

Masterarbeit

Der quantenchromodynamische Feldstärkekorrelator in Gitterstörungstheorie

eingereicht von
Susanne Ehret

Fachbereich Physik
Institut für Theoretische Physik
Goethe-Universität
Frankfurt am Main

Juli 2012

Betreuer: Prof. Dr. Owe Philipsen

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	5
2. Quantenchromodynamik auf dem Gitter	7
2.1. Historie	7
2.2. QCD im Kontinuum	8
2.2.1. Der euklidische Pfadintegralformalismus	9
2.2.2. Störungstheorie im Kontinuum	10
2.3. Das Eichfeld auf dem Gitter	12
2.3.1. Die gluonische Gitterwirkung	13
2.3.2. Gitterstörungstheorie	14
3. Der Feldstärkekorrelator	21
3.1. Störungstheoretische Betrachtung des Feldstärkekorrelators	21
3.2. Feynmandiagramme	25
3.2.1. Führende Ordnung	25
3.2.2. Ordnung g	26
3.2.3. Ordnung g^2 - Diagramme ohne Schwingerlinie	26
3.2.4. Ordnung g^2 - Diagramme mit Schwingerlinie	31
4. Entwicklung der Korrelatorintegrale	35
4.1. Integrale ohne Mischterme im Nenner	35
4.1.1. Paladini und Sexton	35
4.1.2. Lüscher und Weisz	38
4.2. Integrale der Diagramme b, c, d und i	41
5. Gitterableitungen	43
5.1. Symmetrie des Propagators unter Impulsumkehr	43
5.2. Ableitungen der Propagatorintegrale	44
5.2.1. Einfache Gitterableitung	44
5.2.2. Doppelte Gitterableitung	45
5.3. Ableitungen zur Berechnung der Diagramme g, h, j, k und l	47
6. Ergebnisse und Auswertung	49
6.1. Entwicklung der berechenbaren Diagramme	49
6.1.1. Führende Ordnung	49
6.1.2. Ordnung g^2	50
6.2. Problem der Methode von Paladini und Sexton	53
6.3. Diskussion weiterer Lösungsmöglichkeiten	54
7. Zusammenfassung	57

A. Formeln	59
A.1. Schwinger-Parametrisierung	59
A.2. Besselfunktion	59
A.3. Paladini und Sexton im Kontinuum	59
A.4. Baker-Campbell-Hausdorff-Formel	59
A.5. Beweis der BCH-Formel für ein Produkt aus beliebig vielen Exponential- funktionen	59
B. Ableitungen	61
B.1. Reihenentwicklungen der auftretenden Polynome	61
B.2. Herleitung der zweifachen Ableitungen von $\Delta^L(z \pm a\hat{\alpha}, 4, 2, 0)$	61
C. Gitterintegrale	65
C.1. Integrale der bekannten Diagramme	65
C.2. Integrale der unbekanntenen Diagramme	66

1. Einleitung

Die Korrelationsfunktion der Feldstärke, die in dieser Arbeit im Mittelpunkt steht, ist bereits seit vielen Jahren im Bereich nichtstörungstheoretischer Betrachtungen der Quantenchromodynamik von Interesse. Sie spielt eine entscheidende Rolle in stochastischen Modellen zur Beschreibung des Farb-Confinement [1, 2, 3] und in der Untersuchung hoch-energetischer Streuprozesse von Hadronen [4, 5, 6, 7]. Des Weiteren ist sie eine wichtige Größe um Effekte des Gluonkondensats auf schwere gebundene $Q\bar{Q}$ -Zustände zu untersuchen [8, 9, 10]. Das Spektrum schwerer Quarkonia bietet umgekehrt eine Möglichkeit das Verhalten des quantenchromodynamischen Vakuums und dessen Parameter zu bestimmen [11].

Ein konkretes Beispiel für die Applikation des Feldstärkekorrelators auf dem Gitter ist die numerische Berechnung der Korrelationslänge der gluonischen Feldstärke in reiner Eichtheorie [12, 13] sowie in Quantenchromodynamik [14, 15].

Um eine Verbindung zwischen den Ergebnissen aus Gitter-Simulationen und dem physikalischen Kontinuum zu schaffen, ist auf Grund der unterschiedlichen Regularisierungen und den damit verbundenen verschiedenen Renormierungsschemata eine störungstheoretische Betrachtung der Korrelationsfunktion auf dem Gitter unumgänglich.

In dieser Arbeit soll hinsichtlich dieser Notwendigkeit der Feldstärkekorrelator in Gitterstörungstheorie bis zur zweiten Ordnung in der Kopplungskonstanten im Vakuum berechnet werden. Es werden dazu Korrekturen bis einschließlich der quadratischen Ordnung in der Gitterkonstanten betrachtet. Zunächst jedoch wird im zweiten Kapitel nach einem kurzen geschichtlichen Überblick eine Einführung in die Quantenchromodynamik im Kontinuum und auf dem Gitter gegeben. Hierbei wird besonders auf den störungstheoretischen Aspekt sowie auf die Beschreibung der reinen Eichtheorie Wert gelegt. Das dritte Kapitel behandelt dann die störungstheoretische Berechnung des Feldstärkekorrelators auf dem Gitter und listet diagrammatisch die zu bestimmenden Summanden und die darin enthaltenen Gitterintegrale auf. Im Anschluss werden in Kapitel vier zwei Möglichkeiten besprochen die Integrale im Kontinuumslimit zu entwickeln. Dies ist zum einen die auf der Entwicklung von Besselfunktionen basierende Methode von Paladini und Sexton und zum anderen die mittels Erweiterung der Grenzen des Propagatorintegrals gefundene Entwicklung von Lüscher und Weisz. Im fünften Kapitel werden die benötigten Gitterableitungen der verschiedenen Terme, die in den Entwicklungen der Integrale erscheinen, bereitgestellt. Zuletzt werden in Kapitel sechs die Ergebnisse besprochen und in Kapitel sieben zusammengefasst. Außerdem findet sich im Anhang neben den verwendeten Formeln eine Übersicht über die vorkommenden Gitterintegrale.

2. Quantenchromodynamik auf dem Gitter

Im Folgenden soll ein kurzer Abriss über die geschichtliche und mathematische Entwicklung der Quantenchromodynamik (QCD) bis hin zur Formulierung auf dem Gitter gegeben werden. Da sich die Berechnung des Feldstärkekorrelators, der in dieser Arbeit im Fokus steht, auf die reine Eichtheorie der QCD beschränkt, wird besonderer Wert auf den Anteil gluonischer Felder an der QCD gelegt. Daneben wird die Störungstheorie schwacher Kopplungen ausführlich behandelt.

Die theoretischen Grundlagen zur QCD im Kontinuum und auf dem Gitter wurden [16, 17, 18, 19, 20] entnommen. Eine sehr detaillierte Beschreibung der Geschichte der Physik findet sich in [21].

2.1. Historie

Die Anfänge der Physik im heutigen Sinne liegen im alten Griechenland begründet, als begonnen wurde die Natur ohne jegliche Hilfe überirdischer Mächte zu beschreiben. Als um 400 v. Chr. Demokrit den Begriff des Atoms (griech. $\alpha\tau\omicron\mu\omicron\varsigma$ = unteilbar(er Urstoff)), damals noch ein rein philosophisches Gedankenexperiment, prägte, legte er doch den Grundstein für die Atomhypothese des 18. Jahrhunderts und damit für unser heutiges Verständnis vom Aufbau der Welt. J. Dalton, J. J. Thomson, E. Rutherford, N. Bohr, J. Chadwick, C. D. Anderson und E. Fermi sind nur einige wenige Namen der Wissenschaftler, die theoretisch sowie experimentell zur Entdeckung noch kleinerer Einheiten der Materie, wie Elektron, Proton und Neutron, beitrugen.

In der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts etablierte sich das Standardmodell der Elementarteilchenphysik, eine Theorie, die alle Materie und deren Wechselwirkungen untereinander beschreibt. Die elementaren Teilchen sind hiernach Leptonen und Quarks, die durch Eichbosonen miteinander interagieren. Ein Überblick über die fundamentalen Fermionen ist in Tabelle 2.1 gegeben. Die von den Austauschpartikeln Photon, Z^0 - und W^\pm -Boson sowie Gluon vermittelten Wechselwirkungen sind die elektromagnetische, die schwache und die starke Kraft.

Während die Quantenelektrodynamik (QED) bereits Ende der 1920er-Jahre als relativistische Quantenfeldtheorie vorlag [22, 23], manifestierte sich erst ab 1970 eine Theorie der starken Wechselwirkung. Der Weg dahin wurde 1963 von M. Gell-Mann und G. Zweig bereitet, die unabhängig voneinander das Quarkmodell vorschlugen [24, 25]. Problematisch war allerdings, dass z. B. das Baryon Δ^{++} als gebundener Zustand aus drei Up-Quarks scheinbar das Pauli-Prinzip verletzte und dass freie Quarks nicht beobachtet werden konnten. Eine Lösung für die Konstruktion baryonischer Wellenfunktionen bot die von M. Han, Y. Nambu und O. W. Greenberg ad hoc eingeführte Quantenzahl Farbe, die ihren Namen erst später von M. Gell-Mann erhielt. Das zweite Problem wurde 1973 von G. 't Hooft, D. J. Gross, F. Wilczek und H. D. Politzer behoben [26, 27, 28]. Sie zeigten, dass die bereits

	1. Generation	2. Generation	3. Generation
Quarks	u	c	t
	d	s	b
Leptonen	ν_e	ν_μ	ν_τ
	e	μ	τ

Tabelle 2.1.: Fermionen des Standardmodells.

1954 von C. N. Yang und R. Mills [29] auf nichtabelsche Feldtheorien verallgemeinerte QED die Eigenschaft besitzt, dass die Kraft zwischen den Quarks mit abnehmendem Abstand kleiner wird. Dieses Phänomen wird heute als asymptotische Freiheit bezeichnet und wurde erstmals bei tiefinelastischen Streuexperimenten entdeckt. Sie erlaubt die störungstheoretische Behandlung der starken Wechselwirkung bei kurzen Entfernungen zwischen den Quarks und liefert eine Erklärung für deren „Confinement“. Die Theorie wurde der neuen Quantenzahl nach (griech. $\chi\rho\acute{\omega}\mu\alpha$ = (Haut)farbe) benannt.

Das Standardmodell beinhaltet neben der QCD die Glashow-Salam-Weinberg-Theorie, die die elektroschwache Wechselwirkung beschreibt [30, 31, 32]. Außerdem konnte den letzten Erkenntnissen der Experimente ATLAS und CMS am CERN zufolge dem Nachweis des bisher fehlenden Higgs-Bosons erheblich näher gekommen werden [33, 34]. Das Standardmodell als solches liefert aber keinesfalls eine vollständige Erklärung der beobachteten physikalischen Gesetzmäßigkeiten, was bereits an der fehlenden Berücksichtigung der Gravitation ersichtlich ist.

2.2. QCD im Kontinuum

Ausgehend von experimentellen Funden ist bekannt, dass die Theorie, die die Wechselwirkung der Gluonen und Quarks untereinander beschreibt, invariant unter lokalen Transformationen der speziellen unitären Gruppe $SU(3)$ sein muss. Die geforderte Ortsabhängigkeit der Transformation ist notwendig um die gluonischen Eichfelder in die Theorie einzubeziehen. Die Wahl der Gruppe und ihre Dimension folgt aus der Beobachtung, dass Quarks die Quantenzahl Farbladung besitzen, die sich in drei verschiedenen Ladungszuständen äußert und mit $SU(3)$ als Eichgruppe genau die experimentell bestätigten acht Gluonen generiert werden können.

Die Lagrange-Funktion der QCD lautet¹

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_{i=1}^{N_f} \bar{\psi}^i (i\gamma^\mu D_\mu - m_i) \psi^i - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}. \quad (2.1)$$

ψ^i sind die Quarkfelder mit Masse m_i und Flavour-Index i . Die Summen über die Farbladung und den Spinorindex wurden nicht explizit aufgeführt. γ^μ sind die Dirac’schen Gammamatrizen mit Lorentz-Index μ . Die fermionischen Felder gehören zur fundamentalen Darstellung der Gruppe $SU(3)$. Die Invarianz der Lagrange-Funktion unter lokalen Transformationen der $SU(3)$ wird durch die kovariante Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu^a T^a \quad (2.2)$$

¹Es werden in der gesamten Arbeit natürliche Einheiten benutzt, d. h. $c = \hbar = 1$.

gewährleistet. A_μ^a sind die zu diesem Zweck neu eingeführten Eichfelder und g die Kopplungskonstante. Der zweite Summand in Gleichung (2.1) berücksichtigt den kinetischen Anteil des Gluonfeldes. Der Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ selbst und die eichinvariante Kombination daraus können mittels des Kommutators der kovarianten Ableitung

$$[D_\mu, D_\nu] = -igF_{\mu\nu}^a T^a, \quad F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a T^a - \partial_\nu A_\mu^a T^a - gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (2.3)$$

konstruiert werden.

Die Eichfelder gehören der adjungierten Darstellung der $SU(3)$ an und können mit Hilfe der Generatoren T^a geschrieben werden als $A_\mu = A_\mu^a T^a$, sodass auch für den Feldstärketensor $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T^a$ folgt. Die spurlosen und hermiteschen Generatoren formen die Lie-Algebra

$$[T^a, T^b] = if^{abc} T^c \quad (2.4)$$

und es gilt die Normierung $\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{\delta^{ab}}{2}$. f^{abc} sind die die Algebra charakterisierenden Strukturkonstanten, welche mit $(T_{adj}^a)_{bc} = -if^{abc}$ gleichzeitig die Matrixelemente der adjungierten Darstellung sind.

