rangle &= \langle x_f | e^{-iH(t_f-t_0)} | x_0 \rangle \\ &= \int dx \int dp \exp(i \int_{t_i}^{t_f} dt [p\dot{x} - H]) \quad . \end{aligned} \quad (4.4)$$

Dabei bezeichnet p den kanonisch konjugierten Impuls. Durch einen Abgleich dieser beiden Ausdrücke sowie dem Übergang zur Quantenfeldtheorie, bei der x durch den Feldoperator $\phi(x)$ und p durch die Impulsdichte $\pi(x)$ ersetzt werden, ergibt sich für die Funktionalintegraldarstellung der Zustandssumme

$$Z(\beta) = \int \mathcal{D}\phi \exp(i \int_0^\beta d^4x \mathcal{L}) \quad . \quad (4.5)$$

\mathcal{L} repräsentiert die Lagrangedichte zu euklidischen Zeiten. Die Zeitkoordinate ist weder auf imaginäre noch auf reelle Werte beschränkt und die bosonischen Quantenfelder unterliegen periodischen Randbedingungen:

$$\phi(t, \mathbf{x}) = \phi(t - i\beta, \mathbf{x}) \quad . \quad (4.6)$$

Die Impulsdichte kann ausintegriert werden, da die Hamiltonfunktion $H(\phi, \pi)$ eine quadratische Abhängigkeit in $\pi(x)$ aufweist.

Ein geeignetes Verfahren, um Größen auszudrücken, die temperaturabhängig sind und durch die Minkowski-Zeit beschrieben werden, bietet der Echtzeit-Formalismus. Dieser wird für die Berechnung der statischen Potentiale benutzt, da diese vor einem thermischen Hintergrund betrachtet werden.

4.2 Echtzeit-Formalismus

Bei Echtzeit-Observablen handelt es sich um Größen, die zum einen eine Minkowski-Zeitkomponente besitzen und zum anderen eine Abhängigkeit von der Temperatur aufweisen. Im Folgenden werden bekannte Techniken auf einen thermischen Hintergrund angepasst.

4.2.1 Pfadzeitordnung

Im Echtzeit-Formalismus erfolgt eine Substitution der Zeitordnung durch eine Zeitpfadordnung, die einer Orientierung von Observablen entlang eines komplexen Zeitpfades C entspricht:

$$T_C(\phi(x)\phi(y)) = \theta_C(t - t')\phi(x)\phi(y) + \theta_C(t' - t)\phi(y)\phi(x) \quad , \quad (4.7)$$

wobei die θ_C -Funktion die Anordnung der Zeitkomponente auf dem Zeitpfad bestimmt. In Abb. 4.1 ist eine mögliche Anordnung für den komplexen Zeitpfad illustriert, in Anlehnung an [31, Kapitel 3.3]. Entlang der reellen Achse kann der Pfad C_1 von $t_i = -\infty$ bis $t_f = \infty$ sowie in die entgegengesetzte Richtung C_2 verlaufen. Die Pfade sind nur zur Veranschaulichung in geringem Abstand zur reellen Achse aufgeführt, prinzipiell verlaufen sie auf der Achse. Aufgrund der periodischen Randbedingungen (4.6) ist der Pfad C_i entlang der imaginären Achse geschlossen und läuft von t_i bis $t_{i+i\beta}$. Im thermischen Gleichgewicht ergeben zeit- und zeitpfadgeordnete Methoden die gleichen Ergebnisse, was in den Berechnungen der thermischen Echtzeit-Potentiale genutzt wird. Von besonderer Bedeutung für diese Arbeit ist die reelle Achse, da die Zeitargumente der zu berechnenden Größen reelle Werte annehmen.

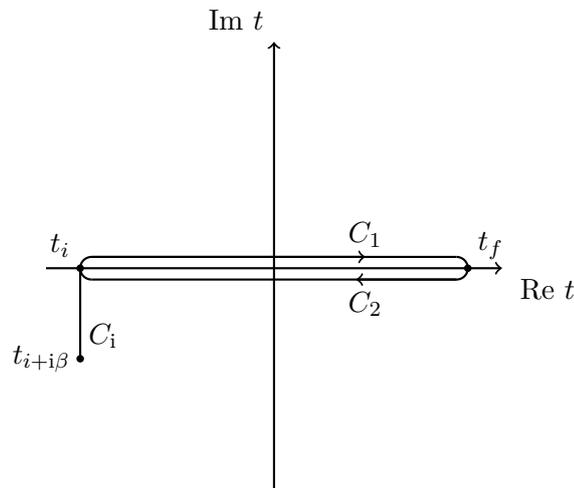


Abbildung 4.1: Illustration des komplexen Zeitpfades: C_1 und C_2 verlaufen entlang der reellen Zeitachse. C_1 beginnt bei $t_i \rightarrow -\infty$ und endet bei $t_f \rightarrow \infty$. C_2 läuft in entgegengesetzter Richtung. C_i ist ein geschlossener Pfad, der rein imaginäre Werte annimmt.

4.2.2 Operatorformalismus und Zweipunktfunktionen

Der Operatorformalismus eignet sich insbesondere für die Betrachtung von Echtzeit-Größen, wie beispielsweise thermischen Greensfunktionen. Allgemein gilt für die Definition eines pfadgeordneten Propagators

$$D_C(x, y) = \theta_C(t - t') D_C^>(x, y) + \theta_C(t' - t) D_C^<(x, y) \quad , \quad (4.8)$$

mit den vorwärts- und rückwärtsgerichteten Propagatoren $D_C^>(x, y)$ und $D_C^<(x, y)$, die wie folgt festgelegt sind

$$D_C^>(x, y) = \langle \phi(x) \phi(y) \rangle \quad , \quad (4.9)$$

$$D_C^<(x, y) = \langle \phi(y) \phi(x) \rangle = D_C^>(y, x) \quad . \quad (4.10)$$

Aufgrund der vorliegenden Translationsinvarianz hängen $D_C^>(y, x)$ und $D_C^<(x, y)$ lediglich von der Differenz $(x - y)$ ab, wodurch sich der Propagator umschreiben lässt zu

$$D_C(x - y) = \theta_C(t - t') (D_C^>(x - y) - D_C^<(x - y)) + D_C^<(x - y) \quad , \quad (4.11)$$

mit der Symmetrieeigenschaft

$$D_C(x - y) = D_C(y - x) \quad . \quad (4.12)$$

Der Echtzeit-Propagator kann durch die vier folgenden Komponenten ausgedrückt werden [32]:

$$D_C(x - y) = \begin{pmatrix} D_{11}(x - y) & D_{12}(x - y) \\ D_{21}(x - y) & D_{22}(x - y) \end{pmatrix} \quad , \quad (4.13)$$

mit den Matrixelementen

$$iD_{11}(x - y) = \left\langle \hat{\mathcal{T}} \phi(x) \phi(y) \right\rangle \quad , \quad (4.14)$$

$$iD_{22}(x - y) = \left\langle \hat{\bar{\mathcal{T}}} \phi(x) \phi(y) \right\rangle \quad , \quad (4.15)$$

$$iD_{12}(x - y) = - \left\langle \phi(y) \phi(x) \right\rangle \quad , \quad (4.16)$$

$$iD_{21}(x - y) = \left\langle \phi(x) \phi(y) \right\rangle \quad , \quad (4.17)$$

wobei $\hat{\mathcal{T}}$ und $\hat{\bar{\mathcal{T}}}$ jeweils Zeit- bzw. Antizeitordnung beschreiben. Die Indizes kennzeichnen, auf welchem Pfad die Propagatoren angelegt sind. So beschreibt $D_{11}(x - y)$ beispielsweise den Propagator, der gänzlich auf C_1 aus Abb. 4.1 lokalisiert ist, wenn man die Anfangszeit auf $t_i = 0$ setzt und somit die Betrachtung auf rein positive Zeiten begrenzt.

Anhand ihrer Definitionen ist erkennbar, dass die vier Propagatoren abhängig voneinander sind. Sie erfüllen die Relation [32]

$$D_{11}(x-y) + D_{22}(x-y) = D_{12}(x-y) + D_{21}(x-y) \quad , \quad (4.18)$$

wodurch sich der Echtzeit-Propagator auf drei Einträge reduzieren lässt. Von besonderem Nutzen erweist sich die Definition:

$$D'_C = \begin{pmatrix} 0 & D_A \\ D_R & D_S \end{pmatrix} \quad , \quad (4.19)$$

wobei es sich bei D_R um den retardierten Propagator

$$D_R(x-y) = \theta_C(t-t') \langle [\phi(x), \phi(y)] \rangle \quad (4.20)$$

handelt und D_A und D_S als avanciert und symmetrisch bezeichnet werden. Der symmetrische Propagator ist für die Rechnungen dieser Arbeit nicht relevant und der avancierte Propagator lautet:

$$D_A(x-y) = -\theta_C(t'-t) \langle [\phi(x), \phi(y)] \rangle \quad . \quad (4.21)$$

Die in (4.18) auftretenden Komponenten lassen sich durch den retardierten Propagator ausdrücken, worauf in der Berechnung des Singulett-Potentials (Kap. 5.1) explizit eingegangen wird.

5 Störungstheoretische Betrachtung der Potentiale

Basierend auf der von Matsui und Satz [25] aufgestellten These, dass die Dissoziation von schweren Quarkonia durch Farbabschirmung ein Indiz für die Bildung von Quark-Gluon-Plasmen sein könnte, wurden verschiedene Potentialmodelle entwickelt, welche die Temperaturabhängigkeit berücksichtigen. Um Potentiale von schweren Quark-Antiquark-Paaren in einem Medium aus Gluonen und leichten Quarks, charakterisiert durch die Temperatur T , zu beschreiben, gibt es zwei Herangehensweisen für die Berechnung im Echtzeit-Formalismus. Zum einen kann der Korrelator durch die analytische Entwicklung einer Wilson-Schleife ermittelt werden [7] und zum anderen kann von einer effektiven Theorie ausgegangen werden, in der die Quarks durch unendlich schwere Quarks ersetzt werden: die nicht-relativistische Quantenchromodynamik (NRQCD) [33]. Aufgrund der auftretenden Infrarot-Probleme bei endlichen Temperaturen ist die Verwendung von resummierten Propagatoren notwendig. Nach einer vollständigen Berechnung des reellen und imaginären Teils des statischen Singulett-Potentials erfolgt die Betrachtung von möglichen Korrelatoren, die sich für die Beschreibung des thermischen Aufbrechens des $q\bar{q}$ -Singulett in ein Oktett eignen, welches in der Wechselwirkung mit dem Medium begründet liegt. Das thermische Aufbrechen ist neben dem Imaginärteil der Gluon-Selbstenergie ein weiterer Prozess, der Einfluss auf die thermische Zerfallsbreite hat, und wurde in diesem Kontext erstmals in [5] angesprochen. Um die Dissoziation von Quarkonium in einem thermischen Medium vollständig beschreiben zu können, ist es notwendig beide Prozesse zu verstehen. So überwiegt der Beitrag durch den Imaginärteil der gluonischen Selbstenergie bei Temperaturen, für die die Debye-Masse m_D kleiner als die Bindungsenergie ist. Für niedrigere Temperaturen entstehen durch den thermischen Aufbruch neue Beiträge zum Potential, sowohl reell als auch imaginär, welche relevant für die Beschreibung der Dissoziation von schweren Quarkonia im thermischen Medium sein könnten.

5.1 Das statische Singulett-Potential

Die Berechnung des statischen Potentials eines in Minkowski-Zeit propagierenden, schweren gebundenen $q\bar{q}$ -Zustands in resummierter Störungstheorie wurde erstmals in [7] vorgestellt. Nachstehend ist die Herleitung des statischen Singulett-Potentials dargestellt, wobei zuerst auf die Definition und insbesondere auf den mesonischen Korrelator eingegangen wird, der im direkten Zusammenhang mit der Spektralfunktion steht.

5.1.1 Nicht-relativistische Betrachtung des Potentials

Eine für die Bestimmung des statischen Potentials relevante Größe ist der mesonische Korrelator in Fundamentaldarstellung [34]

$$C^{21}(t, \mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{x} \left\langle \bar{\phi}(t, \mathbf{x} + \frac{\mathbf{r}}{2}) \gamma^\mu W \phi(t, \mathbf{x} - \frac{\mathbf{r}}{2}) \bar{\phi}(0, \mathbf{0}) \gamma_\mu W \phi(0, \mathbf{0}) \right\rangle , \quad (5.1)$$

der die Propagation des Quarkoniums beschreibt, dessen Komponenten durch den Abstand r getrennt sind. Es wurde das Verfahren des *Point-Splittings*¹ angewandt, um eine perturbative Betrachtung zu gewährleisten. Die Definitionen der γ^μ - Matrizen sind im Anhang A.1 aufzufinden. W bezeichnet eine Wilson-Linie und wird anlehnd an die Theorie des Paralleltransporters (siehe z.B. [35]) als Größe definiert, die zwei fermionische Felder an unterschiedlichen Raumzeitpunkten x und y verbindet. Entlang der Raumzeit-Kurve \mathcal{C} ist sie definiert durch

$$W[y, x] = \exp \left\{ -ig \int_{\mathcal{C}} dx^\mu A_\mu \right\} \quad (5.2)$$

und beschreibt die Wechselwirkung zwischen diesen Feldern anhand der Eichfelder A_μ . Die Wilson-Linie besitzt folgendes Transformationsverhalten:

$$W[y, x] \rightarrow U(x) W[y, x] U^\dagger(y) . \quad (5.3)$$

Die Zeitentwicklung des Korrelators (5.1) kann für $t = 0$ anhand einer nicht-relativistischen Schrödinger-Gleichung in Minkowski-Zeit beschrieben werden, woraus sich folgende Definition des Potentials $V^>(t, r)$ ableitet [7]:

$$i\partial_t C^{21}(t, r) \equiv V^{21}(t, r) C^{21}(t, r) . \quad (5.4)$$

Die nicht-relativistische Betrachtung ist auf die schweren Quarkmassen des Quark-Antiquark-Paares zurückzuführen.

Darstellung des Korrelators durch eine Wilson-Schleife

Im weiteren Verlauf wird von unendlich schweren Quarkmassen ausgegangen, wodurch die Propagation eines schweren Quark-Antiquark-Paares, das durch den Abstand r voneinander getrennt ist, durch eine Wilson-Schleife ausgedrückt werden kann. Des Weiteren haben die unendlichen Massen zur Folge, dass die Quarks keine räumliche Bewegung mehr ausführen, wodurch das räumliche Integral im Korrelator wegfällt. Für unendliche Zeiten ergibt sich somit das statische Potential

$$V(\mathbf{r}) = \lim_{t \rightarrow \infty} V(t, \mathbf{r}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{i\partial_t C^{21}(t, \mathbf{r})}{C^{21}(t, \mathbf{r})} . \quad (5.5)$$

¹*Point-Splitting* beschreibt das Einfügen von Phasenfaktoren zum Erhalt der Eigenschaften der Eichtransformationen.

Durch die Wahl des Zeitpfads (siehe Kapitel 4.2), der sowohl bei einer reellen Zeit beginnt als auch endet, lässt sich C^{21} für positive Zeiten, was bei einem Verhalten von $t \rightarrow \infty$ angenommen werden kann, durch den zeitgeordneten Propagator C^{11} ersetzen [36]. Für den Korrelator erhält man

$$C^{11}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{N_c} \text{Tr} \left\langle \hat{\mathcal{T}} W_1 [(t, \mathbf{0}), (t, \mathbf{r})] W_2 [(0, \mathbf{0}), (t, \mathbf{0})] \right. \\ \left. \times W_3 [(0, \mathbf{r}), (0, \mathbf{0})] W_4 [(t, \mathbf{r}), (0, \mathbf{r})] \right\rangle . \quad (5.6)$$

N_c repräsentiert die Anzahl der Farben und der Faktor $\frac{1}{N_c}$ stellt die Normierung für $t = 0$ sicher, so dass $C^{11}(0, \mathbf{r}) = 1$ folgt. $\hat{\mathcal{T}}$ stellt die Zeitordnung dar, welche weiterhin zu berücksichtigen ist. Der Erwartungswert hat die in Gleichung (4.3) beschriebene Form. Die Wilson-Linien verlaufen über den Pfad, der die angrenzenden Operatoren miteinander verbindet. Durch den geschlossenen Pfad ist die nicht-perturbative Eichinvarianz des Korrelators gewährleistet. Anschaulich ist die Wilson-Schleife in Abbildung 5.1 gezeigt.

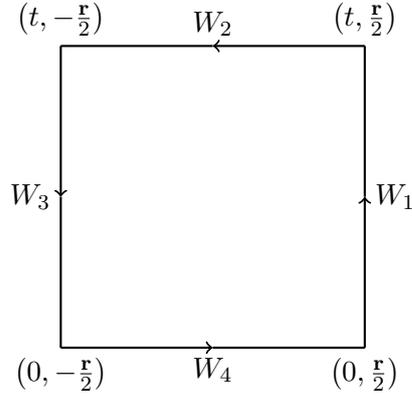


Abbildung 5.1: Verlauf der Wilson-Schleife wie im Singulett-Korrelator beschrieben.

Durch die kleinen Beträge der Kopplungskonstanten g der starken Wechselwirkung bei endlichen Temperaturen kann eine hinreichende Abschätzung des Potentials anhand von resummierter Störungstheorie gegeben werden.