Die so gefundene Theorie heißt Yang-Mills-Theorie. Durch ihren nichtabelschen Charakter kommt es zur Selbstwechselwirkung der Gluonen, was in störungstheoretischen Betrachtungen zu zusätzlichen Termen gegenüber der QED, die der Symmetriegruppe $U(1)$ angehört und abelsch ist, führt. Die Störungstheorie kann in der Kontinuums-QCD nur im Schwachkopplungsbereich, d. h. für kleine Abstände und hohe Energien, angewendet werden. Bevor diese Methode vorgestellt wird, soll im nachfolgenden Abschnitt das Pfadintegral im euklidischen Raum eingeführt werden, da es für Berechnungen im Rahmen der nichtabelschen Feldtheorie eine Vereinfachung gegenüber der Feldquantisierung bedeutet.

2.2.1. Der euklidische Pfadintegralformalismus

Der für viele Bereiche der modernen Physik wichtige Pfadintegralformalismus wurde von R. P. Feynman im Rahmen der Quantenmechanik eingeführt [35]. Hierbei wird die Wahrscheinlichkeitsamplitude eines Teilchens, das sich innerhalb einer Zeit t von \vec{y} nach \vec{x} bewegt, durch ein komplexes, stark oszillierendes Funktionalintegral geschrieben. Führt man die Wick-Rotation aus, d. h. wählt man anstelle reeller imaginäre Zeiten $t \rightarrow -i\tau$, so findet man den reellen Ausdruck²

$$\langle (\vec{x}, \tau_0 + \tau) | e^{-H\tau} | (\vec{y}, \tau_0) \rangle = \int Dx e^{-S_E}, \quad (2.5)$$

wobei der Maßterm Dx das Produkt der Maße aller möglichen Wege $\prod_i dx_i$ bezeichnet. Das Argument des Gewichtsfaktors ist die euklidische Wirkung $S_E = -iS$. Er stellt sicher, dass der größte Beitrag zu Gleichung (2.5) vom klassischen Weg, d. h. von Pfaden nahe des Minimums $\delta S_E(q) = 0$, geleistet wird. Weiterhin tragen exponentiell unterdrückte Quantenfluktuationen bei.

Übertragen auf eine Feldtheorie bedeutet dies die Ersetzung der Koordinaten und Impulse durch skalare oder vektorielle Felder Φ , sodass das quantenmechanische Pfadintegral in ein Funktionalintegral übergeht, $D\Phi = \prod_x d\Phi(x)$,

$$\langle \Phi(\vec{x}, \tau_0 + \tau) | e^{-H\tau} | \Phi(\vec{y}, \tau_0) \rangle = \int D\Phi e^{-S_E}. \quad (2.6)$$

² x und y entsprechen nun euklidischen Vierervektoren mit Komponenten x_μ und y_μ , $\mu = 1, 2, 3, 4$.

Die Korrelationsfunktion eines beliebigen Operators \mathcal{O} kann somit geschrieben werden als

$$\langle \mathcal{O}[\Phi] \rangle = \frac{1}{Z} \int D\Phi \mathcal{O}[\Phi] e^{-S_E[\Phi]} \quad (2.7)$$

und lautet in der QCD

$$\langle \mathcal{O}[\bar{\psi}, \psi, A_\mu] \rangle = \frac{1}{Z} \int D[\bar{\psi}, \psi, A_\mu] \mathcal{O}[\bar{\psi}, \psi, A_\mu] e^{-S_E[\bar{\psi}, \psi, A_\mu]}. \quad (2.8)$$

Hierbei bedeuten \langle und \rangle den zeitgeordneten Grundzustandserwartungswert. Der Normierungsfaktor Z entspricht der rechten Seite von Gleichung (2.6).

An dieser Stelle sei auf die Ähnlichkeit der euklidischen Formulierung des Pfadintegrals mit der Zustandssumme aus der Statistischen Mechanik hingewiesen.

2.2.2. Störungstheorie im Kontinuum

Zur Veranschaulichung wird die Störungstheorie zunächst für ein skalares Feld ϕ skizziert um dann im nächsten Unterkapitel die daraus erhaltenen Erkenntnisse auf störungstheoretische Betrachtungen der Gitter-QCD zu übertragen.

Ausgangspunkt ist das erzeugende Funktional³

$$Z[J] = \int D\phi e^{-S[\phi] + \int d^4x J(x)\phi(x)}, \quad (2.9)$$

mit welchem durch Ableiten nach den Quellen J euklidische Greensfunktionen berechnet werden können. N-Punktfunktionen lassen sich durch

$$\langle \phi(x)\phi(y) \dots \rangle = \frac{1}{Z[0]} \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \left(\frac{\delta}{\delta J(y)} \right) \dots Z[J] \Big|_{J=0} \quad (2.10)$$

darstellen. Es gilt die Normierung $Z[0] = Z[J=0]$. Das Integral in $Z[J]$ lässt sich im Falle einer Wirkung $S[\phi] = S_0[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}_0[\phi]$, in der ausschließlich quadratische Terme in den Feldern auftauchen, lösen. Dies gilt im Allgemeinen und nicht nur für skalare Feldtheorien. Mittels partieller Integration kann die freie Wirkung umgeschrieben werden zu $S_0[\phi] = \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \phi(x)K(x,y)\phi(y)$. Durch eine geeignete Substitution der Felder erhält man somit

$$\int D\phi e^{-S_0[\phi] + \int d^4x J(x)\phi(x)} = Z_0[0] e^{\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x)K^{-1}(x,y)J(y)}. \quad (2.11)$$

$K^{-1}(x,y)$ kann mittels $\int d^4\xi K(x,\xi)K^{-1}(\xi,y) = \delta^4(x-y)$ bestimmt werden und ist hier die freie Zweipunktfunktion des skalaren Feldes:

$$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle = \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \left(\frac{\delta}{\delta J(y)} \right) e^{\frac{1}{2} \int d^4x' d^4y' J(x')K^{-1}(x',y')J(y')} \Big|_{J=0} = K^{-1}(x,y), \quad (2.12)$$

wobei ausgenutzt wurde, dass $K^{-1}(x,y) = K^{-1}(y,x)$ gilt.

Enthält die Wirkung Terme, die nicht quadratisch in den Feldern sind, ist eine störungstheoretische Behandlung zur Lösung notwendig. Hierzu wird die Wirkung in ihren quadratischen und ihren nichtquadratischen Teil, S_0 und S_I , zergliedert. Die Wahl der

³Es soll von nun an $S = S_E$ gelten.

Indizes an den Summanden der Wirkung erfolgt mit Hinblick darauf, dass der quadratische Teil meist der freien Theorie angehört, während andere Terme eine Wechselwirkung induzieren. Das erzeugende Funktional kann somit umgeformt werden zu

$$Z[J] = \int D\phi e^{-S_0[\phi] - S_I[\phi] + \int d^4x J(x)\phi(x)} \quad (2.13)$$

$$= \int D\phi \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-S_I[\phi])^j}{j!} \right) e^{-S_0[\phi] + \int d^4x J(x)\phi(x)} \quad (2.14)$$

$$= Z_0[0] e^{-S_I\left[\frac{\delta}{\delta J(y')}\right]} e^{\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x)K^{-1}(x,y)J(y)}. \quad (2.15)$$

Dabei wurde im ersten Schritt die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion verwendet. Man erkennt, dass die Felder ϕ durch die Funktionalableitung in $S_I[\phi]$ ersetzt werden können, da die ursprünglichen Felder nach Ableitung des Quellterms im verbliebenen Integranden regeneriert werden. So ist der erste Faktor ϕ -unabhängig und kann vor das Integral gezogen werden. Im zweiten Schritt wurde außerdem Gleichung (2.11) benutzt. Einsetzen von Gleichung (2.15) in (2.10) ergibt

$$\langle \phi(x)\phi(y) \dots \rangle = \frac{Z_0[0]}{Z[0]} \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \left(\frac{\delta}{\delta J(y)} \right) \dots e^{-S_I\left[\frac{\delta}{\delta J(y')}\right]} e^{\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x)K^{-1}(x,y)J(y)} \Big|_{J=0}. \quad (2.16)$$

Hieraus kann mit der Entwicklung der ersten Exponentialfunktion eine Summe von Termen gewonnen werden, die üblicher Weise diagrammatisch dargestellt wird. Die Regeln zum systematischen Auswerten der aus Gleichung (2.16) resultierenden Summanden sind nach ihrem Schöpfer R. P. Feynman benannt. Im folgenden Unterkapitel werden die Feynmanregeln im Zusammenhang mit der störungstheoretischen Behandlung der QCD auf dem Gitter besprochen.

Korrelationsfunktionen lassen sich gleichermaßen in zweiter Quantisierung angeben:

$$\langle \phi(x)\phi(y) \dots \rangle = \frac{\langle 0|\mathcal{O}[\phi]e^{-S_I}|0\rangle}{\langle 0|e^{-S_I}|0\rangle}. \quad (2.17)$$

Mit $\langle 0|\mathcal{O}[\phi]e^{-S_I}|0\rangle = \frac{1}{Z_0[0]} \int D\phi \mathcal{O}[\phi]e^{-S_I}e^{-S_0}$ wird die Äquivalenz zwischen den zwei Formalismen deutlich, vgl. Gleichung (2.10). Die Erwartungswerte können unter Anwendung des Wick'schen Theorems

$$\langle \Phi(x_1)\Phi(x_2)\dots\Phi(x_m) \rangle = \langle \text{alle möglichen Wick-Kontraktionen} \rangle \quad (2.18)$$

berechnet werden. Mit der Entwicklung der Exponentialfunktion kann Gleichung (2.17) damit auf gleiche Weise wie Gleichung (2.16) als Summe von Feynmandiagrammen geschrieben werden.

Bei der Berechnung von Korrelationsfunktionen ist man wie im Fall des hier betrachteten Feldstärkekorrelators oft nur an den zusammenhängenden Diagrammen interessiert. Diese beschreiben ausschließlich „echte“ Wechselwirkungen, an denen alle Felder teilhaben. Dies kann durch die Verwendung des erzeugenden Funktionals $W[J]$ mit $W[J] \equiv \ln Z[J]$ erreicht werden. Bei der Anwendung des Wick'schen Theorems können die nichtverbundenen Diagramme einschließlich der Vakuumbeiträge direkt abgezogen werden. Die hierzu gehörige Korrelationsfunktion soll mit $\langle \dots \rangle_C$ definiert werden.

Um die Störungstheorie nun auf die QCD anzuwenden, bedarf es einiger weiterer Konzepte, da das naiv aufgestellte Funktionalintegral über die gluonischen Felder nicht definiert ist. Diese sollen direkt im Zusammenhang mit der Gitterformulierung der QCD vorgestellt werden.

2.3. Das Eichfeld auf dem Gitter

Vorhersagen in der QCD waren bis 1974 auf den Bereich hoher Energien und kleiner Abstände beschränkt, da die Kopplung nur dann klein genug ist um störungstheoretisch vorgehen zu können. K. G. Wilson machte durch die Betrachtung der QCD auf einem vierdimensionalen Raum-Zeit-Gitter Berechnungen im Starkkopplungsbereich zugänglich [36], da die Diskretisierung der Raumzeit eine nichtstörungstheoretische Behandlung ermöglicht. Eine Invarianz unter Lorentz-Transformationen ist somit nicht mehr gegeben, Eichinvarianz kann aber erhalten werden.

Die Integrale in den Darstellungen (2.5) und (2.6) sind nur formal definiert, da eine unendliche Anzahl von Freiheitsgraden in Form der kontinuierlichen Trajektorien (\vec{x}, τ) bzw. Feldkonfigurationen $\Phi(\vec{x}, \tau)$ auftritt. Um das Funktionalintegral direkt berechnen zu können, müssen Raum sowie Zeit diskretisiert werden. Dies geschieht durch die Einführung eines vierdimensionalen Raum-Zeit-Gitters,

$$\Lambda = a^4 \mathbb{Z}^4 = \left\{ x \mid \frac{x_\mu}{a} \in \mathbb{Z}, \mu = 1, 2, 3, 4 \right\}, \quad (2.19)$$

wobei hier die Gitterkonstante a in alle Richtungen den gleichen Wert besitzt.

Diese Diskretisierung entspricht einer Regularisierung von divergenten Feynmandiagrammen im Kontinuum, z. B. der Pauli-Villars-Regularisierung oder der Dimensionalen Regularisierung⁴. Tatsächlich sind auch auf dem Gitter die Impulse k auf einen bestimmten Bereich beschränkt. Durch die Diskretisierung der Raum-Zeit-Variablen folgt aus der Fourier-Darstellung

$$f(x) = f(na) = \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}(k) e^{ikna}, \quad (2.20)$$

die hier zur Anschauung nur in einer Dimension angegeben ist, dass die Impulse nur Werte innerhalb der ersten Brillouin-Zone, $-\frac{\pi}{a} < k_\mu \leq \frac{\pi}{a}$, annehmen. Allgemein gilt die Übersetzung $\int d^4x \rightarrow a^4 \sum_x$. Im Impulsraum wird für die Betrachtung eines unendlichen Volumens integriert.

Auf dem Gitter können verschiedene Arten von Ableitungen mittels des Differenzenquotienten definiert werden. Gebräuchlich sind die Vorwärts- (${}^f\Delta_\mu$) und Rückwärtsableitung (${}^b\Delta_\mu$),

$${}^f\Delta_\mu f(x) = \frac{1}{a} (f(x + a\hat{\mu}) - f(x)) \quad (2.21)$$

$${}^b\Delta_\mu f(x) = \frac{1}{a} (f(x) - f(x - a\hat{\mu})). \quad (2.22)$$

In dieser Arbeit wird hauptsächlich die Vorwärtsableitung verwendet, sodass von nun an gilt: ${}^f\Delta_\mu = \Delta_\mu$.

⁴Eine Einführung in die Renormierung und die damit verbundene Regularisierung bietet [37].



Abbildung 2.1.: Linkvariablen.

2.3.1. Die gluonische Gitterwirkung

Um die reine Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter formulieren zu können, muss zunächst ein Ausdruck für die Wirkung gesucht werden, der im Limes $a \rightarrow 0$ das entsprechende Ergebnis im Kontinuum liefert.

Die fermionische Wirkung (vgl. Gleichung (2.1)) soll invariant sein unter den Transformationen

$$\psi(n) \longrightarrow G(n)\psi(n) \quad (2.23)$$

$$\bar{\psi}(n) \longrightarrow \bar{\psi}(n)G^{-1}(n). \quad (2.24)$$

$\psi(n)$ und $\bar{\psi}(n)$ sind die Fermionfelder, dargestellt durch Spinoren mit N Komponenten, während $G(n)$ Element von $SU(N)$ ist. Ein typischer in der fermionischen Wirkung auftretender Term transformiert daher wie folgt:

$$\bar{\psi}(n)\psi(n + \hat{\mu}) \longrightarrow \bar{\psi}(n)G^{-1}(n)G(n + \hat{\mu})\psi(n + \hat{\mu}). \quad (2.25)$$

Die Ungleichheit der rechten und linken Seite obiger Gleichung wird durch Einführen eines zusätzlichen Faktors, des Paralleltransporters $U_\mu(n)$, mit der Transformationseigenschaft

$$U_\mu(n) \longrightarrow G(n)U_\mu(n)G^{-1}(n + \hat{\mu}) \quad (2.26)$$

ausgeglichen, sodass Terme wie in Gleichung (2.25) zur Sicherstellung der Transformationsinvarianz modifiziert werden müssen:

$$\bar{\psi}(n)\psi(n + \hat{\mu}) \longrightarrow \bar{\psi}(n)U_\mu(n)\psi(n + \hat{\mu}). \quad (2.27)$$

Diese Ersetzung entspricht in komplexerer Form der der Ableitung ∂_μ in der Dirac-Wirkung durch die kovariante Ableitung D_μ im Kontinuum. Die $U_\mu(n)$ sind Elemente der $SU(N)$ und können daher parametrisiert werden durch

$$U_\mu(n) = e^{i\theta_\mu(n)}. \quad (2.28)$$

Sie sind auf der Verbindung zwischen den Gitterpunkten definiert und werden als Linkvariablen bezeichnet. Abbildung 2.1 zeigt die graphische Interpretation dieser Gruppenelemente und ihrer Adjungierten. Im Vergleich mit dem Kontinuum findet man durch Bilden des Limes $a \rightarrow 0$ den Zusammenhang zwischen Linkvariable und Vektorfeld, indem man z. B. $\theta_\mu(n)$ im Exponenten mit $gaA_\mu(n)$ gleichsetzt.

Um nun die eichinvariante Wirkung für das Gluonfeld auf dem Gitter zu konstruieren, bedient man sich der Plaquette $P_{\mu\nu}(n)$, die sich aus dem pfadgeordneten Produkt der Linkvariablen zusammensetzt, die den kleinst möglichen geschlossenen Weg bilden,

$$P_{\mu\nu}(n) = U_\mu(n)U_\nu(n + \hat{\mu})U_\mu^\dagger(n + \hat{\nu})U_\nu^\dagger(n). \quad (2.29)$$

Eine Darstellung dieser findet sich in Abbildung 2.2. Wegen der nichtabelschen Struktur der Gruppenelemente ist noch die Spur zu bilden um ein eichinvariantes Objekt zu erhalten. Damit kann nun die Yang-Mills-Wirkung auf dem Gitter geschrieben werden:

$$S_G = \beta \sum_P \left(1 - \frac{1}{2N} \text{Tr} \left(P_{\mu\nu}(n) + P_{\mu\nu}^\dagger(n) \right) \right), \quad (2.30)$$

$$= \beta \sum_P \left(1 - \frac{1}{N} \text{Re Tr} P_{\mu\nu}(n) \right). \quad (2.31)$$

Der Vorfaktor bestimmt sich im Vergleich mit dem Kontinuum zu $\beta = \frac{2N}{g^2}$. N ist die Anzahl der Farbfreiheitsgrade der Quarks, die in dieser Arbeit nicht auf den physikalischen Wert drei festgelegt wird. Die Summe über alle Plaquetten $\sum_P = \sum_{n, \mu < \nu}$ umfasst die Summe über alle Gitterpunkte n und alle Richtungen μ und ν , mit der Einschränkung, dass jede Plaquette richtungsunabhängig nur einmal gezählt wird, $\mu < \nu$. Die zweite Zeile ist nur für eine Theorie basierend auf der Gruppe $U(N)$ oder $SU(N)$ möglich, da hier für die Plaquette $P_{\mu\nu}^\dagger = P_{\nu\mu}$ gilt.

Diese Wirkung für den reinen Gluonbeitrag in der QCD wurde zuerst von K. G. Wilson eingeführt [36]. Sie ist die Wirkung mit der einfachsten Struktur und findet häufig Anwendung. Die Konstruktion der Gitterwirkung ist jedoch nicht eindeutig, da neben der Erhaltung der Eichinvarianz und ggf. anderer globaler Symmetrien nur Lokalität und die Reproduktion des Kontinuumsergebnisses im Limes $a \rightarrow 0$ gefordert sind.

2.3.2. Gitterstörungstheorie

Obwohl das Raum-Zeit-Gitter eingeführt wurde um störungstheoretische Berechnungen vermeiden und somit Betrachtungen im Starkkopplungsbereich anstellen zu können, ist eine störungstheoretische Herangehensweise unumgänglich. Sie wird benötigt um die Ergebnisse aus Monte-Carlo-Simulationen physikalisch zu interpretieren. So müssen die Renormierungsfaktoren von Matrixelementen bestimmt und die Beziehung der „nackten“ Parameter der regularisierten Theorie wie Masse und Kopplungskonstante zu den physikalischen Größen hergestellt werden. Auch sind störungstheoretische Überlegungen nützlich um durch Diskretisierung entstehende Anomalien zu untersuchen oder um die Wiederherstellung der auf dem Gitter gebrochenen Symmetrien im Kontinuumsmites sicherzustellen.

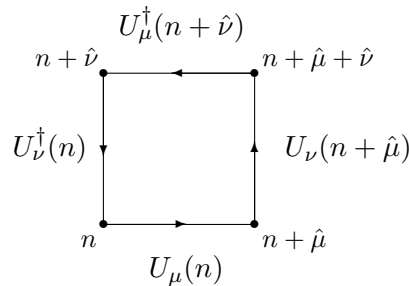


Abbildung 2.2.: Plaquette.

Grundlage für Berechnungen ist wie im Kontinuum das erzeugende Funktional. Eine Korrelationsfunktion in reiner Eichtheorie auf dem Gitter lautet

$$\langle \mathcal{O}[U] \rangle = \frac{1}{Z} \int DU \mathcal{O}[U] e^{-S_G[U]}. \quad (2.32)$$

Haarmaß und Faddeev-Popov-Geister

Um Störungstheorie auf dem Gitter betreiben zu können, muss zunächst eine passende Form des generierenden Funktionals gefunden werden. Dazu wird als erstes das eichinvariante Integrationsmaß, das Haar-Maß dU , betrachtet, das in den Eichfeldern ausgedrückt werden soll. Im Gegensatz zum abelschen Fall in der QED ist die Beziehung zwischen DU und DA nicht trivial. Um das Maß eichinvariant zu belassen, muss ein zusätzlicher Term in der Wirkung eingeführt werden, da gilt:

$$DU = e^{-S_M} DA, \quad S_M = \frac{g^2 a^2 N}{24} \sum_{n,\mu} (A_\mu^a(n))^2 + O(g^4). \quad (2.33)$$

Dieser ist wegen des Faktors g^2 kein kinetischer Term, sondern trägt zu Wechselwirkungen bei. Die Herleitung kann z. B. [18, 20] und den darin angegebenen Referenzen entnommen werden. Die Summe über die Farbindizes wurde nicht angegeben, da für diese in der gesamten Arbeit die Einstein'sche Summenkonvention gelten soll. Dahingegen wird die Einstein'sche Summenkonvention bei mehrfachem Erscheinen der Lorentz-Indizes nicht angenommen. Falls eine Summation gefordert ist, wird diese explizit aufgeführt.

Wie im Kontinuum muss außerdem die Eichung fixiert werden. Im Kontinuum wird ohne Eichfixierung über eine unendliche Anzahl von gleichwertigen Eichfeldkonfigurationen integriert. Auf dem Gitter ist dies zunächst nicht der Fall, weil das Volumen der Eichgruppe endlich ist, siehe [20]. Da aber die Wirkung in der Gitterstörungstheorie durch die Eichfelder und nicht wie bei Monte-Carlo-Simulationen durch die Linkvariablen ausgedrückt wird, wäre eine Schwachkopplungsentwicklung ohne Eichfixierung nicht mehr gewährleistet. Die von L. D. Faddeev and V. N. Popov entwickelte Methode kann aus dem Kontinuum übertragen werden [38]. Mit der Eichbedingung in kovarianter Form

$$R_n^a[A, \chi] = \sum_\mu {}^b\Delta_\mu A_\mu^a(n) - \chi^a(n), \quad (2.34)$$

die linear in den Gluonfeldern ist, wird das eichinvariante Integral

$$\Omega_{FP}^{-1}[A, \chi] = \int Dg \prod_{n,a} \delta(R_n^a[{}^gA, \chi]) \quad (2.35)$$

definiert. ${}^gA_\mu$ repräsentiert die Eichtransformation g der Parameter $A_\mu^a(n)$. Wird Gleichung (2.35) mit $\Omega_{FP}[A, \chi]$ multipliziert, lässt sich die so erzeugte eins in die Korrelationsfunktion (2.32) einsetzen. Nach einer Substitution der Integrationsvariablen kann das Integral über dg ausgewertet werden. Da die $\chi^a(n)$ beliebig ist, kann über diese mittels Gauß'scher Integration integriert werden, was einen Eichfixierungsterm

$$S_{EF} = \frac{a^4}{2\xi} \sum_{n,\nu,\mu} ({}^b\Delta_\nu A_\nu^a(n)) ({}^b\Delta_\mu A_\mu^a(n)) \quad (2.36)$$

mit dem Eichparameter ξ zur Wirkung hinzufügt. Dieser trägt nicht zu Wechselwirkungen bei. Die Faddeev-Popov-Determinante lässt sich mittels Einführung grassmannwertiger Geistfelder $c^a(n)$ berechnen⁵:

$$\Omega_{FP}[A_\mu, \chi] = \int \prod_{n,a} d\bar{c}^a(n) dc^a(n) e^{-S_{FP}}, \quad S_{FP} = -a^4 \sum_{n,\mu} \bar{c}^a(n) {}^b\Delta_\mu \hat{D}_\mu^{ab}[A_\mu] c^b(n). \quad (2.37)$$

\hat{D}_μ^{ab} ist das Gitteräquivalent zur kovarianten Ableitung im Kontinuum, vgl. (2.2):

$$\hat{D}_\mu^{ab}[A_\mu] = M^{-1}(A_\mu(n)) \Delta_\mu + i g a A_\mu(n), \quad \text{mit} \quad M(A_\mu(n)) = \frac{1 - e^{-iagA_\mu(n)}}{iagA_\mu(n)}. \quad (2.38)$$

Auf dem Gitter kann sie als Reihenentwicklung in der Gitterkonstanten a dargestellt werden und führt somit zu neuen Wechselwirkungstermen. Die Faddeev-Popov-Wirkung bis einschließlich der Ordnung $O(g^2)$ und mit der Definition des Gitter-Laplace-Operators $\square \equiv \sum_\mu \Delta_\mu {}^b\Delta_\mu$ lautet

$$\begin{aligned} S_{FP} = & -a^4 \sum_n \bar{c}^a(n) \delta^{ab} \square c^b(n) \\ & - g a^4 f^{abc} \sum_{n,\mu} \bar{c}^a(n) {}^b\Delta_\mu \left(A_\mu^c(n) \left(1 + \frac{a}{2} \Delta_\mu \right) c^b(n) \right) \\ & - \frac{g^2 a^6}{2! 12} (f^{cae} f^{deb} + f^{dae} f^{ceb}) \sum_{n,\mu,\nu} \delta_{\mu\nu} (\Delta_\mu \bar{c}^a(n)) A_\mu^c(n) A_\nu^d(n) (\Delta_\mu c^b(n)). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Das generierende Funktional der reinen Eichtheorie auf dem Gitter kann somit geschrieben werden als

$$Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] = \int D A D \bar{c} D c e^{-S_G - S_M - S_{EF} - S_{FP}} e^{a^4 \sum_n (J_\mu^a(n) A_\mu^a(n) + \bar{\eta}^a(n) c^a(n) + \bar{c}^a(n) \eta^a(n))}. \quad (2.40)$$

Bevor hiervon die Feynmanregeln abgeleitet werden können, muss noch ein Ausdruck für die Wilson-Wirkung S_G in den Eichfeldern gefunden werden.