5.1.2 Störungstheoretische Betrachtung des Potentials

Die Wilson-Linien können durch folgende Entwicklung in der Kopplungskonstanten g ausgedrückt werden [8, Kap.15]:

$$W [(t, \mathbf{0}), (t, \mathbf{r})] = \exp \left\{ -ig \oint_P dx^\mu A_\mu \right\} \quad (5.7)$$

$$= \mathbf{1} + ig \int_{(t, \mathbf{r})}^{(t, \mathbf{0})} dx^\mu A_\mu(x) \\ + (ig)^2 \int_{(t, \mathbf{r})}^{(t, \mathbf{0})} dx^\mu \int_{(t, \mathbf{r})}^x dy^\nu A_\mu(x) A_\nu(y) + \dots \quad (5.8)$$

Der in (5.7) dargestellte Pfad P verläuft von (t, \mathbf{r}) nach $(t, \mathbf{0})$. Der Korrelator soll in der ersten nicht-trivialen Ordnung $\mathcal{O}(g^2)$ berechnet werden. Ausgedrückt in Ordnungen in g , die durch die hochgestellten Indizes gekennzeichnet sind, gilt:

$$C^{11}(t, \mathbf{r}) = C^{11(0)}(t, \mathbf{r}) + g^2 C^{11(2)}(t, \mathbf{r}) + \dots \quad (5.9)$$

Für die nullte Ordnung ergibt sich trivialerweise

$$C^{11(0)}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{N_c} \text{Tr} \mathbf{1} = 1 \quad , \quad (5.10)$$

wodurch man für die Zeitentwicklungen erhält:

$$i\partial_t C^{11(0)}(t, r) = 0 \quad , \quad (5.11)$$

$$i\partial_t C^{11(2)}(t, r) = V^{11(2)}(t, r) \quad . \quad (5.12)$$

Im Folgenden wird die temporale Eichung $A_0(x) = 0$ gewählt, wodurch die rein zeitlichen Wilson-Linien keinen Beitrag zum Potential liefern

$$W_1 = \mathbf{1} + ig \int_t^0 dx_0 A_0(x) - g^2 \int_t^0 dx_0 \int_t^{x_0} dy_0 A_0(x) A_0(y) = \mathbf{1} = W_3 \quad . \quad (5.13)$$

Zur Vereinfachung kann der Abstandsvektor in x_3 -Richtung gelegt werden $\mathbf{r} \equiv (0, 0, r)$. Damit folgt für die beiden räumlichen Wilson-Linien

$$\begin{aligned} C^{11}(t, \mathbf{r}) = & \frac{1}{N_c} \text{Tr} \left\langle \hat{\mathcal{T}} \right. \\ & \left(\mathbf{1} + ig \int_r^0 dx_3 A_3(t, \mathbf{x}) - g^2 \int_r^0 dx_3 \int_r^{x_3} dy_3 A_3(t, \mathbf{x}) A_3(t, \mathbf{y}) \right) \\ & \left. \left(\mathbf{1} + ig \int_0^r dx_3 A_3(0, \mathbf{x}) - g^2 \int_0^r dx_3 \int_0^{x_3} dy_3 A_3(0, \mathbf{x}) A_3(0, \mathbf{y}) \right) \right\rangle \quad (5.14) \end{aligned}$$

Die Zeitordnung über den thermischen Erwartungswert der Eichfelder $A_3 = A_3^a T^a$ definiert den Gluon-Propagator:

$$\left\langle \hat{\mathcal{T}} \left\{ A_3^a(x) A_3^b(y) \right\} \right\rangle = G_{33}^{ab,11}(x-y) \quad . \quad (5.15)$$

Unter Berücksichtigung des Wick'schen Theorems, wodurch alle Terme über eine ungerade Anzahl an Eichfeldern im Erwartungswert verschwinden, und durch den Übergang in den Impulsraum,

$$\tilde{G}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 k e^{ik(x-y)} G(k) \quad , \quad (5.16)$$

ergibt sich folgender Ausdruck für den Korrelator

$$\begin{aligned} C^{11}(t, \mathbf{r}) = & \frac{g^2}{(2\pi)^4 N_c} \text{Tr} \left(\mathbf{1} - T^a T^b \int_0^r dx_3 \int_0^{x_3} dy_3 \int d^4 k e^{-ik_3(x_3-y_3)} G_{33}^{ab,11}(k) \right. \\ & - T^a T^b \int_r^0 dx_3 \int_r^{x_3} dy_3 \int d^4 k e^{-ik_3(x_3-y_3)} G_{33}^{ab,11}(k) \\ & \left. - T^a T^b \int_0^r dx_3 \int_r^0 dy_3 \int d^4 k e^{i(k_0 t - k_3(x_3-y_3))} G_{33}^{ab,11}(k) \right) . \quad (5.17) \end{aligned}$$

Führt man die für die Definition des Potentials notwendige zeitliche Ableitung durch, fallen alle zeitunabhängigen Terme weg. Durch die Spur über die Farbindizes und das Lösen der Integrale über x_3 und y_3 (siehe Anhang A.3) erhält man für das Singulett-Potential in Ordnung $\mathcal{O}(g^2)$ allgemein:

$$\begin{aligned} V^{11(2)}(t, r) &= \partial_t C^{11(2)}(t, \mathbf{r}) \\ &= -\frac{C_F}{(2\pi)^4} \left(\int d^4k i k_0 e^{ik_0 t} (1 - \cos k_3 r) G_{33}^{11}(k) \right) \quad , \end{aligned} \quad (5.18)$$

mit dem Casimir-Operator C_F , welcher in der fundamentalen Darstellung definiert ist als

$$C_F \equiv \frac{(N_c^2 - 1)}{2N_c} \quad . \quad (5.19)$$

Dabei wurde berücksichtigt, dass sich die Greensfunktion aufgrund der Diagonalität in den Farbindizes darstellen lässt durch

$$G_{33}^{ab,11}(k) = \delta_{ab} G_{33}^{11}(k) \quad . \quad (5.20)$$

Verhalten für große Zeiten

Betrachtet man den Grenzfall für das Verhalten für sehr große Zeiten $t \rightarrow \infty$, kann folgender Ausdruck für die Delta-Distribution

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{ik_0 t}}{k_0} = i\pi \delta(k_0) \quad (5.21)$$

genutzt werden, wodurch das statische Potential die Form

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \partial_t C_{21}(t, \mathbf{r}) \\ &= -\frac{g^2 C_f}{(2\pi)^3} \int d^4k \frac{k_0^2}{k_3^2} \delta(k_0) (1 - \cos k_3 r) G_{33}^{11}(k) \end{aligned} \quad (5.22)$$

annimmt. Der resummierte Gluonpropagator lässt sich durch den retardierten Propagator $G_{33}^R(k)$ und den Wightman-Propagator $G_{33}^{21}(k)$ ausdrücken, wobei die Kubo-Martin-Schwinger-Relation für bosonische Felder berücksichtigt wurde:

$$\begin{aligned} G_{33}^{11}(k) &= G_{33}^R(k) + G_{33}^{12}(k) \\ &= G_{33}^R(k) + e^{-\beta k_0} G_{33}^{21}(k) \\ &= G_{33}^R(k) - 2i (n_B(\omega) + 1) \text{Im} G_{33}^R(k) \\ &= G_{33}^R(k) - 2i \left(\frac{1}{\beta k_0} + 1 \right) \text{Im} G_{33}^R(k) \quad , \end{aligned} \quad (5.23)$$

mit der Bose-Distributionsfunktion $n_B = (e^{\beta k_0} - 1)^{-1} \approx \frac{1}{\beta k_0}$ für $|k_0| \ll T$, was durch die Delta-Funktion gegeben ist, welche durch den Grenzwert (5.21) eingeführt wurde. Der retardierte Propagator in temporaler Eichung lautet [32]:

$$G_{ij}^R(k) = -\frac{1}{k^2 - \Pi_T(k)} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2} \right) - \frac{1}{k^2 - \Pi_L(k)} \frac{k_i k_j}{k_0^2} \quad (5.24)$$

und damit insbesondere

$$G_{33}^R(k) = -\frac{1}{k^2 - \Pi_T(k)} \left(1 - \frac{k_3^2}{\mathbf{k}^2}\right) - \frac{1}{\mathbf{k}^2 - \Pi_L(k)} \frac{k_3^2}{k_0^2}, \quad (5.25)$$

mit der transversalen und longitudinalen Selbstenergie [7]:

$$\Pi_T(k) = \frac{m_D^2 k_0^2}{2 \mathbf{k}^2} \left[1 - \frac{k_0^2 - \mathbf{k}^2}{2k_0|\mathbf{k}|} \ln \frac{k_0 + |\mathbf{k}|}{k_0 - |\mathbf{k}|}\right], \quad (5.26)$$

$$\Pi_L(k) = m_D^2 \left[\frac{k_0}{2|\mathbf{k}|} \ln \frac{k_0 + |\mathbf{k}|}{k_0 - |\mathbf{k}|} - 1 \right]. \quad (5.27)$$

Dabei bezeichnet m_D die Debye-Masse, die die Dimension 1/Länge besitzt [6], und repräsentiert die Skala für die Abschirmung der farbelektrischen Wechselwirkungen. Der auftretende Logarithmus ist komplex, womit sich für den Gluonpropagator ergibt:

$$\lim_{k_0 \rightarrow 0} \frac{k_0^2}{k_3^2} G_{33}^{11}(k) = - \left(\frac{1}{\mathbf{k}^2 + m_D^2} - \frac{i\pi m_D^2}{\beta|\mathbf{k}| (\mathbf{k}^2 + m_D^2)^2} \right). \quad (5.28)$$

Führt man schließlich die Integration über k aus, lautet das Singulett-Potential:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \partial_t C^{11}(t, \mathbf{r}) \\ &= -\frac{g^2 C_f}{(2\pi)^3} \int d^4 k \frac{k_0^2}{k_3^2} \delta(k_0) (1 - \cos k_3 r) G_{33}^{11}(k) \\ &= \frac{g^2 C_f}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{k} (1 - \cos(k_3 r)) \left\{ \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m_D^2} - \frac{i\pi m_D^2}{\beta|\mathbf{k}| (\mathbf{k}^2 + m_D^2)^2} \right\} \\ &= -\frac{g^2 C_f}{4\pi} \left[m_D + \frac{e^{-m_D r}}{r} \right] \\ &\quad - i \frac{g^2 C_f}{2\pi\beta} \int_0^\infty \frac{dz z}{(z^2 + 1)^2} \left[1 - \frac{\sin(m_D r z)}{m_D r z} \right]. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Der r -unabhängige Term beläuft sich auf etwa die doppelte thermische Massenkorrektur des schweren Quarks [6]. Im resultierenden statischen Potential tritt neben einem Realteil, der die Form eines Debye-abgeschirmten Coulombpotentials eines statischen Quark-Antiquark-Paares aufweist, auch ein imaginärer Teil auf, was auf die thermische Umgebung zurückzuführen ist. In [7] wurde gezeigt, dass der Imaginärteil für unendliche Zeiten nicht verschwindet. Er führt unter anderem zu einer thermischen Breite der Spitze des Quarkonium-Peaks in der Spektralfunktion [34] und kontrolliert die Dämpfung des Korrelators (siehe 7.1), welche sich aus der Landau-Dämpfung der Gluonen ableitet, die die beiden schweren Quarks aneinander bindet. Die Landau-Dämpfung ist in einem thermischen Medium auf die Streuung von Teilchen mit einem Impuls der Ordnung T mit räumlichen Gluonen, für deren Impulse $|\mathbf{k}|^2 > k_0^2$ gilt, zurückzuführen.

Die Debye-Abschirmung kann für sehr große Massen vernachlässigt werden, für realistische Massen gewinnt jedoch der Debye-Radius m_D^{-1} mehr an Bedeutung, die Bindungsenergie sinkt rapide ab und die thermische Zerfallsbreite nimmt zu. So kann zwar keine quantitative Aussage über das Dissoziationsverhalten von Quarkonium getroffen werden, aber dieses qualitativ bestätigt werden. Es würden auch in der QED Beiträge durch den Imaginärteil der Selbstenergie auftauchen, allerdings enthält die Photon-Selbstenergie nur fermionische Beiträge. Der Prozess bei kleinen Abständen, in dem thermische Fluktuationen des Mediums gebundene Farbsingulett-Zustände in einen $q\bar{q}$ -Oktett-Zustand auflösen, ist kennzeichnend für den nicht-abelschen Charakter der QCD.

5.2 Das statische Oktett-Potential

Um den Prozess des Aufbrechens eines $q\bar{q}$ -Farbsingulets in ein Farboktett zusätzlich zu berücksichtigen, wird die Echtzeit-Entwicklung eines statischen, aber unterbrochenen, Quark-Antiquark-Paares in einem Medium aus Gluonen und leichten Quarks bei endlichen Temperaturen betrachtet. Analog zur Definition des statischen Potentials im Singulett-Kanal (5.5) ist das Oktett-Potential definiert durch:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_8(\mathbf{r}) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{i\partial_t C_8^{11}(t, \mathbf{r})}{C_8^{11}(t, \mathbf{r})} . \quad (5.30)$$

Im Folgenden werden unterschiedliche Ansätze für die Definition des Korrelators vorgestellt, der dieses Potentials beschreibt.

5.2.1 Einfügen von $SU(N)$ -Generatoren in den Korrelator

Durch das thermische Aufbrechen des Singulett-Potentials in ein Farboktett entspricht der Operator für ein Oktett-Meson in der Form dem Singulett-Meson, wird aber von Farbmatrizen, den $SU(N)$ -Generatoren T^a , unterbrochen:

$$\bar{\psi}\left(-\frac{\mathbf{r}}{2}\right) W T^a W \psi\left(\frac{\mathbf{r}}{2}\right) . \quad (5.31)$$

Verwendet man diesen Ausdruck für die Definition des Oktett-Korrelators

$$\begin{aligned} C_8^{11}(t, \mathbf{r}) = & \frac{1}{N_c} \text{Tr} \left\langle \hat{\mathcal{T}} W_1 \left[\left(t, \frac{\mathbf{r}}{2}\right), \left(0, \frac{\mathbf{r}}{2}\right) \right] \right. \\ & \times W_2 \left[\left(t, \mathbf{0}\right), \left(t, \frac{\mathbf{r}}{2}\right) \right] T^a W_3 \left[\left(t, -\frac{\mathbf{r}}{2}\right), \left(t, \mathbf{0}\right) \right] \\ & \times W_4 \left[\left(0, -\frac{\mathbf{r}}{2}\right), \left(t, -\frac{\mathbf{r}}{2}\right) \right] \\ & \left. \times W_5 \left[\left(0, \mathbf{0}\right), \left(0, -\frac{\mathbf{r}}{2}\right) \right] T^a W_6 \left[\left(0, \frac{\mathbf{r}}{2}\right), \left(0, \mathbf{0}\right) \right] \right\rangle , \quad (5.32) \end{aligned}$$

ist die Eichinvarianz nicht mehr erhalten. Anschaulich wird dies in Abb. 5.2 dargestellt. Berücksichtigt man das Transformationsverhalten der Wilson-Linien (5.3), kann die Eichabhängigkeit gezeigt werden. W_1 und W_4 können aufgrund der unitären Transformationsmatrizen (2.10) bei der Betrachtung vernachlässigt werden. Mit Hilfe von

$$T_{ij}^a T_{kl}^a = \frac{1}{2} \left(\delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{N_c} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) , \quad (5.33)$$

folgt, wobei aus Gründen der Übersicht alle räumlichen Indizes hochgestellt sind:

$$C_8^{11}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{N_c} \text{Tr} \left\langle \hat{\mathcal{T}} W_2^{ij} T^{a,jk} W_3^{kl} W_5^{lm} T^{a,mn} W_6^{ni} \right\rangle \quad (5.34)$$

$$= \frac{1}{2N_c} \text{Tr} \left\langle \hat{\mathcal{T}} W_2^{ij} W_3^{kl} W_5^{lk} W_6^{ji} \right\rangle - \frac{1}{2N_c^2} \text{Tr} \left\langle \hat{\mathcal{T}} W_2^{ij} W_3^{jl} W_5^{lm} W_6^{mi} \right\rangle \quad (5.35)$$

$$= \frac{1}{2N_c} \text{Tr} \left\langle \hat{\mathcal{T}} W_2^{ij} W_3^{kl} W_5^{lk} W_6^{ji} \right\rangle - \frac{1}{2N_c} C^{11}(t, \mathbf{r}) \quad (5.36)$$

Neben dem eichinvarianten Teil, der bis auf den Vorfaktor dem Singulett-Korrelator entspricht, tritt zudem ein eichabhängiger Teil auf, wodurch der Korrelator ungeeignet für die Beschreibung des statischen Oktett-Potentials im Echtzeit-Formalismus ist. Der eichinvariante Teil tritt nur auf, wenn die Farbindizes der beiden Generatoren identisch gewählt werden. Zur Umgehung dieses Problems wird die Farbmatrix durch einen lokalen gluonischen Operator ersetzt, was im Folgenden beschrieben wird.

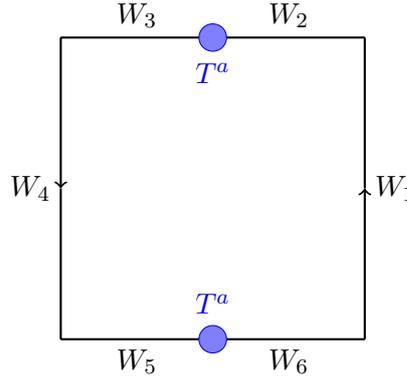


Abbildung 5.2: Verlauf der eichabhängigen Wilson-Schleife unterbrochen von den Generatoren T^a der $SU(N)$.

5.2.2 Ersetzen der Generatoren durch Felder

Um einen passenden Korrelator für das statische Oktett-Potential zu finden, muss der eingefügte Operator, welcher das Aufbrechen des Singulett-Operators charakterisiert, die erforderlichen Transformationseigenschaften besitzen. Dem Vorgehen in [33] folgend, werden die $SU(N)$ -Generatoren durch lokale Operatoren der Form $H^a(x)T^a$ ersetzt. Das farbelektrische Feld

$$E_i(x) = F_{0i} \quad (5.37)$$

eignet sich für diese Beschreibung nicht, da in diesem Fall Korrekturterme des Singulett-Operators von höherer Ordnung dominieren [37].