Wilson-Wirkung

Mit Hilfe der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel (A.5) und $A_\nu(n + \hat{\mu}) = A_\nu(n) + a \Delta_\mu A_\nu(n)$ erhält man aus der Gleichung der Plaquette (2.29)

$$P_{\mu\nu}(n) = e^{i g a^2 G_{\mu\nu}(n)} \quad (2.41)$$

und hieraus das Gitteräquivalent zum Kontinuumsfeldstärketensor $G_{\mu\nu}(x) = \Delta_\mu A_\nu(x) - \Delta_\nu A_\mu(x) + i g [A_\mu(x), A_\nu(x)] + O(a)$. Aus Gleichung (2.30) und einer Entwicklung für kleine Kopplungskonstanten kann somit die euklidische Wirkung im Kontinuum wiedergewonnen

⁵[18] enthält eine ausführliche Herleitung.

werden:

$$S_G[U] = \frac{2N}{g^2} \sum_P \left(1 - \frac{1}{2N} \text{Tr} \left(P_{\mu\nu}(n) + P_{\mu\nu}^\dagger(n) \right) \right) \quad (2.42)$$

$$= \frac{2N}{g^2} \sum_P \left(1 - \frac{1}{2N} \text{Tr} \left(2\mathbf{I} - g^2 a^4 G_{\mu\nu}^2 + O(g^4, a^8) \right) \right) \quad (2.43)$$

$$= a^4 \sum_P \text{Tr} G_{\mu\nu}^2 + O(g^4, a^8) \quad (2.44)$$

$$\xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int d^4x \text{Tr} F_{\mu\nu}^2. \quad (2.45)$$

Aus der Zeile (2.44) gewinnt man mit $G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^a T^a$ und der Normierung $\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{\delta^{ab}}{2}$ die Wirkung des Gluonbeitrages:

$$S_G = \frac{a^4}{2} \sum_P \left((\Delta_\mu A_\nu^a - \Delta_\nu A_\mu^a)^2 - 2g f^{abc} (\Delta_\mu A_\nu^a - \Delta_\nu A_\mu^a) A_\mu^b A_\nu^c + g^2 f^{abc} f^{cde} A_\mu^a A_\nu^b A_\mu^c A_\nu^d + O(g^4) \right). \quad (2.46)$$

Die effektive Wirkung setzt sich also zusammen aus der gluonischen Wilson-Wirkung (2.46), dem Beitrag der Faddeev-Popov-Geistfelder (2.39), dem Eichfixierungsterm (2.36) und dem Maßterm (2.33):

$$S = S_G + S_{FP} + S_{EF} + S_M. \quad (2.47)$$

Propagatoren und Vertizes

Wie im Abschnitt 2.2.2 für skalare Felder im Kontinuum beschrieben, können Korrelationsfunktionen mittels einer Funktionalableitung berechnet werden. Die Feynmanregeln der QCD auf dem Gitter resultieren aus dem erzeugenden Funktional (2.40).

Ähnlich Gleichung (2.12) kann der Gluonpropagator aus dem quadratischen Teil der Wirkung der Gluonfelder $S_{q,G}$, der aus dem ersten Term der Wilson-Wirkung und dem Beitrag des Eichfixierungsterms besteht, hergeleitet werden. Hierzu wird $\sum_n (\Delta_\mu f(n))g(n) = -\sum_n f(n)({}^b \Delta_\mu g(n))$ benutzt und es gilt:

$$S_{q,G} = \frac{a^4}{2} \sum_{n,m} A_\mu^a(n) \Omega_{\mu\nu}^{ab}(n,m) A_\nu^b(m). \quad (2.48)$$

$\Omega_{\mu\nu}^{ab}(n,m)$ ist der inverse Propagator,

$$\Omega_{\mu\nu}^{ab}(n,m) = \delta^{ab} \left(-\delta_{\mu\nu} \square + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) (\Delta_\mu {}^b \Delta_\nu) \right) \delta^{(4)}(n-m), \quad \text{mit} \quad (2.49)$$

$$\delta^{(4)}(n-m) = \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik(n-m)}. \quad (2.50)$$

2. Quantenchromodynamik auf dem Gitter

Da der Propagator eine Greensfunktion des Operators $\Omega_{\mu\nu}^{ab}(n, m)$ ist, kann er zunächst im Impulsraum und somit durch Fourier-Transformation im Ortsraum berechnet werden:

$$D_{\mu\nu}^{ab}(z) = \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^n} e^{ikz} \frac{\delta^{ab}}{\hat{k}^2} \left(\delta_{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{\hat{k}_\mu \hat{k}_\nu}{\hat{k}^2} \right) \quad (2.51)$$

$$\stackrel{\xi=1}{=} \delta^{ab} \delta_{\mu\nu} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^n} \frac{e^{ikz}}{\hat{k}^2}. \quad (2.52)$$

Hier wurde die Feynman-'t Hooft-Eichung mit $\xi = 1$ und außerdem $z = x - y$ benutzt. Da die Ableitungen auf dem Gitter diskret sind, ergeben sich durch die bei Anwendung von $\Omega_{\mu\nu}^{ab}(n, m)$ auftretenden Differenzen von Exponentialfunktionen wesentlich kompliziertere Ausdrücke in den Impulsen als das im Kontinuum der Fall ist. \hat{k} ist durch

$$\hat{k}_\mu = \frac{2}{a^2} \sin\left(\frac{k_\mu a}{2}\right) \quad (2.53)$$

definiert. Des Weiteren soll in der gesamten Arbeit die Konvention für beliebige Vektoren v

$$v^r = \sum_{\mu=1}^4 v_\mu^r, \quad r \in \mathbb{Z} \quad (2.54)$$

gelten, sodass $\hat{k}^2 = \frac{4}{a^4} \sum_{\mu=1}^4 \sin^2\left(\frac{k_\mu a}{2}\right)$.

Wird das Fourier-transformierte Eichfeld mittig auf der Verbindung zweier Gitterplätze definiert,

$$A_\mu^a(x) = \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^n} e^{ik(x+a\hat{\mu}/2)} A_\mu^a(k), \quad (2.55)$$

ergibt sich für den Gluonpropagator nach Fourier-Transformation ein zusätzlicher Term in der Exponentialfunktion von $a \frac{\hat{\mu}-\hat{\nu}}{2}$. Diese Wahl der Eichfelder vermeidet Phasenfaktoren, die Berechnungen unnötig erschweren⁶. Angemerkt sei weiterhin, dass in Feynmaneichung der Differenzterm der Einheitsvektoren im Gluonpropagator durch den Vorfaktor $\delta_{\mu\nu}$ nichtig wird, da dadurch der Propagator für $\mu \neq \nu$ verschwindet und im Falle $\mu = \nu$ eben jener Term wegfällt.

Der Geistpropagator lässt sich analog berechnen:

$$D_{FP}^{ab}(k) = \frac{\delta^{ab}}{\hat{k}^2} \quad (2.56)$$

$$\Rightarrow D_{FP}^{ab}(z) = \delta^{ab} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^n} \frac{e^{ikz}}{\hat{k}^2}. \quad (2.57)$$

Im Gegensatz zum Kontinuum [37] sind die Propagatorintegrale für $z = 0$ ungleich null. Dies kann rekursiv berechnet werden und man findet [20]:

$$\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^n} \frac{1}{\hat{k}^2} = \frac{r_0}{a^2}, \quad (2.58)$$

⁶Siehe z. B. [18, 20].

wobei r_0 eine Konstante mit dem Wert $r_0 \simeq 0,1549$ ist⁷.

Betrachtet man eine wechselwirkende Theorie, bedarf es neben den Propagatoren Ausdrücke für die Wechselwirkungsterme. Diese können ebenso durch die Funktionalableitung des generierenden Funktional (2.40) ermittelt werden und sind bis zur zweiten Ordnung in g in Abbildung 2.3 gezeigt. Die Feynmanregeln können z. B. [18, 19] entnommen werden. Hingewiesen sei insbesondere auf den 2-Gluon- und den Geist-Geist-Gluon-Gluon-Vertex, die aus der Gitterregularisierung stammen und kein Kontinuumsanalog besitzen.

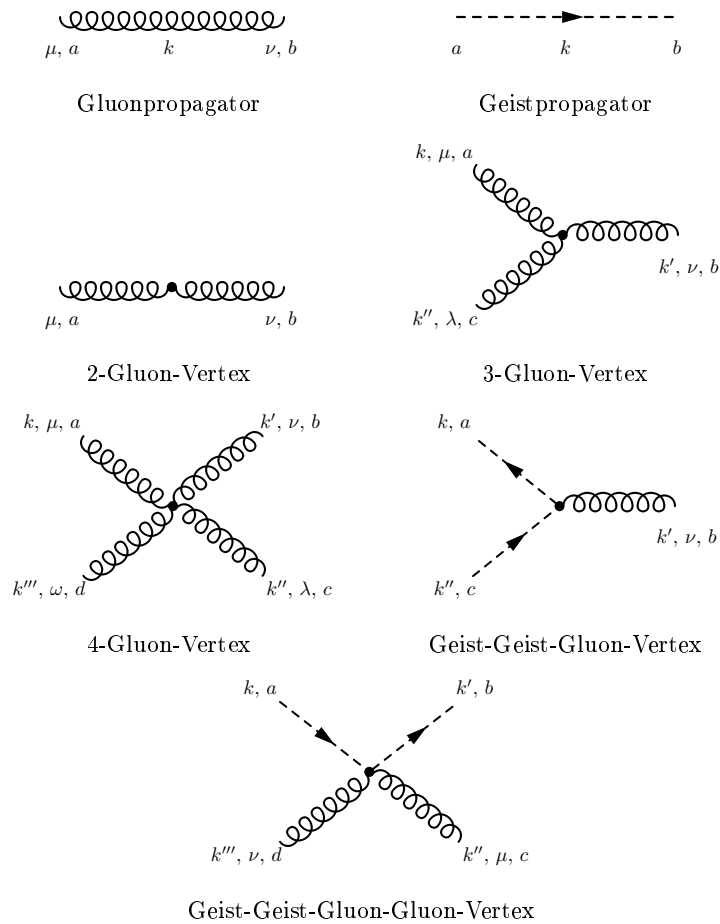


Abbildung 2.3.: Propagatoren und Vertizes der reinen Yang-Mills-Theorie auf dem Gitter bis zur zweiten Ordnung in der Gitterkonstanten.

⁷Der Wert von r_0 ist auf 396 signifikante Dezimalstellen genau in [20] angegeben.

3. Der Feldstärkekorrelator

Die störungstheoretische Behandlung des Feldstärkekorrelators liefert eine Reihenentwicklung in der Kopplungskonstanten g , deren Summanden durch Feynmangraphen dargestellt werden können. Im Kontinuum sind die analytischen Ausdrücke dieser Diagramme bis zur 1-Schleifen-Ordnung bekannt [39]. Auf dem Gitter ergeben sich jedoch bei der Berechnung der auftretenden Integrale durch die komplexe Struktur der Integranden Schwierigkeiten. Diese werden in Kapitel 4 thematisiert. Im aktuellen Kapitel soll die Berechnung des Feldstärkekorrelators in Gitterstörungstheorie vorbereitet werden. Hierzu werden zunächst die benötigten Entwicklungen der einzelnen Komponenten vorgestellt um danach die führende und die 1-Schleifen-Ordnung diagrammatisch zu besprechen.

3.1. Störungstheoretische Betrachtung des Feldstärkekorrelators

Der Feldstärkekorrelator auf dem Gitter

$$\mathfrak{D}_{[\mu\nu][\lambda\omega]}(z) = -\frac{1}{4g^2a^4} \left\langle \text{Tr} \left\{ \left(P_{\mu\nu}(x) - P_{\mu\nu}^\dagger(x) \right) S(x, y) \left(P_{\lambda\omega}(y) - P_{\lambda\omega}^\dagger(y) \right) S^\dagger(x, y) \right\} \right\rangle_C \quad (3.1)$$

ist derart konstruiert, dass er im Limes $a \rightarrow 0$ den entsprechenden Kontinuumsausdruck liefert, siehe z. B. [13],

$$\mathfrak{D}_{[\mu\nu][\lambda\omega]}(z) \underset{a \rightarrow 0}{=} \left\langle \text{Tr} \left\{ F_{\mu\nu}(x) S_k(x, y) F_{\lambda\omega}(y) S_k^\dagger(x, y) \right\} \right\rangle_C. \quad (3.2)$$

Die eckigen Klammern um die Indizes μ , ν , λ und ω zeigen an, dass der Korrelator total antisymmetrisch unter Austausch der so jeweils zusammengefassten, $\mu \leftrightarrow \nu$ und $\lambda \leftrightarrow \omega$, ist. Der Paralleltransporter, die Schwingerlinie¹ $S_k(x, y)$, ist im Kontinuum gegeben als

$$S_k(x, y) = \text{P exp} \left\{ igz^\rho \int_0^1 ds A_\rho^c(x + sz) \right\} \quad (3.3)$$

und stellt die Eichinvarianz des Feldstärkekorrelators sicher. Auch auf dem Gitter kann dieses Prinzip des Paralleltransports angewendet werden. Hierzu beschreibt man den geraden Weg zwischen zwei Punkten x und $y = x + Ma$ durch das Produkt aller dazwischen liegenden Linkvariablen. Mit Hilfe der hinreichend häufigen Anwendung der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel (A.5) kann eine Exponentialdarstellung der Schwingerlinie ge-

¹Diese wegabhängige Phase wurde erstmals von J. S. Schwinger in seinen Arbeiten zur QED benutzt. Im Zusammenhang mit der QCD wird oft von der Wilsonlinie gesprochen.

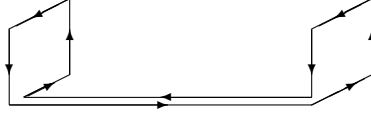


Abbildung 3.1.: Eine mögliche Veranschaulichung des Feldstärkekorrelators auf dem Gitter in fundamentaler Darstellung.

gefunden werden:

$$S(x, y) = e^{igaA_\rho(x)} e^{igaA_\rho(x+a\hat{\rho})} \dots e^{igaA_\rho(x+(M-1)a\hat{\rho})} \quad (3.4)$$

$$= \exp \left\{ iga \sum_{m=0}^{M-1} A_\rho(x + ma\hat{\rho}) - \frac{g^2 a^2}{2} \sum_{r < s}^{M-1} [A_\rho(x + ra\hat{\rho}), A_\rho(x + sa\hat{\rho})] + O(g^3) \right\}. \quad (3.5)$$

Der Beweis für die Erweiterung der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel auf beliebig viele Faktoren ist in Anhang A.5 aufgeführt. Die Summe über den Kommutator in Gleichung (3.5) stellt mit der Einschränkung $r < s$ wie im Kontinuum P die Pfadordnung sicher. In der gesamten Arbeit impliziert $r < s$ die Summation über r von 0 bis $M-2$ und über s von 1 bis $M-1$. Die hermitesch konjugierte Schwingerlinie wird auf gleichem Weg berechnet und es gilt: $S^\dagger(x, y) = S^{-1}(x, y)$. Der Feldstärkekorrelator in der fundamentalen Darstellung kann z. B. wie in Abbildung 3.1 gezeigt, visualisiert werden. Hier wurde im Gegensatz zu Gleichung (3.1), die beide Richtungen der Plaquetten berücksichtigt, nur der entgegengesetzte Uhrzeigersinn dargestellt. Außerdem wurde hier speziell der Fall gewählt, bei dem die zwei Plaquetten parallel zueinander und senkrecht auf der Richtung der Schwingerlinie stehen. Da in dieser Arbeit keine Konstellation bevorzugt behandelt wird und die Lorentz-Indizes in Gleichung (3.1) frei wählbar sind, können Plaquetten und Schwingerlinie jede auf dem Gitter mögliche Ausrichtung zueinander einnehmen. Die Richtung der Schwingerlinie ρ wird unter anderem mit der der Zeit identifiziert um die Zeitentwicklung der Feldstärke zu ermitteln.

Mittels der Eigenschaft von $U \in SU(N)$

$$2\text{Tr} \left(T^b U_{fund} T^a U_{fund}^\dagger \right) = U_{adj}^{ab}, \quad (3.6)$$

die die fundamentale und adjungierte Darstellung eines Gruppenelements U miteinander in Beziehung setzt, lässt sich die adjungierte Schwingerlinie schreiben als

$$S_{adj}^{ab} = \delta^{ab} + iga f^{abc} \sum_{m=0}^{M-1} A_\rho^c(x + ma\hat{\rho}) - \frac{ig^2 a^2}{2} f^{dec} f^{abc} \sum_{r < s}^{M-1} A_\rho^d(x + ra\hat{\rho}) A_\rho^e(x + sa\hat{\rho}) - \frac{g^2 a^2}{2} f^{dae} f^{ebc} \sum_{m,l=0}^{M-1} A_\rho^c(x + ma\hat{\rho}) A_\rho^d(x + la\hat{\rho}). \quad (3.7)$$

Dabei wurde das Hadamard Lemma $e^{-iY} X e^{iY} = X - i[Y, X] - \frac{1}{2}[Y, [Y, X]] + \dots$ ausgenutzt

[40]. Der Feldstärkekorrelator kann demnach umgeschrieben werden zu

$$\mathfrak{D}_{[\mu\nu][\lambda\omega]}(z) = -\frac{1}{8g^2a^4} \left\langle \left(P_{\mu\nu}^a(x) - P_{\mu\nu}^{a\dagger}(x) \right) S_{adj}^{ab}(x, y) \left(P_{\lambda\omega}^b(y) - P_{\lambda\omega}^{b\dagger}(y) \right) e^{-S^{int}} \right\rangle_{C,0}. \quad (3.8)$$

$\langle \dots \rangle_{C,0}$ bezeichnet nun den freien Erwartungswert, siehe auch Abschnitt 2.2.2. $P_{\mu\nu}^a(x)$ wird mit Gleichung (3.9) definiert.

Nun müssen die einzelnen Faktoren entwickelt und zusammengefasst werden, sodass der Feldstärkekorrelator bis zur Ordnung $O(g^2, a^2)$ als Summe von Feynmandiagrammen berechnet werden kann.

Die Plaquette-Terme müssen hierfür mit Hilfe von Gleichung (2.41) nur bis zur Ordnung $O(g, a^2)$ entwickelt werden, da der zweite Term, der hier zur Vollständigkeit noch mit aufgeführt werden soll, zu höheren Ordnungen in der Gitterkonstanten als $O(a^2)$ führen würde. Unter Ausnutzung der Tatsache, dass die Linkvariablen und damit auch die Plaquette Elemente der $SU(N)$ sind, folgt mit $G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^a T^a$ und $A_\mu = A_\mu^a T^a$

$$\left(P_{\mu\nu}^a(x) - P_{\mu\nu}^{a\dagger}(x) \right) = 2iga^2 G_{\mu\nu}^a(x) - \frac{ig^3 a^6}{3} (G_{\mu\nu}^a(x))^3 + O(g^5, a^{10}) \quad (3.9)$$

und mit der Kommutatorregel der Generatoren, $[T^b, T^c] = if^{abc}T^a$, gelangt man auf

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^a &= \Delta_\mu A_\nu^a - \Delta_\nu A_\mu^a \\ &- g f^{abc} \left\{ A_\mu^b A_\nu^c + a A_\mu^b (\Delta_\mu A_\nu^c) + a (\Delta_\nu A_\mu^b) A_\nu^c - \frac{a}{2} A_\mu^b (\Delta_\nu A_\mu^c) - \frac{a}{2} (\Delta_\mu A_\nu^b) A_\nu^c \right. \\ &\quad \left. - \frac{a^2}{2} (\Delta_\mu A_\nu^b) (\Delta_\nu A_\mu^c) \right\} \\ &+ g^2 f^{abc} f^{cde} \left\{ \frac{a}{2} A_\mu^b A_\mu^d A_\nu^e + \frac{a}{2} A_\nu^b A_\mu^d A_\nu^e + \frac{a^2}{2} A_\mu^b A_\mu^d (\Delta_\mu A_\nu^e) + \frac{a^2}{3} A_\nu^b A_\mu^d (\Delta_\mu A_\nu^e) \right. \\ &\quad + \frac{a^2}{6} (\Delta_\mu A_\nu^b) A_\mu^d A_\nu^e + \frac{a^2}{3} A_\mu^b (\Delta_\nu A_\mu^d) A_\nu^e + \frac{a^2}{6} (\Delta_\nu A_\mu^b) A_\mu^d A_\nu^e + \frac{a^2}{2} A_\nu^b (\Delta_\nu A_\mu^d) A_\nu^e \\ &\quad \left. - \frac{a^2}{6} A_\mu^b A_\mu^d (\Delta_\nu A_\mu^e) - \frac{a^2}{6} A_\mu^b (\Delta_\mu A_\nu^d) A_\nu^e - \frac{a^2}{6} A_\nu^b A_\mu^d (\Delta_\nu A_\mu^e) - \frac{a^2}{6} A_\nu^b (\Delta_\mu A_\nu^d) A_\nu^e \right\} \\ &+ O(g^3, a^3). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Die Potenzreihe der Schwingerlinie in Kopplungs- und Gitterkonstanten wurde mit Gleichung (3.7) bereits gefunden. Die Entwicklung des Wechselwirkungsterms $e^{-S^{int}}$ ergibt

3. Der Feldstärkekorrelator

sich mit den Termen aus Gleichung (2.47), die zu Wechselwirkungen beitragen, wie folgt:

$$\begin{aligned}
e^{-S^{int}} &= 1 + \frac{ga^4}{2} f^{ijk} \sum_{n,\alpha,\beta} (\Delta_\alpha A_\beta^i - \Delta_\beta A_\alpha^i) A_\alpha^j A_\beta^k - \frac{g^2 a^4}{4} f^{ijk} f^{klm} \sum_{n,\alpha,\beta} A_\alpha^i A_\beta^j A_\alpha^l A_\beta^m \\
&+ ga^4 f^{ijk} \sum_{n,\alpha} \bar{c}^i{}^b \Delta_\alpha \left(A_\alpha^k \left(1 + \frac{a}{2} \Delta_\alpha \right) c^j \right) \\
&+ \frac{g^2 a^6}{2! 12} (f^{lik} f^{kjm} + f^{mik} f^{kjl}) \sum_{n,\alpha,\beta} \delta_{\alpha\beta} (\Delta_\alpha \bar{c}^i) A_\alpha^l A_\beta^m (\Delta_\alpha c^j) \\
&- \frac{g^2 a^2 N}{24} \sum_{n,\alpha} (A_\alpha^i)^2 \\
&+ \frac{1}{2} \left(\frac{ga^4}{2} f^{ijk} \sum_{n,\alpha,\beta} (\Delta_\alpha A_\beta^i - \Delta_\beta A_\alpha^i) A_\alpha^j A_\beta^k \right)^2 \\
&+ \frac{1}{2} \left(ga^4 f^{ijk} \sum_{n,\alpha} \bar{c}^i{}^b \Delta_\alpha \left(A_\alpha^k \left(1 + \frac{a}{2} \Delta_\alpha \right) c^j \right) \right)^2 \\
&+ \frac{g^2 a^8}{4} f^{ijk} f^{lmn} \left[\sum_{n,\alpha,\beta} (\Delta_\alpha A_\beta^i - \Delta_\beta A_\alpha^i) A_\alpha^j A_\beta^k, \sum_{n,\alpha} \bar{c}^l{}^b \Delta_\alpha \left(A_\alpha^n \left(1 + \frac{a}{2} \Delta_\alpha \right) c^m \right) \right]_+ \\
&+ O(g^3, a^3), \tag{3.11}
\end{aligned}$$

wobei die eckige Klammer mit Index + in der vorletzten Zeile für den Antikommutator steht.

Um für die kommenden Rechnungen die Notation zu verkürzen, soll für den störungstheoretisch behandelten Feldstärkekorrelator folgende Schreibweise eingeführt werden:

$$\mathfrak{D}_{[\mu\nu][\lambda\omega]}(z) = \frac{1}{2} \sum \left\langle G_{\mu\nu}^{a,(O_g)}(x) S_{adj}^{ab,(O_g)}(x,y) G_{\lambda\omega}^{b,(O_g)}(y) W^{(O_g,int)}(y'/y',y'') \right\rangle_{C0}. \tag{3.12}$$

Hier wurde die Entwicklung des Plaquet-Terms (3.9) bis zur Ordnung $O(g, a^2)$ in Gleichung (3.8) eingesetzt. Des Weiteren wurde die Ersetzung $e^{-S^{int}} = W$ vorgenommen. Der zweite Eintrag in der hochgestellten Klammer, *int*, steht stellvertretend für den jeweiligen Wechselwirkungsterm, der aus der Entwicklung (3.11) einzusetzen ist. Hierzu soll als Abkürzung die Herkunft des Terms (G, FP, M; siehe Unterkapitel 2.3.2) sowie dessen Potenz genutzt werden, sodass die Entwicklung (3.11) als $e^{-S^{int}} = 1 + G + FP + M + G^2 + FP^2 + [G, FP]_+ + O(g^3, a^3)$ geschrieben werden kann. Der hochgestellte Ausdruck O_g an allen Faktoren gibt die Ordnung in g des Summanden innerhalb der jeweiligen Entwicklung an, der verwendet wird. Das Summenzeichen soll darauf hinweisen, dass sich nach Ausmultiplizieren aller Potenzreihen eine Summe von Erwartungswerten ergibt, deren Summanden durch Feynmandiagramme repräsentiert werden können.

Im Fließtext soll zur weiteren Vereinfachung auf den Faktor einhalb, die entsprechenden Ortsabhängigkeiten, Farb- und Lorentz-Indizes sowie den Index $C0$ verzichtet werden. Die Summanden aus Gleichung (3.12) entsprechen dann

$$\mathfrak{D}_{[\mu\nu][\lambda\omega]}^{(O_g)}(z) = \left\langle G^{(O_g)} S_{adj}^{(O_g)} G^{(O_g)} W^{(O_g,int)} \right\rangle. \tag{3.13}$$

Im Folgenden soll die Grundlage für die Berechnung eben jener Summanden, bzw. Feynmandiagrammen, geschaffen werden.

3.2. Feynmandiagramme

In diesem Unterkapitel sollen systematisch die bei der störungstheoretischen Berechnung des Feldstärkekorrelators auftretenden Feynmandiagramme im Ortsraum betrachtet werden. Eine Übersicht über die für die verschiedenen Diagramme zu berechnenden Integrale ist in Anhang C zu finden.

Mit den Ergebnissen aus Abschnitt 2.3.2 können die Gluon- und Geistpropagatoren ausgedrückt werden als

$$D_{\mu\nu}^{ab}(z) = \delta^{ab} \delta_{\mu\nu} \Delta^L(z, 4, 1, 0), \quad (3.14)$$

$$D_{FP}^{ab}(z) = \delta^{ab} \Delta^L(z, 4, 1, 0), \quad (3.15)$$

wobei $\Delta^L(z, 4, 1, 0)$ das vierdimensionale Integral in Gleichung (2.52) bzw. (2.57) repräsentiert. Hier wird der Notation des Kapitels 4 vorausgeeilt: Der dritte Eintrag in der Klammer weist auf die Potenz des Nenners hin (hier: $(\hat{k}^2)^q = \hat{k}^2 \Rightarrow q = 1$), der letzte auf $m = 0$.