Für die korrekte Beschreibung kann das farbmagnetische Feld $B(x)$ als lokaler Operator gewählt werden, womit sich der Korrelator ergibt zu

$$\begin{aligned}
 C_8^{11}(t, \mathbf{r}) = & \frac{1}{N_c} \text{Tr} \left\langle \hat{\mathcal{T}} W_1 \left[\left(t, \frac{\mathbf{r}}{2} \right), \left(0, \frac{\mathbf{r}}{2} \right) \right] \right. \\
 & \times W_2 \left[\left(t, \mathbf{0} \right), \left(t, \frac{\mathbf{r}}{2} \right) \right] B_i(t, \mathbf{0}) \\
 & \times W_3 \left[\left(t, -\frac{\mathbf{r}}{2} \right), \left(t, \mathbf{0} \right) \right] W_4 \left[\left(0, -\frac{\mathbf{r}}{2} \right), \left(t, -\frac{\mathbf{r}}{2} \right) \right] \\
 & \times W_5 \left[\left(0, \mathbf{0} \right), \left(0, -\frac{\mathbf{r}}{2} \right) \right] B_i(0, \mathbf{0}) \\
 & \left. \times W_6 \left[\left(0, \frac{\mathbf{r}}{2} \right), \left(0, \mathbf{0} \right) \right] \right\rangle . \quad (5.38)
 \end{aligned}$$

Abb. 5.3 zeigt die Orientierung und Position der Magnetfelder.

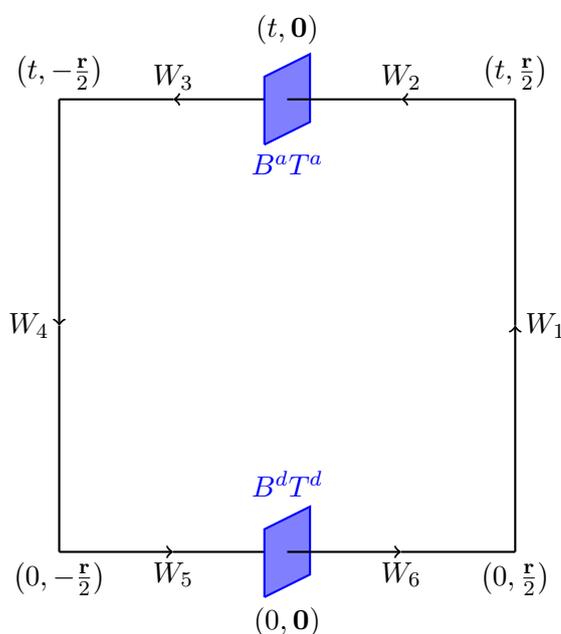


Abbildung 5.3: Verlauf der Wilson-Schleife unterbrochen von chromomagnetischen Feldern.

Das farbmagnetische Feld kann durch den Feldstärketensor F_{jk} ausgedrückt werden,

$$B_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{jk} \quad , \quad (5.39)$$

welcher das Transformationsverhalten des farbmagnetischen Feldes bestimmt. F_{jk} transformiert wie folgt:

$$F_{jk}(x) \rightarrow U(x) F_{jk}(x) U^\dagger(x) \quad . \quad (5.40)$$

Beachtet man zusätzlich das Verhalten der Wilson-Linien aus (5.3), ist die Eichinvarianz des Korrelators direkt erkennbar. Verwendet man (5.39) für die Definition des Korrelators und berücksichtigt die Relation

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km} \quad , \quad (5.41)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
 C_8^{11}(t, \mathbf{r}) = & \frac{1}{2N_c} \text{Tr} \left\langle \hat{\mathcal{T}} W_1 \left[\left(t, \frac{\mathbf{r}}{2} \right), \left(0, \frac{\mathbf{r}}{2} \right) \right] \right. \\
 & \times W_2 \left[\left(t, \mathbf{0} \right), \left(t, \frac{\mathbf{r}}{2} \right) \right] F_{jk}(t, \mathbf{0}) \\
 & \times W_3 \left[\left(t, -\frac{\mathbf{r}}{2} \right), \left(t, \mathbf{0} \right) \right] W_4 \left[\left(0, -\frac{\mathbf{r}}{2} \right), \left(t, -\frac{\mathbf{r}}{2} \right) \right] \\
 & \times W_5 \left[\left(0, \mathbf{0} \right), \left(0, -\frac{\mathbf{r}}{2} \right) \right] F_{jk}(0, \mathbf{0}) \\
 & \left. \times W_6 \left[\left(0, \frac{\mathbf{r}}{2} \right), \left(0, \mathbf{0} \right) \right] \right\rangle , \tag{5.42}
 \end{aligned}$$

da der Feldstärketensor antisymmetrisch unter Vertauschung von Lorentz-Indizes ist.

5.2.3 Störungstheoretische Betrachtung des Oktett-Korrelators

Wie schon bei der Berechnung des statischen Singulett-Potentials wird die temporale Eichung ($A_0 = 0$) angewandt, wodurch die rein zeitlichen Wilson-Linien $W_1 = W_4 = \mathbf{1}$ keinen Beitrag liefern. Die Wilson-Schleife wird wiederum zur Vereinfachung in die x_3 -Ebene gelegt und die Wilson-Linien durch die Entwicklung in g , siehe Gleichung (5.7), ausgedrückt. Aufgrund der definierten Richtung ergibt sich die Definition des Feldstärketensors $F_{12}(x)$, durch den die dritte Komponente des Magnetfeldes festgelegt wird

$$F_{12}^a(x) = \partial_1 A_2^a(x) - \partial_2 A_1^a(x) + g f^{abc} A_1^b(x) A_2^c(x) \tag{5.43}$$

und der Korrelator lautet somit,

$$\begin{aligned}
 C_8^{11}(t, \mathbf{r}) = & \frac{1}{2N_c} \text{Tr} \left\langle \hat{\mathcal{T}} \right. \\
 & \left(\mathbf{1} + ig \int_{\frac{r}{2}}^0 dx_3 A_3(t, \mathbf{x}) - g^2 \int_{\frac{r}{2}}^0 dx_3 \int_{\frac{r}{2}}^{x_3} dy_3 A_3(t, \mathbf{x}) A_3(t, \mathbf{y}) \right) \\
 & \left(\partial_1 A_2^a(t, \mathbf{0}) - \partial_2 A_1^a(t, \mathbf{0}) + g f^{abc} A_1^b(t, \mathbf{0}) A_2^c(t, \mathbf{0}) \right) T^a \\
 & \left(\mathbf{1} + ig \int_0^{-\frac{r}{2}} dx_3 A_3(t, \mathbf{x}) - g^2 \int_0^{-\frac{r}{2}} dx_3 \int_0^{x_3} dy_3 A_3(t, \mathbf{x}) A_3(t, \mathbf{y}) \right) \\
 & \left(\mathbf{1} + ig \int_{-\frac{r}{2}}^0 dx_3 A_3(0, \mathbf{x}) - g^2 \int_{-\frac{r}{2}}^0 dx_3 \int_{-\frac{r}{2}}^{x_3} dy_3 A_3(0, \mathbf{x}) A_3(0, \mathbf{y}) \right) \\
 & \left(\partial_1 A_2^d(0, \mathbf{0}) - \partial_2 A_1^d(0, \mathbf{0}) + g f^{def} A_1^e(0, \mathbf{0}) A_2^f(0, \mathbf{0}) \right) T^d \\
 & \left. \left(\mathbf{1} + ig \int_0^{\frac{r}{2}} dx_3 A_3(0, \mathbf{x}) - g^2 \int_0^{\frac{r}{2}} dx_3 \int_0^{x_3} dy_3 A_3(0, \mathbf{x}) A_3(0, \mathbf{y}) \right) \right\rangle . \tag{5.44}
 \end{aligned}$$

Berücksichtigt man das Wick'sche Theorem, fallen alle Terme über eine ungerade Anzahl von Eichfeldern weg und es ergibt sich eine Vielzahl an Termen der Ordnung $\mathcal{O}(g^2)$.

Die führende Ordnung

In der führenden Ordnung $\mathcal{O}(g^0)$ lautet der Korrelator durch den Übergang in den Impulsraum (5.16) und unter Berücksichtigung der Relation (5.15), wobei $v = (t, \mathbf{0})$ und $w = (0, \mathbf{0})$ die Positionen der Feldstärketensoren beschreiben:

$$\begin{aligned}
 C_8^{11(0)}(t, \mathbf{r}) &= \frac{1}{2N_c} \text{Tr} \left\langle \hat{\mathcal{T}} \left(\partial_1 A_2^a(v) \partial_1 A_2^b(w) + \partial_2 A_1^a(v) \partial_2 A_1^b(w) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \partial_1 A_2^a(v) \partial_2 A_1^b(w) - \partial_2 A_1^a(v) \partial_1 A_2^b(w) \right) T^a T^b \right\rangle \\
 &= \frac{(N_c^2 - 1)}{2N_c^2} \left(\partial_1^v \partial_1^w \tilde{G}_{22}^{ab}(v-w) + \partial_2^v \partial_2^w \tilde{G}^{ab}(v-w) \right. \\
 &\quad \left. - \partial_1^v \partial_2^w \tilde{G}_{21}^{ab}(v-w) - \partial_2^v \partial_1^w \tilde{G}^{ab}(v-w) \right) \\
 &= \frac{(N_c^2 - 1)}{2N_c^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik_0 t} \left(k_1^2 G_{22}^{11}(k) + k_2^2 G_{11}^{11}(k) - 2k_1 k_2 G_{12}^{11}(k) \right) .
 \end{aligned}$$

Die hochgestellten Indizes der partiellen Ableitungen deuten jeweils auf den Raumzeitpunkt hin, auf den sie ausgeführt werden. Anders als im Singulett-Fall handelt es sich bei der nullten Komponente nicht um eine triviale Konstante und muss in der Definition des statischen Potentials weiterhin berücksichtigt werden. Aus

$$C_8^{11}(t, \mathbf{r}) = C_8^{11(0)}(t, \mathbf{r}) + g^2 C_8^{11(2)}(t, \mathbf{r}) + \dots \quad (5.45)$$

folgt daher

$$V_8^{(0)+(2)}(\mathbf{r}) = \frac{i\partial_t C_8^{11(0)}(t, \mathbf{r})}{C_8^{11(0)}(t, \mathbf{r})} + g^2 \frac{i\partial_t C_8^{11(2)}(t, \mathbf{r})}{C_8^{11(0)}(t, \mathbf{r})} - g^2 \frac{C_8^{11(2)}(t, \mathbf{r})}{(C_8^{11(0)}(t, \mathbf{r}))^2} i\partial_t C_8^{11(0)} + \dots \quad (5.46)$$

Mischterme

Durch das Wick'sche Theorem ergibt sich eine Vielzahl an Kombinationen aus den Termen der Feldstärketensoren und Wilson-Linen. Man erhält 16 Mischterme der Form

$$\sim \int A(x)A(y)A(v)\partial A(w) \quad , \quad (5.47)$$

die sich jeweils aus

- einem Term der Ordnung $\mathcal{O}(g^0)$ eines Feldstärketensors ,
- dem Term der Ordnung $\mathcal{O}(g^1)$ des anderen Feldstärketensors und
- einem Term der Ordnung $\mathcal{O}(g^1)$ einer Wilson-Linie

zusammensetzen und gegenseitig aufheben.

Die übrigen Mischterme tragen zum Korrelator bei, weshalb im Folgenden ein Beispielterm vorgestellt wird, der sich aus den folgenden Beiträgen aufbaut:

- Term der Ordnung $\mathcal{O}(g^2)$ aus der Wilson-Linie $W_2 [(t, \mathbf{0}), (t, \frac{r}{2})]$,
- das Produkt der Ordnungen $\mathcal{O}(g^0)$ der Feldstärketensoren.

Dieser hat die Form:

$$\begin{aligned}
 R = & -g^2 \text{Tr} \left\langle \hat{T} T^a T^b T^c T^d \int_{\frac{r}{2}}^0 dx_3 \int_{\frac{r}{2}}^{x_3} dy_3 \right. \\
 & \left(A_3^a(t, \mathbf{x}) A_3^b(t, \mathbf{y}) \partial_1 A_2^c(t, \mathbf{0}) \partial_1 A_2^d(0, \mathbf{0}) \right) \\
 & + \left(A_3^a(t, \mathbf{x}) A_3^b(t, \mathbf{y}) \partial_2 A_1^c(t, \mathbf{0}) \partial_2 A_1^d(0, \mathbf{0}) \right) \\
 & - \left(A_3^a(t, \mathbf{x}) A_3^b(t, \mathbf{y}) \partial_1 A_2^c(t, \mathbf{0}) \partial_2 A_1^d(0, \mathbf{0}) \right) \\
 & \left. - \left(A_3^a(t, \mathbf{x}) A_3^b(t, \mathbf{y}) \partial_2 A_1^c(t, \mathbf{0}) \partial_1 A_2^d(0, \mathbf{0}) \right) \right\rangle . \quad (5.48)
 \end{aligned}$$

Wie schon bei der führenden Ordnung wird auch hier eine Fouriertransformation durchgeführt. Nach dem Wick'schen Theorem gibt es für jeden Term drei Kombinationsmöglichkeiten. Diese lassen sich aufgrund der Struktur des resummierten Gluonpropagators zu den folgenden Termen zusammenfassen:

$$\begin{aligned}
 R = & -g^2 \int_{\frac{r}{2}}^0 dx_3 \int_{\frac{r}{2}}^{x_3} dy_3 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \times \\
 & \left[T^a T^a T^b T^b e^{ip_0 t} e^{ik_3(x_3 - y_3)} G_{33}^{11}(k) \left(p_1^2 G_{22}^{11}(p) + p_2^2 G_{11}^{11}(p) - 2p_1 p_2 G_{12}^{11}(p) \right) \right. \\
 & + T^a T^b T^a T^b e^{ip_0 t} e^{i(k_3 x_3 + p_3 y_3)} \left(2k_1 p_1 G_{23}^{11}(k) G_{23}^{11}(p) - 2k_1 p_2 G_{23}^{11}(k) G_{13}^{11}(p) \right) \\
 & \left. + T^a T^a T^b T^b e^{ik_0 t} e^{i(k_3 x_3 + p_3 y_3)} \left(2k_1 p_1 G_{23}^{11}(k) G_{23}^{11}(p) - 2k_2 p_1 G_{13}^{11}(k) G_{23}^{11}(p) \right) \right] , \quad (5.49)
 \end{aligned}$$

wobei ausgenutzt wurde, dass die Gluonpropagatoren G_{ij}^{11} aus (5.24) mit unterschiedlichen Indizes eine Proportionalität zu dem Produkt der Impulse $k_i k_j$ aufweisen, was dazu führt, dass

$$\begin{aligned}
 k_1 p_1 G_{23}^{11}(k) G_{23}^{11}(p) &= k_2 p_2 G_{13}^{11}(k) G_{13}^{11}(p) \\
 k_1 p_2 G_{23}^{11}(k) G_{13}^{11}(p) &= k_2 p_1 G_{13}^{11}(k) G_{23}^{11}(p) \\
 k_1 p_1 G_{23}^{11}(k) G_{23}^{11}(p) &= k_1 p_2 G_{23}^{11}(k) G_{13}^{11}(p)
 \end{aligned}$$

und somit der Beispielterm die Form

$$\begin{aligned}
 R = & -\frac{g^2(N^2 - 1)^2}{4N} \int_{\frac{r}{2}}^0 dx_3 \int_{\frac{r}{2}}^{x_3} dy_3 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \\
 & \times e^{ip_0 t} e^{ik_3(x_3 - y_3)} G_{33}^{11}(k) \left(p_1^2 G_{22}^{11}(p) + p_2^2 G_{11}^{11}(p) - 2p_1 p_2 G_{12}^{11}(p) \right) \quad (5.50)
 \end{aligned}$$

besitzt.

Dieser Beitrag lässt sich mit der Kombination aus dem Term der Ordnung $\mathcal{O}(g^2)$ der Wilson-Linie $W_6 [(0, \frac{r}{2}), (0, \mathbf{0})]$ und dem Produkt der Terme der Ordnung $\mathcal{O}(g^0)$ der Feldstärketensoren zusammenfassen zu:

$$\begin{aligned}
 & - \frac{g^2(N^2 - 1)^2}{4N} \int_0^{\frac{r}{2}} dx_3 \int_0^{\frac{r}{2}} dy_3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \\
 & \times e^{ip_0t} e^{ik_3(x_3 - y_3)} G_{33}^{11}(k) \left(p_1^2 G_{22}^{11}(p) + p_2^2 G_{11}^{11}(p) - 2p_1 p_2 G_{12}^{11}(p) \right) \quad . \quad (5.51)
 \end{aligned}$$

Ein analoger Term, der sich nur durch die räumlichen Integralgrenzen $\int_0^{-\frac{r}{2}} dx_3 \int_0^{\frac{r}{2}} dy_3$ unterscheidet, ergibt sich jeweils aus den g^2 -Beiträgen der übrigen Wilson-Linien und dem Produkt der g^0 -Terme der Feldstärketensoren. Löst man anschließend die Integrale über x_3 und y_3 (siehe Anhang A.3) und substituiert an geeigneter Stelle, erhält man den folgenden Beitrag zum Korrelator:

$$\begin{aligned}
 & g^2 \frac{(N_c^2 - 1)}{2N_c^2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip_0t} \frac{(1 - \cos(k_3 r))}{k_3} \\
 & \times G_{33}^{11}(k) \left(p_1^2 G_{22}^{11}(p) + p_2^2 G_{11}^{11}(p) - 2p_1 p_2 G_{12}^{11}(p) \right) \\
 - & g^2 \left(N_c^2 - 1 \right) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip_0t} \frac{(1 - \cos(k_3 \frac{r}{2}))}{k_3} \\
 & \times G_{33}^{11}(k) \left(p_1^2 G_{22}^{11}(p) + p_2^2 G_{11}^{11}(p) - 2p_1 p_2 G_{12}^{11}(p) \right) \quad . \quad (5.52)
 \end{aligned}$$

Die restlichen Mischterme, die sich aus den Kombinationen der g^1 -Terme der Wilson-Linien und dem Produkt der Feldstärketensoren ergeben, können in analoger Weise berechnet werden.