3.2.1. Führende Ordnung

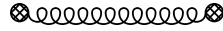


Abbildung 3.2.: Führende Ordnung des Feldstärkekorrelators.

Die Berechnung der führenden Ordnung von $\mathfrak{D}_{[\mu\nu][\lambda\omega]}^{(0)}(z)$ soll exemplarisch detailliert dargelegt werden. Eine graphische Darstellung ist in Abbildung 3.2 zu finden.

$$\mathfrak{D}_{[\mu\nu][\lambda\omega]}^{(0)}(z) = \frac{1}{2} \left\langle G_{\mu\nu}^{a,(0)}(x) S_{\text{adj}}^{ab,(0)}(x, y) G_{\lambda\omega}^{b,(0)}(y) W^{(0)} \right\rangle_0 \quad (3.16)$$

$$= \frac{\delta^{ab}}{2} \left\langle (\Delta_\mu^x A_\nu^a(x) - \Delta_\nu^x A_\mu^a(x)) (\Delta_\lambda^y A_\omega^b(y) - \Delta_\omega^y A_\lambda^b(y)) \right\rangle_0 \quad (3.17)$$

$$= \frac{N^2 - 1}{2} (\delta_{\nu\omega} \Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y \Delta^L(z, 4, 1, 0) - \delta_{\nu\lambda} \Delta_\mu^x \Delta_\omega^y \Delta^L(z, 4, 1, 0) - \delta_{\mu\omega} \Delta_\nu^x \Delta_\lambda^y \Delta^L(z, 4, 1, 0) + \delta_{\mu\lambda} \Delta_\nu^x \Delta_\omega^y \Delta^L(z, 4, 1, 0)), \quad (3.18)$$

wobei im letzten Schritt das Wick'sche Theorem und die Eigenschaft $\delta^{aa} = N^2 - 1$ der adjungierten Darstellung ausgenutzt wurde. Da der Korrelator von $z = x - y$ abhängt, muss außerdem zwischen der Gitterableitung nach x und der nach y unterschieden werden. Es gilt $\Delta_\mu^x f(z) = f \Delta_\mu f(z)$ und $\Delta_\mu^y f(z) = -^b \Delta_\mu f(z)$.

Die führende Ordnung ist offensichtlich total antisymmetrisch unter Vertauschung der Lorentz-Indizes. Diese Eigenschaft gilt für alle Feynmandiagramme in beliebigen Ordnungen in g und a , weshalb die Notation

$$\mathfrak{D}_{[\mu\nu][\lambda\omega]}^{(O_g)}(z) = \mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(O_g)}(z) - \mathcal{D}_{\nu\mu\lambda\omega}^{(O_g)}(z) - \mathcal{D}_{\mu\nu\omega\lambda}^{(O_g)}(z) + \mathcal{D}_{\nu\mu\omega\lambda}^{(O_g)}(z) \quad (3.19)$$

gewählt werden soll. Die totale Antisymmetrie resultiert aus der antisymmetrischen Form des Feldstärketensors in den Lorentz-Indizes.

Das heißt, es verbleiben für die führende Ordnung zu berechnende Ausdrücke wie

$$\mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(0)}(z) = \frac{N^2 - 1}{2} \delta_{\nu\omega} \Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikz}}{\hat{k}^2}. \quad (3.20)$$

3.2.2. Ordnung g

Zur Ordnung $O(g)$ gibt es keine Beiträge zum Feldstärkekorrelator, da alle Ausdrücke eine ungerade Anzahl von Eichfeldern beinhalten und somit nach dem Wick'schen Theorem null werden. Diese nicht zusammenhängenden Diagramme ergeben sich aus folgenden Kombinationen: $\langle G^{(1)} S_{\text{adj}}^{(0)} G^{(0)} W^{(0)} \rangle$, $\langle G^{(0)} S_{\text{adj}}^{(1)} G^{(0)} W^{(0)} \rangle$, $\langle G^{(0)} S_{\text{adj}}^{(0)} G^{(1)} W^{(0)} \rangle$ und $\langle G^{(0)} S_{\text{adj}}^{(0)} G^{(0)} W^{(1)} \rangle$.

3.2.3. Ordnung g^2 - Diagramme ohne Schwingerlinie

Auch in quadratischer Ordnung in der Kopplungskonstanten kommen Diagramme vor, die null ergeben. Dies betrifft die Fälle, die eine in sich selbst geschlossene Schleife („tadpole“) an einem 3-Punkt-Vertex beinhalten. Durch Kontraktion der Farbindizes treten hierbei immer Terme proportional zu $f^{iik} = 0$ auf, was konkret den 3-Gluon-Vertex und den Geist-Geist-Gluon-Vertex betrifft. In diesem und dem darauffolgenden Abschnitt sollen nur die Feynmandiagramme betrachtet werden, die zum Feldstärkekorrelator von null verschiedene Beiträge liefern. Zunächst werden die Diagramme besprochen, die sich mit dem führenden Term der Entwicklung der Schwingerlinie bilden lassen. Sie sind in Abbildung 3.3 dargestellt. Danach sollen Diagramme mit explizitem Beitrag der Eichfelder der Schwingerlinie einbezogen werden. In beiden Abschnitten werden die Entwicklungen in der Gitterkonstanten bis zur quadratischen Ordnung durchgeführt. Der Zusatz $+O(a^2)$ soll ausgespart werden.

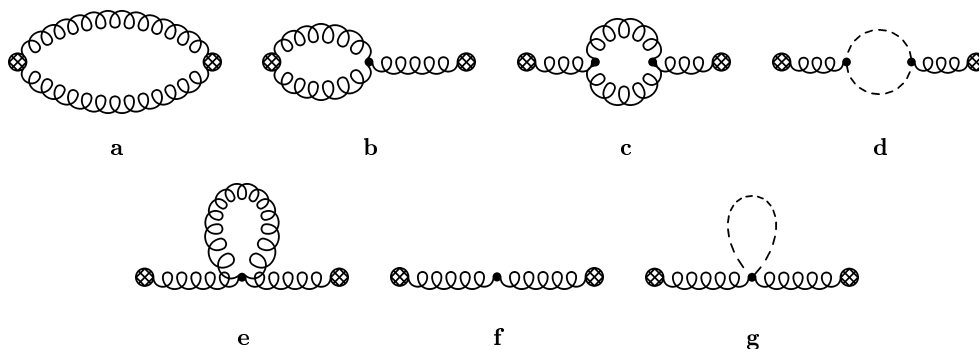


Abbildung 3.3.: Diagramme der Ordnung g^2 , Schwingerlinie in führender Ordnung.
a, b, c und **e**: Gluonbeiträge, **d**: Geistschleife, **f** und **g**: Gitterbeiträge aus Faddeev-Popov-Wirkung und Maßterm.

Diagramm a

Die Rechnung zu Diagramm **a** kann mittels der bereits erwähnten totalen Antisymmetrie und damit mit Gleichung (3.19) zusammengefasst werden zu

$$\mathfrak{D}_{[\mu\nu][\lambda\omega]}^{(2)a}(z) = \frac{1}{2} \left\langle G_{\mu\nu}^{a,(1)}(x) S_{\text{adj}}^{ab,(0)}(x,y) G_{\lambda\omega}^{b,(1)}(y) W^{(0)} \right\rangle_0 \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)a}(z) &= \frac{g^2 N(N^2 - 1)}{2} \left\{ \frac{\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\omega}}{2} (\Delta^L)^2 + a \delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\omega} \Delta^L (\Delta_\mu^x \Delta^L + \Delta_\lambda^y \Delta^L) \right. \\ &\quad + a^2 \left[\frac{\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\omega}}{4} ((\Delta_\lambda^y \Delta^L)(\Delta_\omega^y \Delta^L) + (\Delta_\mu^x \Delta^L)(\Delta_\nu^x \Delta^L)) \right. \\ &\quad + \delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\omega} (\Delta^L (\Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y \Delta^L) - (\Delta_\nu^x \Delta^L)(\Delta_\omega^y \Delta^L)) \\ &\quad + \frac{\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\lambda}}{2} (\Delta^L (\Delta_\nu^x \Delta_\omega^y \Delta^L) - (\Delta_\nu^x \Delta^L)(\Delta_\omega^y \Delta^L)) \\ &\quad + \frac{\delta_{\nu\lambda}\delta_{\nu\omega}}{2} (\Delta^L (\Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y \Delta^L) - (\Delta_\mu^x \Delta^L)(\Delta_\lambda^y \Delta^L)) \\ &\quad \left. \left. + \frac{\delta_{\mu\lambda}}{4} (\Delta^L (\Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y \Delta^L) - (\Delta_\nu^x \Delta^L)(\Delta_\omega^y \Delta^L)) \right] \right\}, \quad (3.22) \end{aligned}$$

wobei der Faktor $N(N^2 - 1) = \delta^{ab} f^{acd} f^{bcd}$ aus $f^{acd} f^{bcd} = N\delta^{ab}$ und $\delta^{aa} = N^2 - 1$ in der adjungierten Darstellung folgt und die verkürzte Schreibweise $\Delta^L(z, 4, 1, 0) = \Delta^L$ gewählt wurde.

Es werden daher Integrale und deren Ableitungen mit Vorfaktor $\frac{g^2 N(N^2 - 1)}{2}$ und weiteren Vorfaktoren von Kronecker-Deltas und Brüchen der folgenden Form benötigt:

$$\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikz}}{\hat{k}^2}, \quad a \left(\Delta_\lambda^y \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikz}}{\hat{k}^2} \right), \quad a^2 \left(\Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikz}}{\hat{k}^2} \right). \quad (3.23)$$

Diagramm b

Das Diagramm **b** betrifft die Fälle $\mathfrak{D}_{[\mu\nu][\lambda\omega]}^{(2)b1}(z) = \left\langle G^{(1)} S_{\text{adj}}^{(0)} G^{(0)} W^{(1,G)} \right\rangle$ und $\mathfrak{D}_{[\mu\nu][\lambda\omega]}^{(2)b2}(z) = \left\langle G^{(0)} S_{\text{adj}}^{(0)} G^{(1)} W^{(1,G)} \right\rangle$ und beinhaltet den 3-Gluon-Vertex. Beide Ausdrücke sind total antisymmetrisch in μ und ν , λ und ω und zusätzlich symmetrisch unter Austausch von α und β . Der Gesamtbeitrag zu Diagramm **b** ergibt sich aus der Summe der zwei oben genannten:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{[\mu\nu][\lambda\omega]}^{(2)b}(z) &= \frac{1}{2} \left\langle G_{\mu\nu}^{a,(1)}(x) S_{\text{adj}}^{ab,(0)}(x,y) G_{\lambda\omega}^{b,(0)}(y) W^{(1,G)}(y') \right\rangle_0 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\langle G_{\mu\nu}^{a,(0)}(x) S_{\text{adj}}^{ab,(0)}(x,y) G_{\lambda\omega}^{b,(1)}(y) W^{(1,G)}(y') \right\rangle_0. \quad (3.24) \end{aligned}$$

Die vier Summanden in Gleichung (3.12) setzen sich somit aus jeweils zwei Beiträgen zusammen, die durch Umbenennen der Indizes $\mu \leftrightarrow \lambda$ und $\nu \leftrightarrow \omega$ und gleichzeitiger Substitution $x \leftrightarrow y$ auseinander gewonnen werden können. Die Symmetrie in α und β führt dazu, dass überdies vor der Summation die Unterteilung $\mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)b}(z) = \sum_{\alpha\beta} \mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega(\alpha\beta)}^{(2)b}(z) = \sum_{\alpha\beta} \mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega\alpha\beta}^{(2)b}(z) + \mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega\beta\alpha}^{(2)b}(z)$ vorgenommen werden kann, was durch die Summe auf

$\mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)b}(z) = 2 \sum_{\alpha\beta} \mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega\alpha\beta}^{(2)b}(z)$ reduziert wird. Um das Feynmandiagramm zu berechnen, ist es ausreichend den Term

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)b1}(z) = & -\frac{g^2 a^4}{2} N(N^2 - 1) \sum_{y'} \left\{ \right. \\ & \delta_{\mu\omega} (\Delta_{\nu}^{y'} \Delta^{Lx'}) \Delta^{Lx'} (\Delta_{\lambda}^y \Delta^{Ly'}) + \delta_{\nu\omega} (\Delta^{Lx'})^2 (\Delta_{\lambda}^y \Delta_{\mu}^{y'} \Delta^{Ly'}) \\ & + a \left[\left((\delta_{\mu\omega} + \frac{1}{2} \delta_{\nu\omega}) (\Delta_{\nu}^{y'} \Delta^{Lx'}) - (\delta_{\mu\nu} + \frac{1}{2}) (\Delta_{\omega}^{y'} \Delta^{Lx'}) \right) (\Delta_{\mu}^x \Delta^{Lx'}) (\Delta_{\lambda}^y \Delta^{Ly'}) \right. \\ & + \left(\delta_{\mu\omega} (\Delta_{\nu}^x \Delta_{\nu}^{y'} \Delta^{Lx'}) + \frac{1}{2} \delta_{\mu\omega} (\Delta_{\nu}^x \Delta_{\mu}^{y'} \Delta^{Lx'}) - (\delta_{\mu\nu} + \frac{1}{2}) (\Delta_{\nu}^x \Delta_{\omega}^{y'} \Delta^{Lx'}) \right) \Delta^{Lx'} (\Delta_{\lambda}^y \Delta^{Ly'}) \\ & + \left. \left(\delta_{\nu\omega} (\Delta_{\lambda}^y \Delta_{\mu}^{y'} \Delta^{Ly'}) - \delta_{\mu\omega} (\Delta_{\lambda}^y \Delta_{\nu}^{y'} \Delta^{Ly'}) \right) \Delta^{Lx'} (\Delta_{\nu}^x \Delta^{Lx'}) \right] \\ & + \frac{a^2}{2} \left[\left(\delta_{\mu\omega} (\Delta_{\nu}^x \Delta_{\nu}^{y'} \Delta^{Lx'}) - \delta_{\nu\mu} (\Delta_{\nu}^x \Delta_{\omega}^{y'} \Delta^{Lx'}) \right) (\Delta_{\mu}^x \Delta^{Lx'}) (\Delta_{\lambda}^y \Delta^{Ly'}) \right. \\ & \left. + \delta_{\nu\omega} (\Delta_{\mu}^x \Delta^{Lx'}) (\Delta_{\nu}^x \Delta^{Lx'}) (\Delta_{\lambda}^y \Delta_{\mu}^{y'} \Delta^{Ly'}) \right] \left. \right\} \end{aligned} \quad (3.25)$$

zu betrachten, mit der verkürzten Schreibweise $\Delta^{Lx'} = \Delta^L(x - y', 4, 1, 0)$ und $\Delta^{Ly'} = \Delta^L(y - y', 4, 1, 0)$.