Der Oktett-Korrelator

Durch die Beiträge der führenden Ordnung und den Mischtermen besitzt der Korrelator in der nächstführenden Ordnung die Form

$$\begin{aligned}
 C_8^{11}(t, \mathbf{r}) &= \frac{(N_c^2 - 1)}{2N_c^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{ik_0 t} \\
 &\quad \left(k_1^2 G_{22}^{11}(k) + k_2^2 G_{11}^{11}(k) - 2k_1 k_2 G_{12}^{11}(k) \right) \\
 &+ g^2 \frac{(N_c^2 - 1)}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i(k_0 + p_0)t} \\
 &\quad \left(G_{11}^{11}(k) G_{22}^{11}(p) - G_{12}^{11}(k) G_{12}^{11}(p) \right) \\
 &+ g^2 \frac{(N_c^2 - 1)}{2N_c^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip_0 t} \frac{(1 - \cos(k_3 r))}{k_3} \times \\
 &\quad G_{33}^{11}(k) \left(p_1^2 G_{22}^{11}(p) + p_2^2 G_{11}^{11}(p) - 2p_1 p_2 G_{12}^{11}(p) \right) \\
 &- g^2 (N_c^2 - 1) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip_0 t} \frac{(1 - \cos(k_3 \frac{r}{2}))}{k_3} \times \\
 &\quad G_{33}^{11}(k) \left(p_1^2 G_{22}^{11}(p) + p_2^2 G_{11}^{11}(p) - 2p_1 p_2 G_{12}^{11}(p) \right) \\
 &+ g^2 \frac{(N_c^2 - 1)}{2N_c^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i(k_0 + p_0)t} \frac{(1 - \cos(k_3 r))}{k_3} \times \\
 &\quad G_{33}^{11}(k) \left(p_1^2 G_{22}^{11}(p) + p_2^2 G_{11}^{11}(p) - 2p_1 p_2 G_{12}^{11}(p) \right) \\
 &- g^2 (N_c^2 - 1) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{i(k_0 + p_0)t} \frac{(1 - \cos(k_3 \frac{r}{2}))}{k_3} \times \\
 &\quad G_{33}^{11}(k) \left(p_1^2 G_{22}^{11}(p) + p_2^2 G_{11}^{11}(p) - 2p_1 p_2 G_{12}^{11}(p) \right) . \tag{5.53}
 \end{aligned}$$

Auffällig sind die unterschiedlichen Abhängigkeiten in der Zeitkomponente, wodurch die Betrachtung des Langzeit-Limes (5.21) nicht anwendbar ist. Es sind Ähnlichkeiten in der Struktur zum Singulett-Korrelator

$$C^{11}(t, \mathbf{r}) = -\frac{g^2 C_F}{(2\pi)^4} \left(\int d^4 k e^{ik_0 t} (1 - \cos k_3 r) G_{33}^{11}(k) \right) \tag{5.54}$$

erkennbar, wobei die zum Singulett-Fall analogen Terme einen zusätzlichen Faktor aus der nicht-trivialen führenden Ordnung erhalten.

6 Gitter-Eichtheorie

Die Gitter-QCD ermöglicht einen vollkommen nicht-perturbativen Zugang, der sich zur Beschreibung vieler QCD-Mechanismen, wie zum Beispiel des *Confinements* oder des Verhaltens im Gleichgewicht bei endlichen Temperaturen, eignet. Durch die Diskretisierung entsteht eine endliche Anzahl an Freiheitsgraden, was die Voraussetzung für eine numerische Auswertung der auftretenden Erwartungswerte schafft.

6.1 Diskretisierung durch Raumzeit-Gitter

Der Gitterformalismus wurde bereits 1974 durch Wilson [38] eingeführt, nicht lange nachdem die QCD als konsistente Theorie der starken Wechselwirkung an Bedeutung gewann. Die Gitter-Eichtheorie beschreibt die Kontinuumsphysik auf einem diskreten euklidischen Raumzeit-Gitter. Eine vielfach verwendete Diskretisierung macht Gebrauch von einem vierdimensionalen, hyperkubischen Gitter, dessen Gitterabstand sowohl in zeitlicher Richtung a_t als auch in allen räumlichen Richtungen a_s den gleichen Wert besitzt $a = a_t = a_s$ [39]. Dadurch ergibt sich das Volumen des Gitters zu

$$V = N_t N_s^3 a^4 \quad , \quad (6.1)$$

wobei $N_t a$ die temporale Ausdehnung beschreibt und das räumliche Volumen durch $N_s^3 a^3$ gegeben ist. Im Folgenden bezieht sich die Beschreibung der Theorie ausschließlich auf diese Art von Gitter. Aufgrund der Diskretisierung und der endlichen Werte für den Gitterabstand stellt die Gitter-Eichtheorie ein nicht-perturbatives Regularisierungsschema dar. So wird durch den Gitterformalismus automatisch ein ultravioletter *Cut-Off* der Gluon-Impulse mit $q \leq \frac{\pi}{a}$ eingeführt.

Die Diskretisierung schafft zudem die Voraussetzung für die numerische Berechnung der Erwartungswerte vieler Größen, wobei der diskrete Satz von Raumzeit-Punkten zur Limitierung des Gitter-Volumens und der Auflösung führt. Dabei besteht die Möglichkeit, Verfahren der statistischen Mechanik, wie beispielsweise Monte-Carlo Methoden, zu verwenden. Dadurch ist die Genauigkeit der numerischen Berechnungen abhängig von der Leistungsfähigkeit der Systeme, auf denen diese betrieben werden. Es werden keine neuen, physikalischen Parameter eingeführt, wodurch der fundamentale Charakter der Theorie erhalten bleibt und Aussagen über physikalische Größen und Prozesse im nicht-trivialen Kontinuumsmites $a \rightarrow 0$ getroffen werden können. Analog zur Diskretisierung der Raumzeit muss eine Überführung der Eichfelder in den Gitterformalismus vorgenommen werden.

6.2 Eichfelder im Gitterformalismus

Um Eichfelder auf dem Gitter beschreiben zu können, bedient man sich des Mechanismus des Paralleltransports [35]. Analog zu den infinitesimalen Abständen, über die der Paralleltransporter im Kontinuum definiert ist, wählt man die Länge zwischen zwei benachbarten Punkten auf dem Gitter. Bei einem hyperkubischen Gitter entspricht diese dem Gitterabstand a , wobei der direkte Pfad zwischen den Punkten als *Link* bezeichnet wird:

$$\langle x + ae_\mu, x \rangle \equiv (x, e_\mu) \quad , \quad (6.2)$$

mit $\mu = 1, 2, 3, 4$, wodurch die Einheitsvektoren e_μ auf der jeweiligen Raumzeit-Achse liegen. Zur Vereinfachung wird $\hat{\mu} \equiv ae_\mu$ gesetzt. Die Eichfelder werden durch die Einführung der Linkvariablen $U_\mu(x)$ mit der Verbindung der beiden Gitterpunkte in Zusammenhang gebracht:

$$U_\mu(x) \equiv U(x, x + \hat{\mu}) = e^{iagA_\mu(x + \frac{1}{2}\hat{\mu})} \quad , \quad (6.3)$$

$$U_{-\mu}(x) \equiv U(x, x - \hat{\mu}) = e^{iagA_\mu(x - \frac{1}{2}\hat{\mu})} \quad . \quad (6.4)$$

A_μ kann eine beliebige Position auf dem Link annehmen und ist im Folgenden auf den Mittelpunkt des Links festgelegt. $U_\mu(x)$ sind unitäre SU(3)-Matrizen und erfüllen

$$U(x, x + \hat{\mu}) = U^{-1}(x + \hat{\mu}, x) = U^\dagger(x + \hat{\mu}, x) \quad , \quad (6.5)$$

$$U_{-\mu}(x) = U_\mu^\dagger(x - \hat{\mu}) \quad . \quad (6.6)$$

6.3 Lokale Eichinvarianz

Die lokale Eichtransformation der Linkvariablen $U_\mu(x)$ und der fermionischen Felder $\psi(x)$ kann folgenderweise ausgedrückt werden [39]:

$$U_\mu(x) \rightarrow \Lambda^{-1}(x)U_\mu(x)\Lambda(x + \mu) \quad , \quad (6.7)$$

$$\psi(x) \rightarrow \Lambda(x)\psi(x) \quad , \quad (6.8)$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x)\Lambda^{-1}(x) \quad , \quad (6.9)$$

wobei es sich bei Λ ebenfalls um SU(3)-Matrizen handelt. Daraus ist direkt ersichtlich, dass ein pfadgeordnetes Produkt von Linkvariablen, an dessen Endpunkten sich beispielsweise die Konstituenten eines Quark-Antiquark-Paars befinden, eichinvariant unter lokaler Eichtransformation ist. Neben diesem Kopplungsterm gibt es einen weiteren eichinvarianten Ausdruck:

$$\text{Tr } U(\mathcal{C}_{xx}) \quad . \quad (6.10)$$

\mathcal{C}_{xx} definiert eine geschlossene und orientierte Kurve. Dabei bezeichnet man $U(\mathcal{C}_{xx})$ als Wilson-Schleife. Die kleinste geschlossene Schleife wird durch eine Plakette dargestellt. Der geschlossene Paralleltransport (siehe Abbildung 6.1), der die vier Linkvariablen einer Plakette repräsentiert, ist gegeben durch

$$U_{\mu\nu}(x) = U_\mu(x)U_\nu(x + \hat{\mu})U_\mu^\dagger(x + \hat{\nu})U_\nu^\dagger(x) \quad . \quad (6.11)$$

Die hermitesch konjugierte Variable $U_{\mu\nu}^\dagger(x)$ beschreibt die Plakette mit umgekehrten Umlaufsinn.

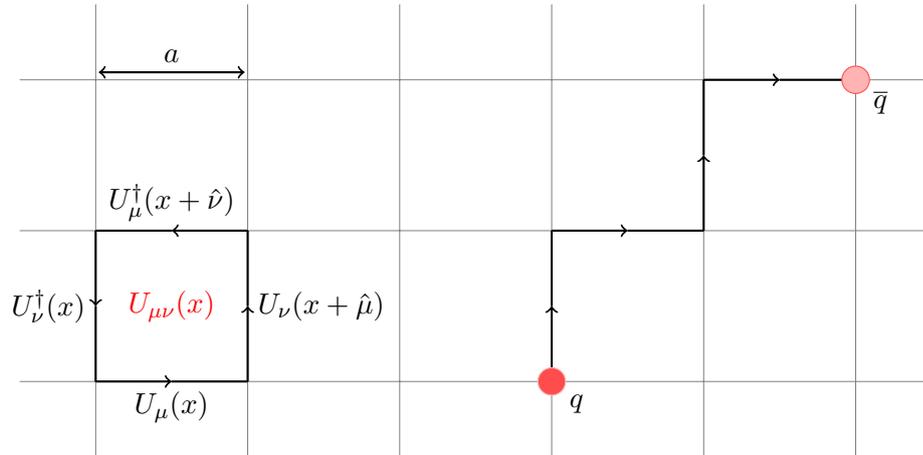


Abbildung 6.1: Veranschaulichung von eichinvarianten Größen auf einem zweidimensionalen Gitter mit Gitterabstand a : (links) Darstellung der Plakettenvariablen $U_{\mu\nu}(x)$. (rechts) Produkt von Linkvariablen, abgeschlossen von einem Quark bzw. Antiquark.

6.4 Diskretisierte thermische Erwartungswerte

Betrachtet man den reinen Eichsektor, so lässt sich eine Observable A als Funktional $A[U]$ der Linkvariablen (6.3) beschreiben. Daraus ergibt sich die Definition des thermischen Erwartungswerts anhand eines Funktionalintegrals zu

$$\langle A[U] \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}[U] A[U] e^{-S} \quad , \quad (6.12)$$

wobei das Integrationsmaß festgelegt ist durch

$$\mathcal{D}[U] = \prod_{x,\mu} dU_{\mu}(x) \quad . \quad (6.13)$$

Dabei dient e^{-S} als Gewichtungsfaktor. Im Fall der Gitter-Eichtheorie kann die diskretisierte Variante der Wilson'schen Plakettwirkung [35]

$$S_G = \beta \sum_x a^4 \sum_{\mu < \nu} \left(1 - \frac{1}{3} \text{Re Tr } U_{\mu\nu} \right) \quad (6.14)$$

verwendet werden.

7 Numerischer Zugang

Im Folgenden werden die numerischen Methoden vorgestellt, welche für die klassischen Gitter-Eichsimulationen zur Betrachtung der statischen Potentiale auf dem Gitter notwendig sind. In Anlehnung an die analytischen Ergebnisse in Kapitel 5 wird sich im weiteren Verlauf auf die Ausführung des reinen Eichsektors beschränkt und von einer Berücksichtigung der fermionischen Freiheitsgrade abgesehen.

7.1 Klassische Gitter-Eichsimulationen

Die nicht-perturbative Untersuchung anhand klassischer Gitter-Eichsimulationen wurde ursprünglich von Grigoriev und Rubakov vorgestellt [40] und ähnelt dem Kogut-Susskind-Hamilton-Ansatz [41]. Für die Diskretisierung wurde ein dreidimensionales räumliches Gitter verwendet und die Zeitkomponente kontinuierlich belassen. Im Singulett-Fall wird dieses Vorgehen u.a. in [34] beschrieben. Analog zur analytischen Herleitung werden die Simulationen in temporaler Eichung ausgeführt, wodurch sich für die rein zeitlichen Linkvariablen $U_t(t, \mathbf{x}) = \mathbf{1}$ ergibt. Der Thermalisierungs-Algorithmus wird mittels eines Monte-Carlo Verfahrens beschrieben.

7.1.1 Monte-Carlo Verfahren

Für die Simulationen der Imaginärteile des Singulett- und Oktett-Potentials auf dem Gitter ist die numerische Betrachtung von Erwartungswerten notwendig. Da diese trotz der Diskretisierung zu viele Freiheitsgrade besitzen und dadurch numerisch zu aufwendig sind, werden Monte-Carlo Methoden angewandt, in welchen nur eine begrenzte Anzahl an Feldkonfigurationen $\{U\}$ betrachtet wird. Diese Feldkonfigurationen werden zufällig durch einen Update-Algorithmus aus der direkt vorangegangenen Feldkonfiguration generiert. Der Erwartungswert einer Observablen A aus (6.12) wird durch den Ensemblemittelwert aus N Feldkonfigurationen ersetzt:

$$\langle A \rangle = \sum_{\{U\}} A(\{U\}) P(\{U\}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A(\{U\}_i) \quad . \quad (7.1)$$

$P(\{U\})$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der erzeugten Feldkonfigurationen und muss dem Gewichtungsfaktor aus (6.12) für eine unendliche Anzahl an Feldkonfigurationen entsprechen.

Die Feldkonfigurationen werden gemäß der thermischen Zustandssumme [6]

$$Z = \int \mathcal{D}[U_i] \mathcal{D}[E_i] \delta(G) \exp \left\{ -\beta \sum_x \left[\sum_{i < j} \left(1 - \frac{1}{N} \text{Re Tr } P_{ij} \right) + \sum_i \text{Tr}(E_i^2) \right] \right\} \quad (7.2)$$

generiert, wobei P_{ij} für die räumliche Plakette steht und die räumlichen Linkvariablen U_i diskretisierte farbmagnetische Felder darstellen. Die farbelektrischen Felder sind über die Relation

$$\frac{\partial U_i(x)}{\partial t} = iE_i(x)U_i(x) \quad \text{und} \quad E_i = E_i^a T^a \quad (7.3)$$

definiert. Die Funktion G beschreibt das Gauß'sche Gesetz und lautet:

$$G(t, \mathbf{x}) = \sum_i \left[E_i(t, \mathbf{x}) - U_{-i}(t, \mathbf{x}) E_i(t, \mathbf{x}) U_{-i}^\dagger(t, \mathbf{x}) \right] \quad . \quad (7.4)$$

Dabei wird für die modifizierte Gitterkopplung β als Proportionalitätsfaktor folgender Ausdruck verwendet:

$$\beta = \frac{2N}{ag^2T} \quad . \quad (7.5)$$

N beschreibt hier im Weiteren die räumliche Ausdehnung des Gitters und ist nicht zu verwechseln mit der Anzahl der Farbfreiheitsgrade, welche im Folgenden auf $N_c = 3$ gesetzt sind.

7.1.2 Thermalisierungsphase und numerische Umsetzung

Wie zuvor beschrieben, baut die Erzeugung der Feldkonfigurationen auf den unmittelbar vorangegangenen auf. Jede Feldkonfiguration generiert einen Datenpunkt, allerdings ist für die Anfangskonfigurationen nicht gewährleistet, dass die Datenpunkte in der Nähe des Gleichgewichts liegen. Um dem Einfluss dieses Effekts vorzubeugen, werden die ersten Messungen, die als Thermalisierungsphase bezeichnet werden, nicht berücksichtigt. Für die hier vorgestellten Simulationen, welche sich auf eine klassische Yang-Mills Theorie beschränken, wird eine verbesserte Version [42] des Heatbath-Algorithmus [43, 44] verwendet. Für die klassischen Gitter-Eichsimulationen wurde Gebrauch von QDP++, einer C++ Implementierung des QDP (QCD Data Parallel) *Interfaces*, gemacht [45, 46]. QDP++ bietet eine Programmierumgebung für Gitter-Eichtheorien, in der sowohl Datentypen als auch Routinen auf die mathematischen Gegebenheiten von Gitter-Eichtheorien abgestimmt sind. So werden Operationen unterstützt, die Matrizen, Vektoren, komplexe Ausdrücke und Tensorprodukte von Matrizen beinhalten, was die Berechnung von Propagatoren erlaubt.

7.2 Imaginärteil der statischen Echtzeit-Potentiale

Den Erwartungen aus den analytischen Ergebnissen entsprechend tritt bei den klassischen Gitter-Eichsimulationen lediglich der Imaginärteil des Potentials auf, der formell eine klassische Struktur besitzt. Es wurde sowohl über die Gitter-Ausrichtungen als auch über die Schleifenorientierungen gemittelt. Es liegen statistische Ensembles vor, bei dem jeder Ensemble-Repräsentant eine unabhängige Monte-Carlo-Simulation für sich ist. Zuerst werden die Ergebnisse für das Singulett-Potential vorgestellt, welche sich mit den Messungen in [6] vergleichen lassen, aber mit anderen Gitter-Bedingungen durchgeführt wurden. Insbesondere wird das Verhalten für große Zeiten betrachtet. Danach wird die Simulation des Oktett-Potentials dargestellt und mit den Ergebnissen des Singulett-Potentials verglichen. Eine Übersicht der verwendeten Parameter ist im Anhang A.4 zu finden.

7.2.1 Singulett-Potential

In Anlehnung an die analytische Herangehensweise, wird das Potential anhand einer diskretisierten Wilson-Schleife in Minkowski-Zeit definiert. Die klassische Definition des Singulett-Potentials lautet daher:

$$V_{cl}(t, r) \equiv \frac{i\Delta_t C_{cl}(t, r)}{C_{cl}(t, r)} . \quad (7.6)$$

Der klassische Korrelator ist dabei definiert als

$$C_{cl}(t, r) = \frac{1}{N_c} \text{Tr} [W(t, -\frac{r}{2}, \frac{r}{2}) W(0, \frac{r}{2}, -\frac{r}{2})] , \quad (7.7)$$

wobei die Wilson-Linien über die räumlichen Linkvariablen definiert sind und die zeitlichen Wilson-Linien aufgrund der temporalen Eichung verschwinden. Die Wilson-Schleife verläuft entlang der kürzesten Trajektorie r , welche die räumliche Ausdehnung definiert. Für die zeitliche Entwicklung wird der Differenzenquotient verwendet,

$$\Delta_t C_{cl}(t, r) = \frac{C_{cl}(t, r) - C_{cl}(t - \delta_t, r)}{\delta_t} , \quad (7.8)$$

mit dem in der Simulation gewählten Zeitschritt $\delta_t = 0,025$. Zur Veranschaulichung wird der Verlauf eines typischen Korrelators und dessen Zeitentwicklung in Abbildung 7.1 aufgezeichnet.

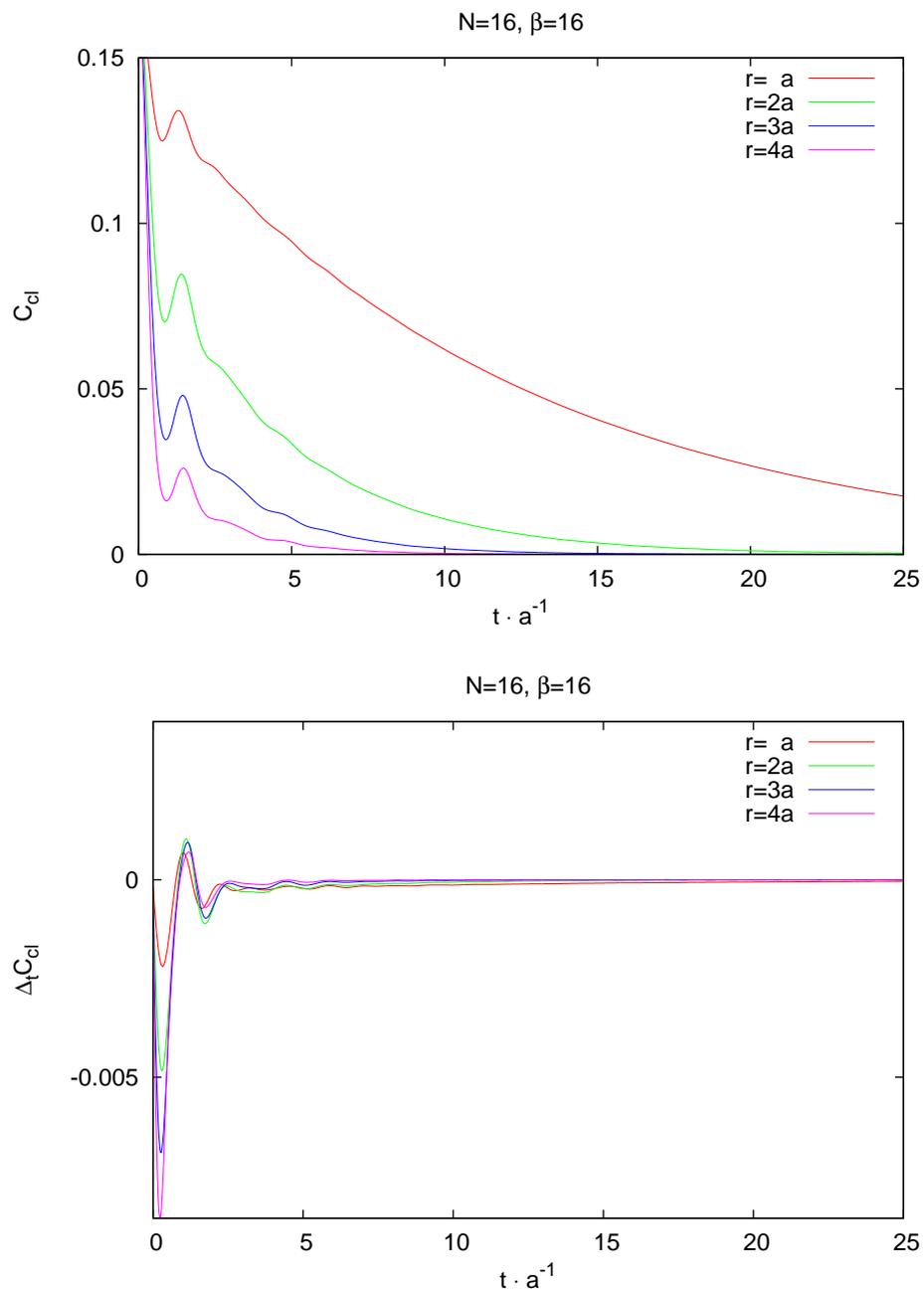


Abbildung 7.1: Der Singulett-Korrelator (oben) und die Zeitentwicklung des Singulett-Korrelators (unten) für die Abstände $r = a, 2a, 3a$ und $4a$.

Für das statische Echtzeit-Singulett-Potential liegt ein rein imaginäres Ergebnis vor, welches in Abbildung 7.2 gezeigt ist.

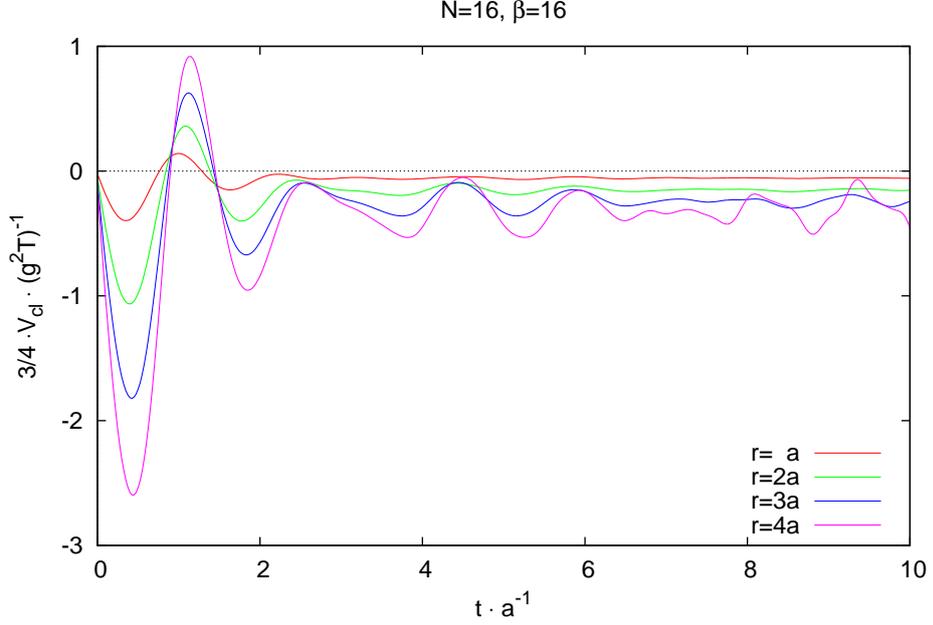


Abbildung 7.2: Das Singulettpotential für die Abstände $r = a, 2a, 3a$ und $4a$. Mit zunehmendem Abstand nimmt der statistische Fehler rapide zu, was eine Betrachtung von größeren Abständen erschwert. Um die Vergleichbarkeit mit den Messungen aus [6] zu gewährleisten, wurde das Potential entsprechend skaliert.

Qualitativ ist zu beobachten, dass der Imaginärteil für große Zeiten nicht verschwindet und sich seine Amplitude mit zunehmendem Abstand r vergrößert. Allerdings ist zu bemerken, dass für größer werdende Abstände der statistische Fehler rapide zunimmt, was die Betrachtung von noch größeren Abständen erschwert. Für große Zeiten wurden die Ergebnisse in Tabelle 7.1 gefunden.

Messung	N	β	Konf.	$r = a$	$r = 2a$	$r = 3a$	$r = 4a$
Singulett	16^3	16	300	-0.056(1)	-0.150(4)	-0.243(7)	-0.347(19)
simuliert [6]	12^3	16	200	-0.060(2)	-0.156(8)	-0.246(26)	-0.319(56)
analytisch [6]	∞	16	-	-0.0601	-0.1145	-0.1507	-0.1737

Tabelle 7.1: Überblick der Ergebnisse des Singulett-Imaginärteils im Grenzfall von großen Zeiten für die Abstände $r = a, 2a, 3a$ und $4a$. In der ersten Zeile sind die hier gemessenen Werte aufgeführt. Die folgenden Zeilen zeigen zum Vergleich, die in [6] klassisch simulierten bzw. störungstheoretisch gewonnenen Werte.

In [6] wurden Ergebnisse aus analytischen Rechnungen und Simulationen verglichen. Es liegt eine Übereinstimmung im Verlauf der Graphen 7.3 vor. Es ist jedoch eine Vergrößerung der Amplitude der Simulationen gegenüber den analytischen Ergebnissen erkennbar, was auf nicht-perturbative Effekte und Korrekturen von höheren Ordnungen zurückzuführen ist. Für größer werdende Abstände nimmt der numerische Aufwand der Simulationen zu, was zu einer Vergrößerung des statischen Rauschens bei größeren Zeiten führt.

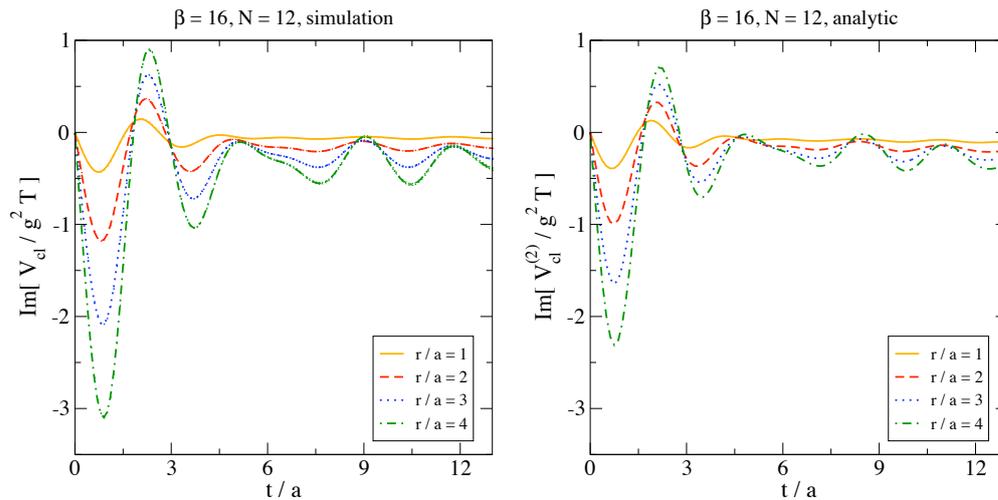


Abbildung 7.3: Vergleich zwischen klassischer Simulation und analytischer Betrachtung [34] für die Abstände $r = a, 2a, 3a$ und $4a$. Nicht-perturbative Effekte und Korrekturen aus höheren Ordnungen führen zu einer Vergrößerung der Amplitude bei den simulierten Ergebnissen. β wurde jeweils zu 16 gewählt und die klassische Simulation bei einer Gittergröße von $N = 12$ durchgeführt.

7.2.2 Oktett-Potential

Analog zu (7.6) wird das Oktett-Potential definiert durch

$$V_{8,cl}(t, r) \equiv \frac{i\Delta_t C_{8,cl}(t, r)}{C_{8,cl}(t, r)} \quad , \quad (7.9)$$

mit dem Korrelator

$$C_{8,cl}(t, r) = \frac{1}{N_c} \text{Tr} \left[W(t, 0, \frac{r}{2}) B(t, 0) W(t, -\frac{r}{2}, 0) \right. \\ \left. W(0, 0, -\frac{r}{2}) B(t, 0) W(0, \frac{r}{2}, 0) \right] \quad , \quad (7.10)$$

wodurch wiederum eine räumliche Ausdehnung von r erzielt wird. Es wird die gleiche Zeitableitung wie in (7.8) betrachtet. Die Diskretisierung der Magnetfelder erfolgt durch die Kleeblatt (*clover leaf*) Definitionen aus [23]. Dabei wird zunächst die Definition des Magnetfeldes (5.39) und die folgende Relation zwischen der Plakette (6.11) und dem Feldstärketensor ausgenutzt:

$$U_{\mu\nu}(x) = \exp \left\{ ia^2 F_{\mu\nu} \right\} \quad . \quad (7.11)$$

Damit erhält das Magnetfeld die folgende Form:

$$B_i(x) = \frac{1}{2ia^2} \epsilon_{ijk} \Pi_{jk}(x) \quad , \quad (7.12)$$

wobei $\Pi_{jk}(x)$ die Summe der vier Plaketten beschreibt, deren Anordnung einem Kleeblatt ähnelt (siehe Abb. 7.4). Die Definition der räumlichen Kleeblätter lautet:

$$\Pi_{jk}(x) = \frac{1}{4} (U_{jk}(x) + U_{-jk}(x) + U_{-j-k}(x) + U_{j-k}(x)) \quad . \quad (7.13)$$

Die diskretisierte Version der durch Magnetfelder unterbrochenen Wilson-Schleife ist in Abbildung 7.4 illustriert.

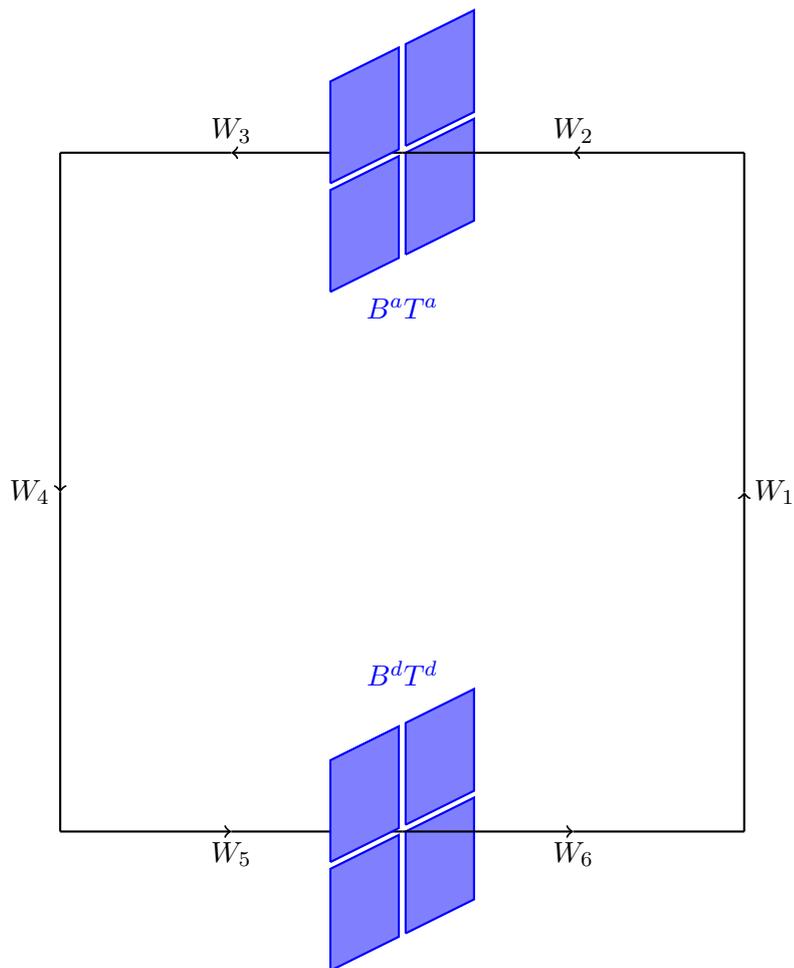


Abbildung 7.4: Die diskretisierte Wilson-Schleife, die zur numerischen Betrachtung des statischen Echtzeit-Oktett-Potentials verwendet wird. Die Magnetfelder werden durch vier Plaketten beschrieben, die wie ein Kleeblatt aneinandergereiht sind.