Das heißt, dass nach Ausklammern von Δ_{λ}^y und Ausführen der verbliebenen Gitterableitungen, was jeweils zu einem Faktor $1/a$ sowie Phasenfaktoren führt, bis auf Kronecker-Deltas, Phasen und Faktoren einhalb, Ausdrücke folgender Art zu berechnen sind:

$$-\frac{g^2 a^3}{2} N(N^2 - 1) \Delta_{\lambda}^y \sum_{y'} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x-y')}}{\hat{k}^2} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(x-y')}}{\hat{p}^2} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{e^{iq(y-y')}}{\hat{q}^2}. \quad (3.26)$$

Vertauscht man nun Summe und Integral und wendet die Definition der Deltafunktion auf dem Gitter an,

$$\delta^{(4)}(p) = \frac{a^4}{(2\pi)^4} \sum_x e^{-ipx}, \quad (3.27)$$

so findet man das Integral

$$-\frac{g^2 a^{-1}}{2} N(N^2 - 1) \Delta_{\lambda}^y \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{i(k+p)z}}{\hat{k}^2 \hat{p}^2 (\widehat{k+p})^2}. \quad (3.28)$$

Das Diagramm, welches sich ergäbe, nähme man den Term proportional zur Kopplungskonstanten aus der Faddeev-Popov-Wirkung, trägt nicht bei.

Diagramm c

Die Gluonschleife entsteht aus $\langle G^{(0)} S_{\text{adj}}^{(0)} G^{(0)} W^{(2, G^2)} \rangle$. Zusätzlich zur totalen Antisymmetrie findet man Symmetrie unter Austausch von $\alpha \leftrightarrow \beta$ und $\gamma \leftrightarrow \delta$ ², sodass der erste Term aus Gleichung (3.12)

$$\mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega(\alpha\beta)(\gamma\delta)}^{(2)c}(z) = \mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)c}(z) + \mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega\beta\alpha\gamma\delta}^{(2)c}(z) + \mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega\alpha\beta\delta\gamma}^{(2)c}(z) + \mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega\beta\alpha\delta\gamma}^{(2)c}(z) \quad (3.29)$$

² γ und δ sind die Lorentz-Indizes des zweiten Faktors des quadratischen Wechselwirkungsterms.

lautet. Durch die Summe über α, β, γ und δ vereinfacht sich obiger Ausdruck auf viermal den selben Summanden. Man erhält somit

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)c}(z) = & \frac{g^2 a^8}{4} N(N^2 - 1) \sum_{y', y''} \left\{ \right. \\
 & \delta_{\nu\omega} \sum_{\alpha} \left[(\Delta_{\mu}^x \Delta_{\alpha}^{y'} \Delta^{Lx'}) (\Delta_{\lambda}^y \Delta_{\alpha}^{y''} \Delta^{Ly''}) (\Delta^{Ly''})^2 - (\Delta_{\mu}^x \Delta_{\alpha}^{y'} \Delta^{Lx'}) (\Delta_{\lambda}^y \Delta^{Ly''}) (\Delta_{\alpha}^{y''} \Delta^{Ly''}) \Delta^{Ly''} \right. \\
 & \left. - (\Delta_{\mu}^x \Delta^{Lx'}) (\Delta_{\lambda}^y \Delta_{\alpha}^{y''} \Delta^{Ly''}) (\Delta_{\alpha}^{y'} \Delta^{Ly''}) \Delta^{Ly''} + (\Delta_{\mu}^x \Delta^{Lx'}) (\Delta_{\lambda}^y \Delta^{Ly''}) (\Delta_{\alpha}^{y'} \Delta_{\alpha}^{y''} \Delta^{Ly''}) \Delta^{Ly''} \right] \\
 & - (\Delta_{\mu}^x \Delta_{\omega}^{y'} \Delta^{Lx'}) (\Delta_{\lambda}^y \Delta_{\nu}^{y''} \Delta^{Ly''}) (\Delta^{Ly''})^2 + (\Delta_{\mu}^x \Delta_{\omega}^{y'} \Delta^{Lx'}) (\Delta_{\lambda}^y \Delta^{Ly''}) (\Delta_{\nu}^{y''} \Delta^{Ly''}) \Delta^{Ly''} \\
 & + (\Delta_{\mu}^x \Delta^{Lx'}) (\Delta_{\lambda}^y \Delta_{\nu}^{y''} \Delta^{Ly''}) (\Delta_{\omega}^{y'} \Delta^{Ly''}) \Delta^{Ly''} + 2(\Delta_{\mu}^x \Delta^{Lx'}) (\Delta_{\lambda}^y \Delta^{Ly''}) (\Delta_{\nu}^{y''} \Delta_{\omega}^{y'} \Delta^{Ly''}) \Delta^{Ly''} \\
 & - 3(\Delta_{\mu}^x \Delta^{Lx'}) (\Delta_{\lambda}^y \Delta^{Ly''}) (\Delta_{\nu}^{y''} \Delta^{Ly''}) (\Delta_{\omega}^{y'} \Delta^{Ly''}) \\
 & + \text{vorangegangene Summe unter Austausch von } y' \leftrightarrow y'', \\
 & \left. \alpha \leftrightarrow \gamma \text{ und } \beta \leftrightarrow \delta \right\}, \tag{3.30}
 \end{aligned}$$

wobei wieder $\Delta^L(x - y', 4, 1, 0)$ mit $\Delta^{Lx'}$ und $\Delta^{Ly''} = \Delta^L(y - y'', 4, 1, 0)$ und $\Delta^{Ly''} = \Delta^L(y' - y'', 4, 1, 0)$ abgekürzt wurde. Außerdem wurden hier $\Delta_{\mu} A_{\nu}$ und $\Delta_{\lambda} A_{\omega}$ aus dem Feldstärketensor nur mit jeweils einem Faktor aus der quadrierten Wilson-Wirkung kontrahiert. Die zweite Hälfte an Termen ergibt sich, wie bereits in Worten innerhalb Gleichung (3.30) beschrieben, unter Austausch der Lorentz-Indizes und Ortsvektoren innerhalb dieser Faktoren.

Damit ergeben sich bis auf Faktoren $\delta_{\nu\omega}$ und nach Ausführen der zwei Ableitungen nach y' und y'' bspw. Terme wie

$$\frac{g^2 a^6}{4} N(N^2 - 1) \Delta_{\mu}^x \Delta_{\lambda}^y \sum_{y', y''} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k d^4 p d^4 q d^4 t}{(2\pi)^{16}} \frac{e^{ik(x-y') + ip(y-y'') + iq(y'-y'') + it(y'-y'')}}{\hat{k}^2 \hat{p}^2 \hat{q}^2 \hat{t}^2}, \tag{3.31}$$

was wiederum nach zweimaliger Anwendung der Deltafunktion (Gleichung (3.27)) umgeformt werden kann zu

$$\frac{g^2 a^{-2}}{4} N(N^2 - 1) \Delta_{\mu}^x \Delta_{\lambda}^y \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikz}}{(\hat{k}^2)^2 \hat{p}^2 (\hat{k} - p)^2}. \tag{3.32}$$

Das Integral lässt sich in zwei Schritten berechnen, was bei der späteren Betrachtung hilfreich ist, siehe Unterkapitel 4.2.

Diagramm d

Die Geistschleife gewinnt man aus $\langle G^{(0)} S_{\text{adj}}^{(0)} G^{(0)} W^{(2,FP^2)} \rangle$. Hierbei ist darauf zu achten, dass die Produktregel für Ableitungen auf dem Gitter nicht der des Kontinuums entspricht (vgl. Gleichung (5.11)). Es gilt

$$\begin{aligned}
 {}^b \Delta_{\alpha} \left(A_{\alpha}^k(y') (1 + \frac{a}{2} \Delta_{\alpha}) \right) c^j(y') = & \frac{1}{2a} \left(A_{\alpha}^k(y') c^j(y') - A_{\alpha}^k(y' - a\hat{\alpha}) c^j(y' - a\hat{\alpha}) \right. \\
 & \left. + A_{\alpha}^k(y') c^j(y' + a\hat{\alpha}) - A_{\alpha}^k(y' - a\hat{\alpha}) c^j(y') \right). \tag{3.33}
 \end{aligned}$$

3. Der Feldstärkekorrelator

Um den Ausdruck des Diagramms **d** besser darstellen zu können, wird obige Summe mit $\frac{1}{2a} \sum_u^4 A_\alpha^k(y'_u) c^j(y'_u)$ systematisiert. Der Index u zählt alle vier Summanden von links nach rechts durch und soll gleichzeitig das richtige Vorzeichen implizieren. Da der Geist-Geist-Gluon-Vertex quadriert auftaucht, soll der zweite Index mit v bezeichnet werden. Es folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)d}(z) \simeq & -\frac{g^2 a^6}{16} N(N^2 - 1) \sum_{y', y'', \alpha, \beta} \sum_{u, v}^4 \left(\delta_{\nu\alpha} \delta_{\omega\beta} (\Delta_\mu^x \Delta^L(x - y'_u)) (\Delta_\lambda^y \Delta^L(y - y''_v)) \right. \\ & \left. + \delta_{\nu\beta} \delta_{\omega\alpha} (\Delta_\mu^x \Delta^L(x - y''_v)) (\Delta_\lambda^y \Delta^L(y - y'_u)) \right) (\Delta^L(y'_u - y''_v))^2. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Nach Ausführen der Summen über y', y'', α und β bleiben demnach Terme folgender Art zu berechnen:

$$-\frac{g^2 a^{-2}}{16} N(N^2 - 1) \Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikz}}{(\hat{k}^2)^2 \hat{p}^2 (\widehat{k-p})^2}. \quad (3.35)$$

Bis auf den Vorfaktor gleichen sie denen der Gluonschleife. Entsprechend kann auch dieses Integral in zwei Rechenschritten gelöst werden.

Diagramm e

Einen 4-Gluon-Vertex enthält $\langle G^{(0)} S_{\text{adj}}^{(0)} G^{(0)} W^{(2,G)} \rangle$, dessen erster Summand mit

$$\mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)e}(z) = -\frac{3g^2 a^4}{2} N(N^2 - 1) \delta_{\nu\omega} \Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y \sum_{y'} \Delta^L(x - y') \Delta^L(y - y') \Delta^L(0) \quad (3.36)$$

$$= -\frac{3g^2}{2} N(N^2 - 1) \delta_{\nu\omega} \left(\Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikz}}{(\hat{k}^2)^2} \right) \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\hat{p}^2} \quad (3.37)$$

beiträgt. Das Integral ohne Ortsabhängigkeit in Gleichung (3.37) ist eine Konstante, siehe Gleichung (2.58).

Diagramm f

Aus $\langle G^{(0)} S_{\text{adj}}^{(0)} G^{(0)} W^{(2,M)} \rangle$ lässt sich das Feynmandiagramm, das den 2-Gluon-Vertex beinhaltet, finden:

$$\mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)f}(z) = -\frac{g^2 a^2}{24} N(N^2 - 1) \delta_{\nu\omega} \Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y \sum_{y'} \Delta^L(x - y') \Delta^L(y - y') \quad (3.38)$$

$$= -\frac{g^2 a^{-2}}{24} N(N^2 - 1) \delta_{\nu\omega} \Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikz}}{(\hat{k}^2)^2}. \quad (3.39)$$

Diagramm g

Das Diagramm mit dem Geist-Geist-Gluon-Gluon-Vertex, $\langle G^{(0)} S_{\text{adj}}^{(0)} G^{(0)} W^{(2,FP)} \rangle$, gibt den Summanden

$$\mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)g}(z) = \frac{g^2 a^4}{12} N(N^2 - 1) \delta_{\nu\omega} \Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y \sum_{y'} \Delta^L(x - y') \Delta^L(y - y') (\Delta^L(a\hat{\nu}) + \Delta^L(a\hat{\omega})) \quad (3.40)$$

$$= \frac{g^2}{12} N(N^2 - 1) \delta_{\nu\omega} \left(\Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikz}}{(\hat{k}^2)^2} \right) \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ipa\hat{\nu}} + e^{ipa\hat{\omega}}}{\hat{p}^2}, \quad (3.41)$$

wobei die Ableitung nach y' vor der Wick-Kontraktion der Geistfelder ausgeführt wurde, da andernfalls eine doppelte Ableitung auf $\Delta^L(0, 4, 1, 0) = \frac{r_0}{a^2}$ gewirkt und somit den Beitrag des Diagramms aufgehoben hätte.