Sowohl Korrelator als auch Zeitentwicklung (Abb. 7.5) weisen Ähnlichkeiten zu den in Kapitel 7.2.1 vorgestellten Äquivalenten auf.

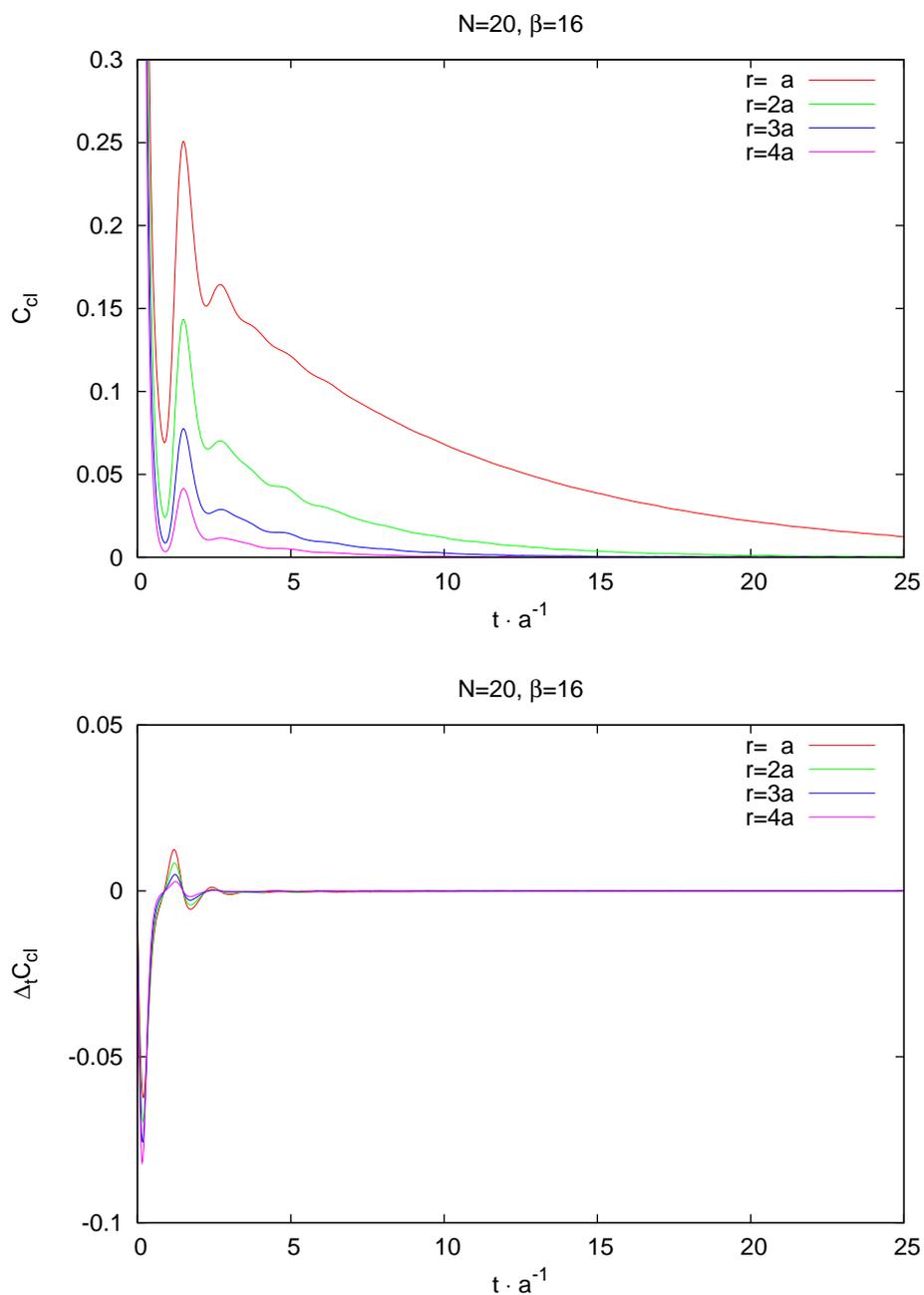


Abbildung 7.5: Der Oktett-Korrelator (oben) und die Zeitentwicklung des Oktett-Korrelators (unten) für die Abstände $r = a, 2a, 3a$ und $4a$.

Das Potential ist in Abbildung 7.6 aufgezeigt. Der Verlauf ist identisch, aber für kleine r tritt eine Vergrößerung der Amplitude auf.

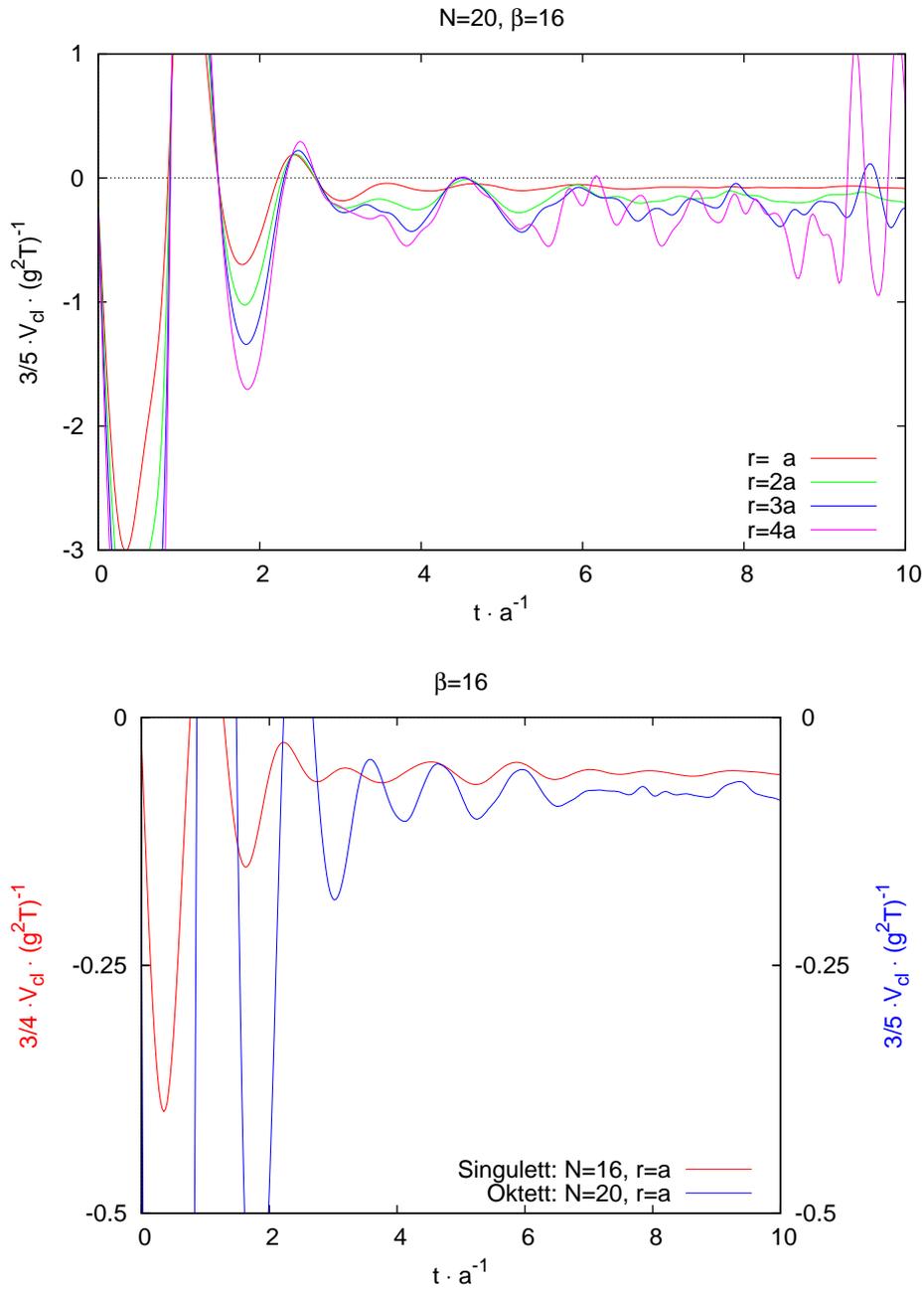


Abbildung 7.6: Das Oktettpotential für die Abstände $r = a, 2a, 3a$ und $4a$. Mit zunehmendem Abstand nimmt der statistische Fehler rapide zu, was eine Betrachtung von größeren Abständen erschwert. Um die Vergleichbarkeit mit dem Singulett Potential zu gewährleisten, wurde das Potential entsprechend skaliert. Der Verlauf ähnelt dem des Singulett-Potentials, der erste Wert weicht auffällig vom Singulett-Potential ab.

Zum Vergleich werden die Ergebnisse aus den Oktett-Simulationen mit denen aus Kap. 7.2.1 in Tabelle 7.2 aufgelistet.

Messung	N	β	Konf.	$r = a$	$r = 2a$	$r = 3a$	$r = 4a$
Singulett	16^3	16	300	-0.056(1)	-0.150(4)	-0.243(7)	-0.347(19)
Oktett	20^3	16	300	-0.076(4)	-0.153(5)	-0.230(12)	-0.298(27)

Tabelle 7.2: Vergleich der Ergebnisse von Singulett und Oktett-Imaginärteil im Grenzfall von großen Zeiten für die Abstände $r = a, 2a, 3a$ und $4a$. In der ersten Zeile sind die in Kap. 7.2.1 gemessenen Werte aufgeführt. Die zweite Zeile beschreibt die Ergebnisse des Oktett-Potentials.

Es ist ein deutlicher Anstieg des Wertes für den kleinsten Abstand a zu erkennen. Für größer werdende Abstände nimmt der Einfluss immer weiter ab und es werden sogar Werte unterhalb des Singulett-Anteils gemessen. Dies lässt sich dadurch erklären, dass der Prozess des thermischen Aufbrechens zwar Einfluss auf die Verbreiterung der thermischen Zerfallsbreite nimmt, aber auf kurze Distanzen beschränkt ist. Zudem steigt der numerische Aufwand mit Vergrößerung des Abstandes an und verursacht eine Verstärkung des statischen Rauschens. In Abbildung 7.7 werden die beiden Verläufe der Potentiale für große Zeiten verglichen.

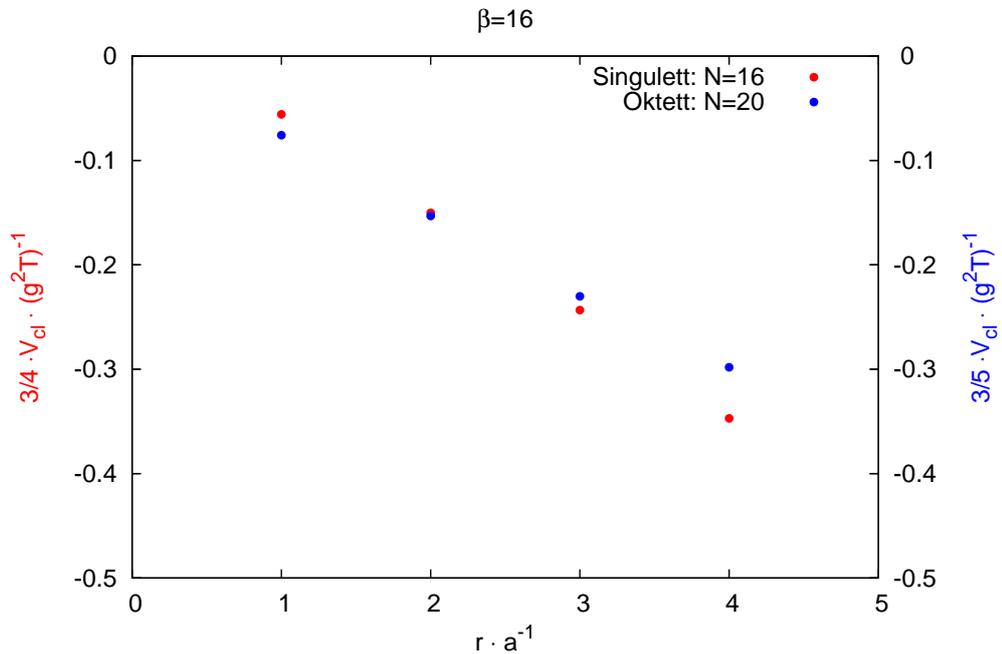


Abbildung 7.7: Vergleich der beiden Potentiale, aufgetragen gegenüber dem Abstand. Das Singulett-Potential weist einen stärkeren linearen Abfall als das Oktett-Potential auf.

8 Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassung

Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt in der Untersuchung der statischen Potentiale für schwere Quarkonia vor einem thermischen Hintergrund im Echtzeit-Formalismus. Zu Beginn der Arbeit werden die relevanten Grundlagen für nicht-abelsche Eichtheorien gegeben. Anschließend erfolgt eine Einordnung in die Physik der schweren Quarkonia, wobei u.a. der Zerfall der gebundenen Zustände und das Potential der starken Wechselwirkung thematisiert werden. Kapitel 4 trägt die für diese Arbeit notwendigen Definitionen und Formalismen der thermischen Feldtheorie, wie beispielsweise den Echtzeit-Formalismus, zusammen. In Kapitel 5.1 wird das Singulett-Potential hergeleitet, welches aufgrund der schweren Quarkmassen in einer nicht-relativistischen Schrödinger-Gleichung verwendet und damit durch die Zeitentwicklung des mesonischen Korrelators in Wilson-Schleifen-Form ausgedrückt werden kann. Neben dem reellen Teil, der auf die Debye-Abschirmung zurückzuführen ist, tritt ein Imaginärteil auf, welcher aus der Landau-Dämpfung hervorgeht.

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{g^2 C_f}{4\pi} \left[m_D + \frac{e^{-m_D r}}{r} \right] - i \frac{g^2 C_f}{2\pi\beta} \int_0^\infty \frac{dz z}{(z^2 + 1)^2} \left[1 - \frac{\sin(m_D r z)}{m_D r z} \right] .$$

Bei verschwindenden Temperaturen weist das statische Potential diesen Beitrag nicht auf. Es handelt sich bei dem Imaginärteil also um einen rein thermischen Effekt, der zur Zerfallsbreite schwerer Quarkonia beiträgt. Bei kurzen Abständen bricht der Farbsingulett-Zustand in ein Oktett auf, was ebenfalls zur Verbreiterung des Quarkonia-Resonanzpeaks führt. Es wurde in Kapitel 5.2 ein Korrelator vorgestellt, der diesen Mechanismus miteinbezieht. Dieser berücksichtigt eine Modifikation der Wilson-Schleife, deren räumliche Wilson-Linien durch lokale Operatoren, in diesem Fall Magnetfelder, unterbrochen werden. Es treten sowohl im Realteil, als auch im Imaginärteil nicht-triviale analytische Strukturen auf.

Durch den formal klassischen Charakter des Imaginärteils, lässt sich dieser anhand von Gitter-Eichsimulationen bestimmen. Kapitel 6 gibt eine kurze Einführung in die Grundlagen des Gitterformalismus. In Kapitel 7 wurde das Auftreten des Imaginärteils bei großen Zeiten in beiden Potentialen bestätigt.

Die folgenden Werte wurden in den Simulationen bestimmt:

Messung	N	β	Konf.	$r = a$	$r = 2a$	$r = 3a$	$r = 4a$
Singulett	16^3	16	300	-0.056(1)	-0.150(4)	-0.243(7)	-0.347(19)
Oktett	20^3	16	300	-0.076(4)	-0.153(5)	-0.230(12)	-0.298(27)

Es wurde beim Oktett-Potential eine Verstärkung des Effekts für kleine Abstände beobachtet. Mit größer werdenden Abständen nehmen die Potentiale ähnliche Werte an. Dies wird in Abbildung 7.7 ersichtlich. Dadurch konnte in dieser Arbeit gezeigt werden, dass der Prozess des thermischen Aufbrechens in ein Oktett-Potential bei der Betrachtung des Dissoziationsverhaltens schwerer Quarkonia, insbesondere für kurze Abstände, nicht vernachlässigt werden kann.

Ausblick

Um die im Oktett-Korrelator auftretenden nicht-trivialen Strukturen besser verstehen zu können, ist die analytische Betrachtung des Oktett-Potentials interessant, was aber durch die zusätzlichen Eichfelder deutlich erschwert ist (siehe Kapitel 5.2). Zudem könnten höhere Ordnungen des Singulett-Potentials betrachtet werden, um den Einfluss der nicht-perturbativen Effekte deutlicher herauszustellen, welche in den Gitter-Eichsimulationen sichtbar wurden. Durch Verbesserung der numerischen Eingangswerten, d.h. Vergrößerung des Gitters und Verfeinerung des Gitterabstands, könnte zum einen die Untersuchung des Verhaltens der Potentiale für große Abstände gewährleistet und zum anderen den in Abbildung 7.7 vorgestellten Verlauf präzisiert werden.

A Anhang

A.1 Notation

In der gesamten Arbeit werden alle Größen in natürlichen Einheiten $\hbar = c = k_B = 1$ ausgedrückt, wobei \hbar für die Planck-Konstante, c für die Lichtgeschwindigkeit und k_B für die Boltzmann-Konstante stehen.

Summen werden nicht explizit ausgeschrieben. Treten identische Indizes mehrfach im gleichen Produkt auf, muss die Einstein'sche Summenkonvention berücksichtigt werden. Ausgegangen von der Minkowski-Raumzeit werden räumliche Indizes durch lateinische Buchstaben ausgedrückt. Griechische Buchstaben indizieren die Komponenten der kovarianten bzw. kontravarianten Raumzeit. Es wird folgende Metrik verwendet:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (\text{A.1})$$

Ein Minkowski-Vierervektor wird dargestellt durch $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$. Die analytische Fortsetzung von reeller zu imaginärer Zeit ($t \rightarrow i\tau$) ergibt für die zeitlichen Komponenten $x_0 \rightarrow -ix_4$ und entspricht dem Übergang von Minkowski-Metrik zur euklidischen Metrik $(t^2 - \mathbf{x}^2) \rightarrow -(\tau^2 + \mathbf{x}^2)$ durch Wick-Rotation, wobei τ und x_4 reell sind [31, Kapitel 2]. Das Skalarprodukt ist definiert durch:

$$x \cdot y = x_\mu y^\mu = x^0 y^0 - \mathbf{xy} . \quad (\text{A.2})$$

γ -Matrizen

Die γ -Matrizen werden anhand der Pauli-Matrizen σ^i aus Kapitel A.2.1 definiert. Sie haben die Form:

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} , \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} ,$$

mit $i = 0, \dots, 3$ und es gilt [31]:

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 . \quad (\text{A.3})$$

A.2 Generatoren

Die Symmetriegruppe $SU(N)$ wird durch spurlose $N \times N$ -Matrizen T^a generiert, welche der Kommutatorrelation der entsprechenden Lie-Algebra genügen

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c \quad (\text{A.4})$$

und

$$T^a = (T^a)^\dagger \quad (\text{A.5})$$

erfüllen, wobei f^{abc} die jeweiligen total-antisymmetrischen Strukturkonstanten darstellen. So können die Generatoren der $SU(2)$ durch die Pauli-Matrizen repräsentiert werden, während die Gell-Mann-Matrizen als Generatoren der $SU(3)$ fungieren.

A.2.1 Pauli-Matrizen

Für $SU(2)$ liegen drei Gruppenparameter vor und es gilt für die Generatoren in der fundamentalen Darstellung:

$$T^a = \frac{1}{2}\sigma^a \quad , \quad a = 1, 2, 3 \quad . \quad (\text{A.6})$$

Die Pauli-Matrizen sind standardmäßig definiert als:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

A.2.2 Gell-Mann-Matrizen

Analog zur $SU(2)$ unterliegen die Generatoren der $SU(3)$ der Relation:

$$T^a = \frac{1}{2}\lambda^a \quad , \quad a = 1, \dots, 8 \quad . \quad (\text{A.7})$$

Diese Bedingung erfüllen die Gell-Mann-Matrizen, die folgenderweise ausgedrückt werden können [16]:

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \\ \lambda^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \\ \lambda^7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad . \end{aligned}$$

A.2.3 Nützliche Identitäten

Nachstehend werden Identitäten für Generatoren in der fundamentalen Darstellung aufgeführt [47]:

$$\begin{aligned}
T_{ij}^a T_{kl}^a &= \frac{1}{2} \left(\delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{N_c} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) , \\
\text{Tr } T^a T^b &= \frac{1}{2} \delta^{ab} , \\
\text{Tr } T^a T^b T^c &= \frac{1}{4} \left(d^{abc} + i f^{abc} \right) , \\
\text{Tr } T^a T^b T^c T^d &= \frac{1}{4 N_c} \delta^{ab} \delta^{cd} + \frac{1}{8} \left[d^{abs} d^{c ds} - f^{abs} f^{c ds} + i \left(d^{abs} f^{c ds} + f^{abs} d^{c ds} \right) \right] , \\
\text{Tr } T^a T^a T^b T^c &= \frac{N_c^2 - 1}{4 N_c} \delta^{bc} = \text{Tr } T^a T^a T^c T^b , \\
\text{Tr } T^a T^b T^a T^c &= -\frac{1}{4 N_c} \delta^{bc} = \text{Tr } T^a T^c T^a T^b , \\
\text{Tr } T^a T^a T^b &= 0 , \\
\text{Tr } \delta^{aa} &= N_c .
\end{aligned}$$

In adjungierter Darstellung, die definiert ist durch $(F^a)_{bc} = i f_{abc}$, gilt:

$$\begin{aligned}
\text{Tr } F^a F^b &= N_c \delta^{ab} , \\
\text{Tr } F^a F^b F^c &= i \frac{N_c}{2} f^{abc} , \\
\text{Tr } F^a F^b F^c F^d &= \delta^{ab} \delta^{cd} + \delta^{ad} \delta^{bc} + \frac{N_c}{4} \left(d^{abs} d^{c ds} - d^{acs} d^{b ds} + d^{ads} d^{b cs} \right) , \\
\text{Tr } F^a F^a F^b F^c &= N_c^2 \delta^{bc} = \text{Tr } F^a F^a F^c F^b , \\
\text{Tr } F^a F^b F^a F^c &= \frac{N_c^2}{2} \delta^{bc} = \text{Tr } F^a F^c F^a F^b , \\
\text{Tr } F^a F^a F^b &= 0 , \\
\text{Tr } \delta^{aa} &= N_c^2 - 1 .
\end{aligned}$$

Neben der Jacobi-Identität

$$f^{ade} f^{bcd} + f^{bde} f^{cad} + f^{cde} f^{abd} = 0 \quad (\text{A.8})$$

ergeben sich weitere Identitäten sowohl für die antisymmetrischen Strukturkonstanten f^{abc} als auch für die symmetrischen d^{abc} :

$$\begin{aligned}
f^{abc} &= -f^{bac} \quad (\text{antisymmetrisch unter Indexvertauschung}), \\
d^{abc} &= d^{bac} \quad (\text{symmetrisch unter Indexvertauschung}), \\
f^{aab} &= d^{aac} = 0 , \\
f^{acd} f^{bcd} &= N_c \delta^{ab} , \\
f^{acd} d^{bcd} &= 0 , \\
d^{acd} d^{bcd} &= \frac{N_c^2 - 4}{N_c} \delta^{ab} .
\end{aligned}$$

A.3 Räumliche Integrale zur Berechnung der statischen Potentiale

Für die Berechnung der Potentiale werden folgende Integrale verwendet:

$$\int_0^{\frac{r}{2}} dx_3 \int_0^{\frac{r}{2}} dy_3 e^{-ik_3 x_3} e^{ik_3 y_3} = \frac{2}{k_3^2} \left(1 - \cos \left(k_3 \frac{r}{2} \right) \right) \quad (\text{A.9})$$

$$\int_0^{-\frac{r}{2}} dx_3 \int_0^{\frac{r}{2}} dy_3 e^{-ik_3 x_3} e^{ik_3 y_3} = \frac{1}{k_3^2} \left(e^{ik_3 r} - 2e^{ik_3 \frac{r}{2}} + 1 \right)$$

$$\stackrel{\int dk_3}{=} \frac{1}{k_3^2} \left(\cos(k_3 r) - 2 \cos \left(k_3 \frac{r}{2} \right) + 1 \right) \quad , \quad (\text{A.10})$$

wobei die Exponentialfunktionen nur umgeschrieben werden können, wenn ein Integral über k_3 mit symmetrischen Grenzen vorliegt.

A.4 Übersicht der Parameter für die durchgeführten Echtzeit-Simulationen

Hier wird ein Überblick über die in der Simulation verwendeten Parameter gegeben.

Simulation	Singulett	Oktett
Gittergröße N	16^3	20^3
Gitterkopplung β	16	16
Zeitschritte δ_t	0.025	0.025
Anzahl der Heatbathschritte	200	200
Anzahl Thermalisierungsschritte	150	150
Messungsschritte	2/2048	2/2048
Ensemblegröße	300	300
r_{max}	4	4

A.5 Singulett-Diagramme

Zur Veranschaulichung werden in diesem Abschnitt die Diagramme, die Beiträge zum Singulett-Potential (Kapitel 5.1) liefern, abgebildet.

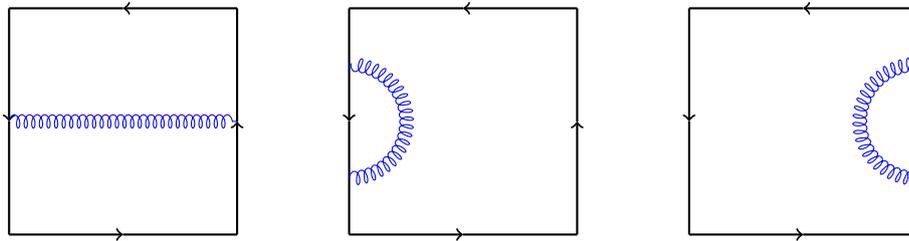


Abbildung A.1: Die rein zeitlichen Beiträge der Wilson-Schleife.

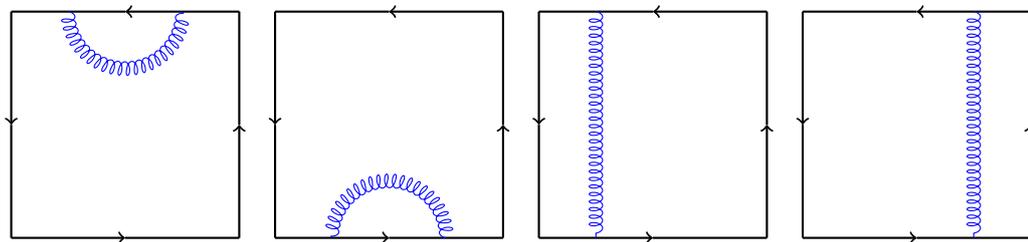


Abbildung A.2: Die rein räumlichen Beiträge der Wilson-Schleife.

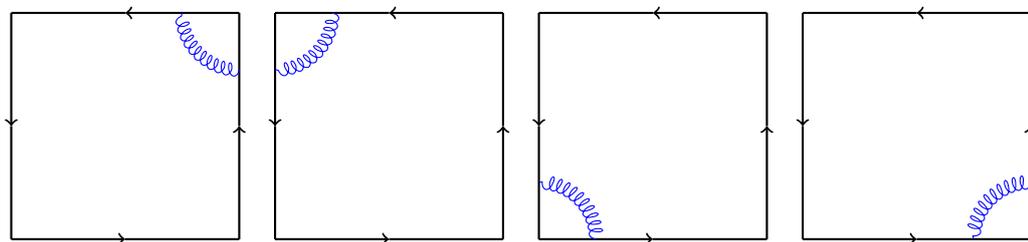


Abbildung A.3: Die zeitlich und räumlich gemischten Terme der Wilson-Schleife.

A.6 Übersicht der Diagramme für das Verhalten bei großen Zeiten

A.6.1 Singulett

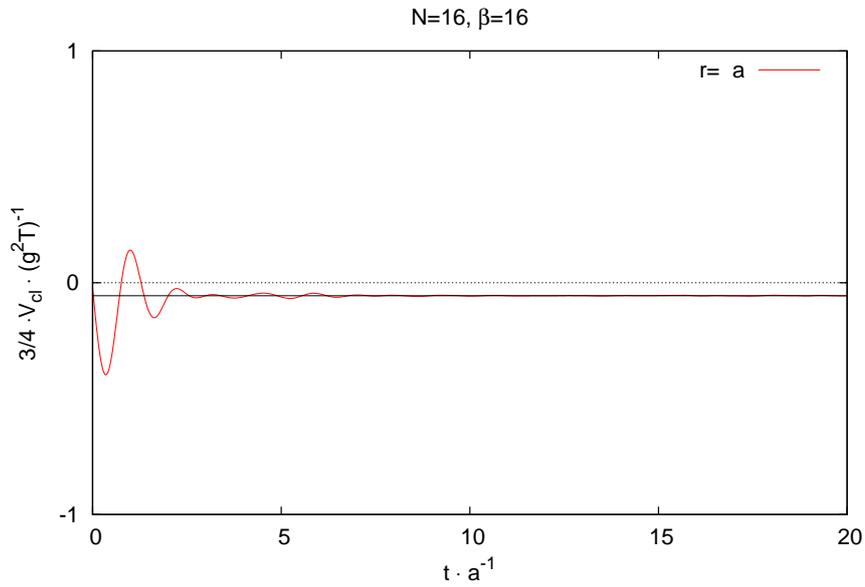


Abbildung A.4: Singulettpotential: Verhalten bei großen Zeiten für Abstand $r = a$ mit $V(\infty, a) = -0.056(1)$.

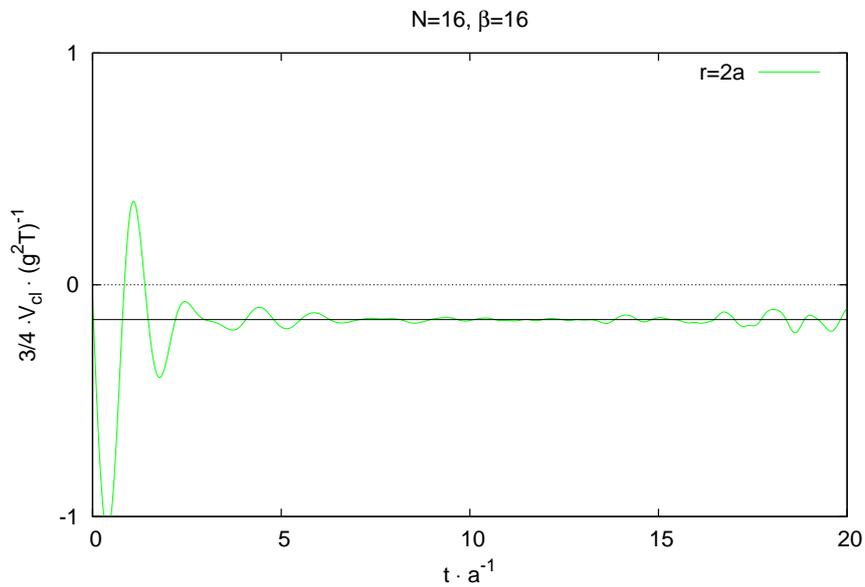


Abbildung A.5: Singulettpotential: Verhalten bei großen Zeiten für Abstand $r = 2a$ mit $V(\infty, 2a) = -0.150(4)$.

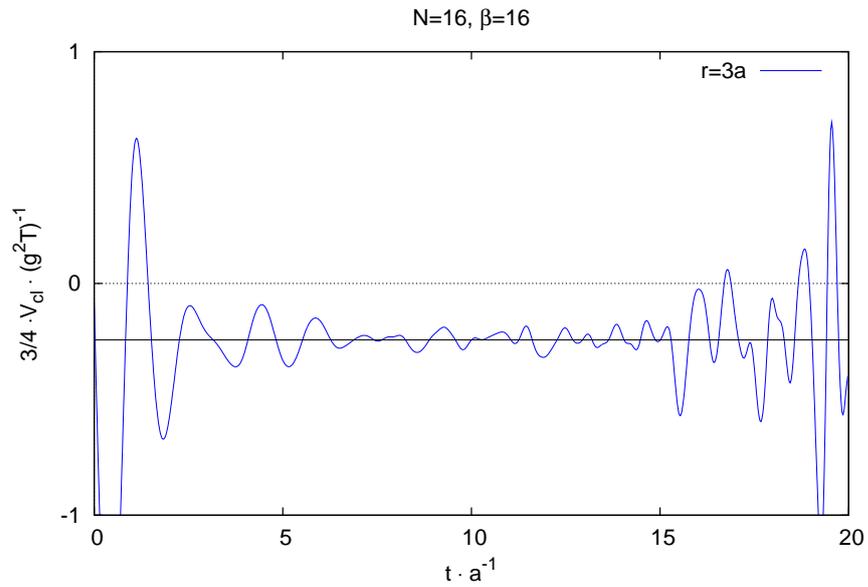


Abbildung A.6: Singulettpotential: Verhalten bei großen Zeiten für Abstand $r = 3a$ mit $V(\infty, 3a) = -0.243(7)$.

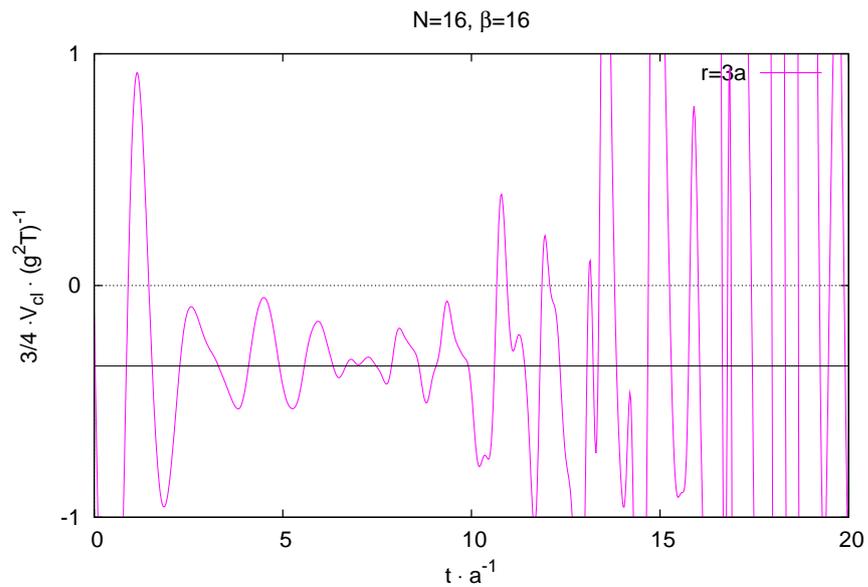


Abbildung A.7: Singulettpotential: Verhalten bei großen Zeiten für Abstand $r = 4a$ mit $V(\infty, 4a) = -0.347(19)$.

A.6.2 Oktett

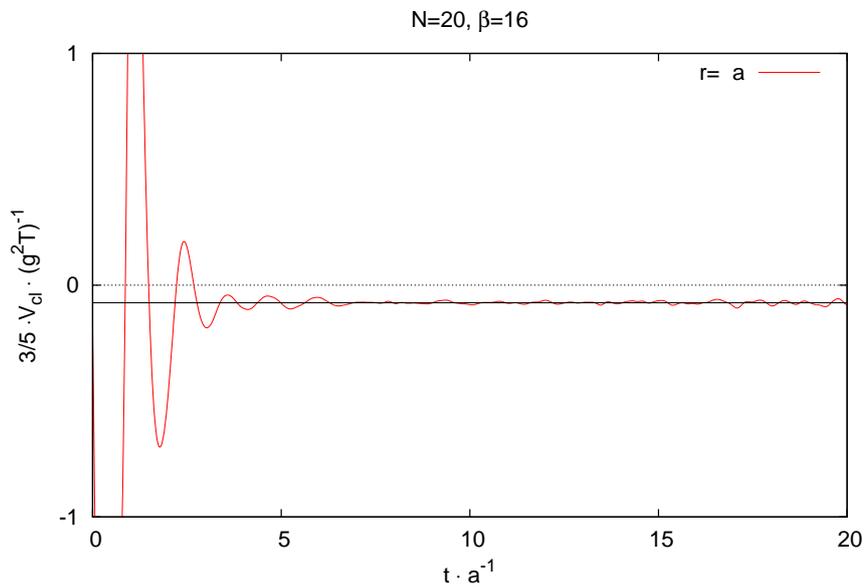


Abbildung A.8: Oktettpotential: Verhalten bei großen Zeiten für Abstand $r = 1a$ mit $V_8(\infty, a) = -0.076(4)$.

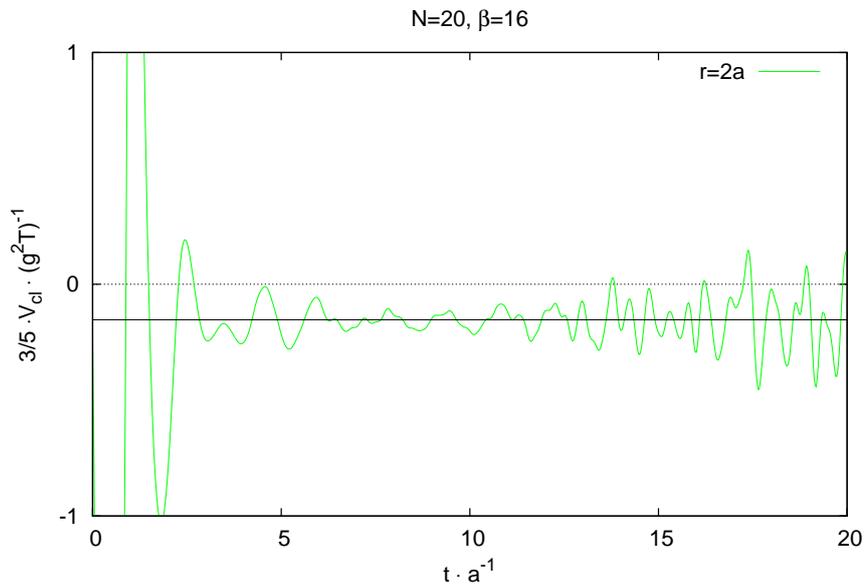


Abbildung A.9: Oktettpotential: Verhalten bei großen Zeiten für Abstand $r = 2a$ mit $V_8(\infty, 2a) = -0.153(5)$.

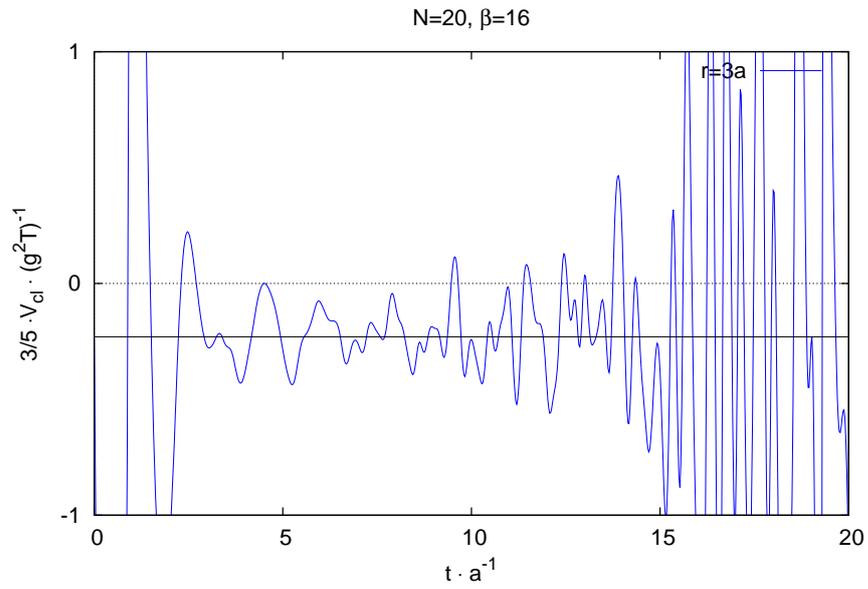


Abbildung A.10: Oktettpotential: Verhalten bei großen Zeiten für Abstand $r = 3a$ mit $V_8(\infty, 3a) = -0.230(12)$.

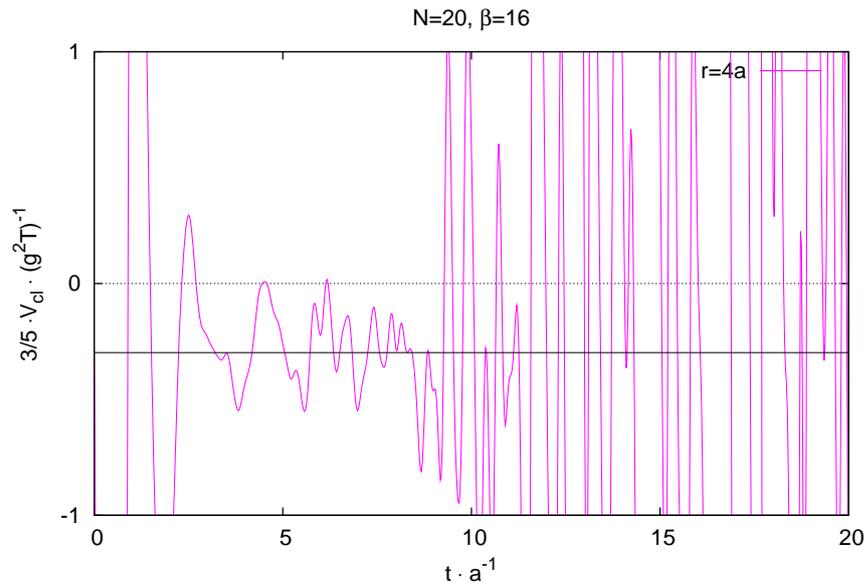


Abbildung A.11: Oktettpotential: Verhalten bei großen Zeiten für Abstand $r = 4a$ mit $V_8(\infty, 4a) = -0.298(27)$.

Literaturverzeichnis

- [1] AUBERT, J. et al.: *Experimental Observation of a Heavy Particle* J. Phys. Rev. Lett., 33(23):1404–1406, 1974.
- [2] AUGUSTIN, J.-E. et al.: *Discovery of a Narrow Resonance in e^+e^- Annihilation*. Phys. Rev. Lett., 33(23):1406–1408, 1974.
- [3] HERB, S. et al.: *Observation of a Dimuon Resonance at 9.5 GeV in 400-GeV Proton-Nucleus Collisions*. Phys. Rev. Lett., 39(5):252–255, 1977.
- [4] ABE, F. et al.: *Observation of Top Quark Production in $p\bar{p}$ Collisions with the Collider Detector at Fermilab*. Phys. Rev. Lett., 74(14), 1995.
- [5] BRAMBILLA, N., GHIGLIERI, J., PETRECKZY, P. und VAIRO, A.: *Static quark-antiquark pairs at finite temperature*. Phys. Rev. D, 78(014017), 2008. [arXiv:hep-ph/0804.0993].
- [6] LAINE, M., PHILIPSEN, O. und TASSLER, M.: *Thermal imaginary part of a real-time static potential from classical lattice gauge theory simulations*. JHEP, 0709:066, 2007. [arXiv:hep-lat/0707.2458v2].
- [7] LAINE, M., PHILIPSEN, O., ROMATSCHKE, P. und TASSLER, M.: *Real-time static potential in hot QCD*. JHEP, 0703(054), 2007. [arXiv:hep-ph/0611300].
- [8] PESKIN, M. und SCHROEDER, D.: *An Introduction to Quantum Fields Theory*. Westview Press, USA, 1995.
- [9] SREDNICKI, M.: *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 2007.
- [10] GELL-MANN, M.: *Symmetries of Baryons and Mesons*. Phys. Rev., (125):1067–1084, 1962.
- [11] NE'EMAN, Y.: *Deviations of strong interactions from a gauge invariance*. Nucl. Phys., (26):222–229, 1961.
- [12] ZWEIG, G.: *An $SU(3)$ model for strong interaction symmetry and its breaking*. CERN-TH-401, CERN-TH-412, 1980. Publiziert in „Developments in the Quark Theory of Hadrons“. Vol. 1. Hrsg. D. Lichtenberg und S. Rosen. Nonantum, Mass., Hadronic Press.
- [13] GELL-MANN, M.: *A schematic model of baryons and mesons*. Phys. Lett, (8):214–215, 1964.
- [14] 'T HOOFT, G.: *Renormalization of massless Yang-Mills fields*. Nucl. Phys., B(33):173–199, 1971.

- [15] RAMOND, P.: *Field Theory: A Modern Primer*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1990.
- [16] CHENG, T.-P. und LI, L.-F.: *Gauge theory of elementary particle physics*. Oxford University Press, New York, 1984.
- [17] YANG, C.-N. und MILLS, R.: *Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance*. Phys. Rev., 96:191–195, 1954.
- [18] APPELQUIST, T. und POLITZER, H. D.: *Heavy quarks and long-lived hadrons*. Phys. Rev. D, 12(5), 1975.
- [19] QUIGG, C.: *The Top Quark and Higgs Boson at Hadron Colliders*. Beitrag zur MuMu97, 1998. [arXiv:hep-ph/9802320v1].
- [20] PARTRIDGE, R. et al.: *Observation of an η_c Candidate State with Mass $2978 \pm 9\text{MeV}$* . Phys. Rev. Lett., 45(14):1150–1153, 1980.
- [21] KÖPKE, L. und WERMES, N.: *J/ Ψ -Decays*. Phys. Rep., 174(2):67–227, 1989.
- [22] POVH, B. et al.: *Teilchen und Kerne*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 7. Auflage, 2006.
- [23] BALI, G.: *QCD forces and heavy quark bound states*. Phys. Rep., 343, [2008] 2001. [arXiv:hep-ph/0001312v2].
- [24] AMSLER, C. et al.: *Review of Particle Physics*. Phys. Lett. B, 667(1), 2008.
- [25] MATSUI, T. und SATZ, H.: *J/Psi Suppression by Quark-Gluon Plasma Formation*. Phys. Lett. B, 178(416), 1986.
- [26] LAINE, M.: *How to compute the thermal quarkonium spectral function from first principles?* Nuclear Physics A, 820(1-4):25c–32c, 2008. [arXiv:0810.1112].
- [27] LAINE, M.: *A resummed perturbative estimate for the quarkonium spectral function in hot QCD*. JHEP, 0705(028), 2007. [arXiv:hep-ph/0704.1720v2].
- [28] EICHTEN, E. et al.: *Spectrum of Charmed Quark-Antiquark Bound States*. Phys. Rev. Lett., 34(6):369–372, 1974.
- [29] PERKINS, D.: *Introduction to High Energy Physics*. Cambridge University Press, 4. Auflage, 2000.
- [30] BRAMBILLA, N. et al.: *Heavy quarkonium physics*. CERN Yellow Report, (CERN-2005-005), 2005. [arXiv:hep-ph/0412158v2].
- [31] LEBELLAC, M.: *Thermal Field Theory*. Cambridge University Press, 1996. [first paperback edition (with) corrections].
- [32] TASSLER, M.: *Real-Time Techniques For Yang-Mills Plasma*. Doktorarbeit, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, 2009.
- [33] BRAMBILLA, N., PINEDA, A., SOTO, J. und VAIRO, A.: *Effective field theories for heavy quarkonium*. Rev. Mod. Phys., 77(4):1423–1496, 2005. [arXiv:hep-ph/0410047v2].

-
- [34] LAINE, M., PHILIPSEN, O. und TASSLER, M.: *Wilson Loop in Classical Lattice Gauge Theory and Thermal Width of Heavy Quarkonium*. PoSLAT2007:230, 2007. [arXiv:hep-lat/0710.0504v1].
- [35] MONTVAY, I. und MÜNSTER, G.: *Quantum Fields on a Lattice*. Cambridge University Press, 1994.
- [36] TASSLER, M.: *Heavy Quarkonia beyond Deconfinement and Real Time Lattice Simulations*. PoS (Confinement8), (118), 2008. [arXiv:hep-lat/0812.3225].
- [37] BRAMBILLA, N., PINEDA, A., SOTO, J. und VAIRO, A.: *Potential NRQCD: an effective theory for heavy quarkonium*. Nucl. Phys. B, 566(275), 2000. [arXiv:hep-ph/9907240v2].
- [38] WILSON, K.: *Confinement of quarks*. Phys. Rev. D, 10(8):2445–2459, 1974.
- [39] GUPTA, R.: *Introduction to Lattice QCD*. Les Houches “Probing the Standard Model of Particle Interactions”, 1997. [arXiv:hep-lat/9807028v1].
- [40] GRIGORIEV, D. und RUBAKOV, V. A.: *Soliton pair creation at finite temperatures: Numerical study in (1 + 1) dimensions*. Nucl. Phys. B, 299(1):67–78, 1988.
- [41] KOGUT, J. und SUSSKIND, L.: *Hamiltonian formulation of Wilson’s lattice gauge theories*. Phys. Rev. D, 11(2):395–408, 1975.
- [42] KENNEDY, A. und PENDLETON, B.: *Improved heatbath method for Monte Carlo calculations in lattice gauge theories*. Phys. Lett. B, 156(5-6):393–399, 1985.
- [43] CREUTZ, M.: *Monte Carlo study of quantized SU(2) gauge theory*. Phys. Rev. D, 21(8):2308–2315, 1979.
- [44] CABIBBO, N. und MARINARI, E.: *A new method for updating SU(N) matrices in computer simulations of gauge theories*. Phys. Lett. B, 119(4-6):387–390, 1982.
- [45] EDWARDS, R. und RICHARDS, D.: *QDP++ Data Parallel Interface for QCD*. SciDAC Software Coordinating Committee, 2007.
- [46] *QDP++ Primer*, 2003. [www.jlab.org/dgr/qdp_tutorial/qdp_primer.pdf].
- [47] CUTLER, R. und SIVERS, D.: *Quantum-chromodynamic gluon contributions to large- p_T reactions*. Phys. Rev. D, 17(1):196–211.

Danksagung

Den Menschen, die mich während meines Studiums unterstützt haben, werde ich nie genug danken können. Ich werde es an dieser Stelle trotzdem versuchen.

- *Professor Dr. Owe Philipsen*: Danke nicht nur für die interessante und herausfordernde Themenstellung sondern auch für all die Zeit und Mühe, die du für die Betreuung dieser Diplomarbeit aufgebracht hast.
- *Professor Dr. Gernot Münster*: Ich möchte mich für die aufgebrachte Zeit bedanken, die Ihnen die Zweitkorrektur dieser Arbeit einbringt.
- *Marcus Tassler*: Ohne deine vorangegangene Arbeit wäre es vielleicht gar nicht zu dieser Aufgabenstellung gekommen. Danke für deine Hilfestellungen.
- Ein großes “Danke“ an meine Arbeitsgruppe: *Daniel Bieletzki, Thomas Braun, Linus Feldkamp, Janine Hütig, Stefano Lottini, Christopher Pinke, Christian Schäfer, Anja Teuber, Lars Zeidlewicz* und den ehemaligen Mitgliedern *Bastian Brandt, Jens Langelage, Hossein Malekzadeh* und *Marcus Tassler*.
- *Daniel Bieletzki*: Du bist der beste Büronachbar, den man sich wünschen kann! Danke für die schöne Zeit im Büro und das Beantworten aller dummen und weniger dummen Fragen.
- *Janine Hütig*: Unabhängig von deinem Aufenthaltsort wirst du immer im Büro meines Herzens sitzen. Danke für alle gefundenen *i*'s.
- *Lars Zeidlewicz*: Danke, dass du stets ein offenes Ohr hast und für deine immer sehr geschätzten Anregungen und Ratschläge.
- Mein Dank gilt nochmals *Daniel Bieletzki, Janine Hütig* und *Lars Zeidlewicz* für das aufmerksame Korrekturlesen dieser Arbeit.
- An meine wundervollen Freunde, *Esperanza Köhler, Anna Moros* und *Jonas Mader*. Ihr habt nicht nur Glück und Freude in mein Studium gebracht, sondern auch in mein Leben. Danke für eure Unterstützung und dafür, dass ich mich immer auf euch verlassen kann. Danke danke danke.
- *Esco*: Im Märchen gibt es Feen, im wahren Leben habe ich dich.
- *Tim Schäfer*: Danke für deine stets vorhandene Hilfsbereitschaft (und dein Auto).
- Meiner Mutter *Birgit Gausmann*, meinem Vater, *Dietrich Gausmann* sowie meinem Bruder *Daniel Gausmann* werde ich für Unterstützung und Liebe sowie ihrem Vertrauen in mich immer dankbar sein.
- *Alex McCarthy*: You always believe in me, even if I fail to do so. Thank you!

Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe. Alle Textstellen, die dem Wortlaut oder dem Sinn nach anderen Werken entnommen sind, wurden unter der Angabe der Quelle deutlich gekennzeichnet.

Münster, August 2010

.....
(Nina Gausmann)