Das Feynmandiagramm, welches sich aus dem Antikommutatorterm in Gleichung (3.11) formen ließe, existiert nicht.

3.2.4. Ordnung g^2 - Diagramme mit Schwingerlinie

Die Diagramme, zu denen die Schwingerlinie in erster bzw. zweiter Ordnung in der Kopplungskonstanten beiträgt, sind in Abbildung 3.4 gezeigt.

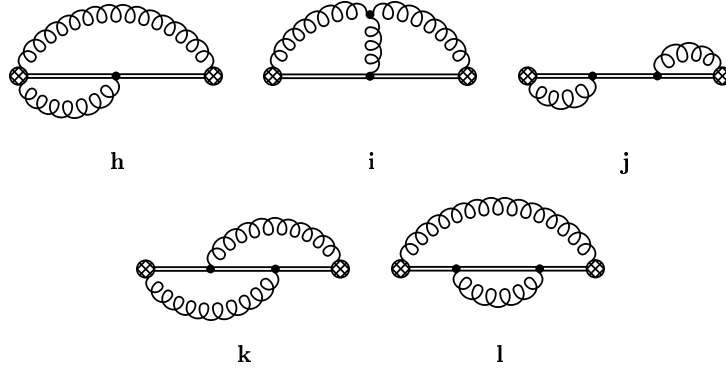


Abbildung 3.4.: Diagramme der Ordnung g^2 mit Schwingerlinienanteil.

Diagramm h

Diagramm **h** wird aus zwei Beiträgen gebildet,

$$\mathcal{D}_{[\mu\nu][\lambda\omega]}^{(2)g}(z) = \frac{1}{2} \left\langle G_{\mu\nu}^{a,(1)}(x) S_{\text{adj}}^{ab,(1)}(x, y) G_{\lambda\omega}^{b,(0)}(y) W^{(0)} \right\rangle_0 + \frac{1}{2} \left\langle G_{\mu\nu}^{a,(0)}(x) S_{\text{adj}}^{ab,(1)}(x, y) G_{\lambda\omega}^{b,(1)}(y) W^{(0)} \right\rangle_0, \quad (3.42)$$

sodass sich die vier Summanden in Gleichung (3.12) aus jeweils zwei Termen zusammensetzen. Diese können jedoch nicht wie bei Diagramm **b** durch Umbenennen der Indizes, $\mu \leftrightarrow \lambda$ und $\nu \leftrightarrow \omega$, ineinander umgewandelt werden. Allein die Hälfte der Argumente von

Δ^L sieht im ersten Beitrag anders aus ($-ma\hat{\rho}$) als im zweiten ($y - (x + ma\hat{\rho})$). Dadurch ergibt sich z. B. ein Term proportional $\Delta^L(0, 4, 1, 0)$ im ersten Beitrag, der im zweiten hingegen nicht existiert. Dies ist eine Folge der Diskretisierung und wird im Kontinuumslimit wieder behoben. Berechnet werden muss also

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)h}(z) = & -\frac{ig^2a}{2}N(N^2-1)\sum_{m=0}^{M-1}\left\{ \right. \\
 & \delta_{\mu\omega}\delta_{\nu\rho}\Delta^L(ma\hat{\rho})(\Delta_\lambda^y\Delta^L) + \delta_{\nu\omega}\delta_{\lambda\rho}\Delta^L(z+ma\hat{\rho})(\Delta_\mu^x\Delta^L) \\
 & + a\left[-(\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\omega} + \frac{1}{2}\delta_{\nu\omega}\delta_{\nu\rho})\Delta^L(ma\hat{\rho})(\Delta_\mu^x\Delta_\lambda^y\Delta^L) \right. \\
 & + (\delta_{\nu\omega}\delta_{\lambda\omega} + \frac{1}{2}\delta_{\nu\omega}\delta_{\omega\rho})\Delta^L(z+ma\hat{\rho})(\Delta_\mu^x\Delta_\lambda^y\Delta^L) \\
 & + (\delta_{\mu\omega}\delta_{\nu\rho} + \frac{1}{2}\delta_{\nu\rho}\delta_{\nu\omega})(\Delta_\lambda^y\Delta^L)\frac{1}{a}(\Delta^L(a\hat{\mu}-ma\hat{\rho})-\Delta^L(ma\hat{\rho})) \\
 & \left. - (\delta_{\nu\lambda}\delta_{\omega\rho} + \frac{1}{2}\delta_{\nu\omega}\delta_{\omega\rho})(\Delta_\mu^x\Delta^L)(\Delta_\lambda^y\Delta^L(z+ma\hat{\rho})) \right] \\
 & + \frac{a^2}{2}\left[\delta_{\nu\rho}\delta_{\mu\omega}\frac{1}{a}(\Delta^L(a\hat{\mu}-ma\hat{\rho})-\Delta^L(ma\hat{\rho}))(\Delta_\nu^x\Delta_\lambda^y\Delta^L) \right. \\
 & \left. + \delta_{\nu\omega}\delta_{\lambda\rho}(\Delta_\mu^x\Delta_\lambda^y\Delta^L)(\Delta_\omega^x\Delta^L(z+ma\hat{\rho})) \right] \left. \right\} \quad (3.43)
 \end{aligned}$$

Hier wurde wieder $\Delta^L(z, 4, 1, 0) = \Delta^L$ und außerdem die Symmetrie $\Delta^L(-z) = \Delta^L(z)$ benutzt, die zu Beginn des Kapitels 5 bewiesen wird. Die Ableitung nach x musste in einigen Fällen vor der Wick-Kontraktion durchgeführt werden um im weiteren Verlauf Terme, die andernfalls proportional zu $\Delta_\mu^x\Delta^L(ma\hat{\rho})$ und damit null wären, nicht zu verlieren.

Damit werden nach Ausführen der verbliebenen Ableitungen nach x bis auf δ -Faktoren und Faktoren von einhalb folgende Art Terme benötigt:

$$-\frac{ig^2a}{2}N(N^2-1)\left(\sum_{m=0}^{M-1}\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{e^{ikma\hat{\rho}}}{\hat{k}^2}\right)\left(\Delta_\lambda^y\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}}\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{e^{ipz}}{\hat{p}^2}\right). \quad (3.44)$$

Diagramm i

Dieses Feynmandiagramm entspringt $\langle G^{(0)}S_{\text{adj}}^{(1)}G^{(0)}W^{(1,G)} \rangle$ und ist wie Diagramm **b** neben der totalen Antisymmetrie in den Indizes μ, ν, λ und ω symmetrisch unter $\alpha \leftrightarrow \beta$. Man findet

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega\alpha\beta}^{(2)i}(z) = & \frac{ig^2a^5}{4}N(N^2-1)\sum_m\sum_{y'}\left\{ \right. \\
 & (\delta_{\nu\rho}\Delta_\mu^x\Delta_\omega^{y'}\Delta^{Lx'} - \delta_{\nu\omega}\Delta_\mu^x\Delta_\rho^{y'}\Delta^{Lx'})\Delta^L(x+ma\hat{\rho}-y')(\Delta_\lambda^y\Delta^{Ly'}) \\
 & + (\delta_{\nu\omega}\Delta_\lambda^y\Delta_\rho^{y'}\Delta^{Ly'} - \delta_{\omega\rho}\Delta_\lambda^y\Delta_\nu^{y'}\Delta^{Ly'})\Delta^L(x+ma\hat{\rho}-y') \\
 & \left. + (\delta_{\omega\rho}\Delta_\nu^{y'}\Delta^L(x+ma\hat{\rho}-y') - \delta_{\nu\rho}\Delta_\omega^{y'}\Delta^L(x+ma\hat{\rho}-y'))(\Delta_\mu^x\Delta^{Lx'})\Delta^L(x+ma\hat{\rho}-y') \right\}, \quad (3.45)
 \end{aligned}$$

was sich nach Ableiten nach x und y' und Summation über y' neben δ -Faktoren vereinfachen lässt zu

$$\frac{ig^2 a^{-1}}{4} N(N^2 - 1) \Delta_\lambda^y \sum_m^{M-1} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikz+ip(z+ma\hat{\rho})}}{\hat{k}^2 \hat{p}^2 (\widehat{k+p})^2}. \quad (3.46)$$

Das Diagramm mit dem Term der Ordnung $O(g)$ aus der Faddeev-Popov-Wirkung hat keinen Anteil am Feldstärkekorrelator.

Diagramm j und k

Die Diagramme **j** und **k** sind Resultate desselben Ausdrucks, $\langle G^{(0)} S_{\text{adj}}^{(2)} G^{(0)} W^{(0)} \rangle$. Der erste Term proportional g^2 in Gleichung (3.7) trägt nicht bei, sodass es

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)j,k}(z) = & -\frac{g^2 a^2}{4} N(N^2 - 1) \delta_{\nu\rho} \delta_{\omega\rho} \sum_{m,l}^{M-1} \left\{ \frac{1}{a} (\Delta^L(a\hat{\mu} - ma\hat{\rho}) - \Delta^L(ma\hat{\rho})) \right. \\ & \left. \times (\Delta_\lambda^y \Delta^L(z + la\hat{\rho})) \right\} \end{aligned} \quad (3.47)$$

zu berechnen gilt. Hierbei muss die Ableitung nach x bereits vor der Wick-Kontraktion ausgeführt werden. Weiterhin wurde $\Delta^L(-z) = \Delta^L(z)$ ausgenutzt, siehe Unterkapitel 5.1. Daher lautet z. B. der zweite Summand

$$\frac{g^2 a}{4} N(N^2 - 1) \delta_{\nu\rho} \delta_{\omega\rho} \Delta_\lambda^y \sum_{m,l}^{M-1} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikma\hat{\rho}} e^{ip(z+la\hat{\rho})}}{\hat{k}^2 \hat{p}^2}. \quad (3.48)$$

Diagramm l

Auch Diagramm **l** ergibt sich aus $\langle G^{(0)} S_{\text{adj}}^{(2)} G^{(0)} W^{(0)} \rangle$:

$$\mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)l}(z) = \frac{g^2 a^2}{4} N(N^2 - 1) \delta_{\nu\omega} \delta_{\rho\rho} \sum_{m,l}^{M-1} (\Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y \Delta^L(z)) \Delta^L((m-l)a\hat{\rho}) \quad (3.49)$$

$$= \frac{g^2 a^2}{4} N(N^2 - 1) \delta_{\nu\omega} \left(\Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikz}}{\hat{k}^2} \right) \left(\sum_{m,l}^{M-1} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(m-l)a\hat{\rho}}}{\hat{p}^2} \right). \quad (3.50)$$

Benutzt man den ersten Beitrag proportional g^2 im Ausdruck der adjungierten Schwinerlinie (3.7), so heben sich alle Terme nach der Kontraktion gegenseitig auf und tragen somit nicht bei.

In den folgenden zwei Kapiteln werden die notwendigen Werkzeuge zur weiteren Berechnung der Feynmandiagramme bereitgestellt.

4. Entwicklung der Korrelatorintegrale

Die im vorherigen Kapitel vorbereiteten Gleichungen der Feynmandiagramme für die störungstheoretische Behandlung des Feldstärkekorrelators beinhalten verschiedene Gitterintegrale. Für diese soll nun eine Entwicklung in der Gitterkonstanten a gefunden werden.

4.1. Integrale ohne Mischterme im Nenner

Die Integrale, die in den Gleichungen der führenden Ordnung und der Diagramme **a**, **e**, **f**, **g**, **h**, **j**, **k** und **l** auftreten, besitzen alle die Form $\Delta^L(z, 4, q, 0)$ mit $q = 1$ oder $q = 2$. Ihre Entwicklung kann auf zwei verschiedenen Wegen durchgeführt werden, was im Folgenden genauer besprochen werden soll. Zu erwähnen ist noch, dass der Propagator zudem bei $x = 0$ für $m \neq 0$ betrachtet wurde [41].

4.1.1. Paladini und Sexton

Paladini und Sexton fanden die asymptotische Entwicklung des massebehafteten skalaren Propagators mit Hilfe einer asymptotischen Entwicklung der modifizierten Besselfunktion erster Art $I_\nu(\nu^2\beta)$ für $\nu \rightarrow \infty$, was dem Limes $a \rightarrow 0$ entspricht [42]. Ihre Vorgehensweise und die für die Berechnung der in Kapitel 3 auftretenden Integrale relevanten Ergebnisse sollen hier zusammengefasst werden.

Der Gitterpropagator auf einem n -dimensionalen Gitter mit Gitterabstand a lässt sich mittels der modifizierten Besselfunktion erster Art umschreiben zu

$$\Delta^L(x, n, q, m) = \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{e^{ikx}}{(m^2 + \hat{k}^2)^q} \quad (4.1)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{q-1} e^{-\alpha m^2} \times \left\{ \prod_{\mu=1}^n e^{-\frac{2\alpha}{a^2}} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{dk_\mu}{2\pi} e^{\frac{2\alpha}{a^2} \cos k_\mu a} e^{ik_\mu x_\mu} \right\} \quad (4.2)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{q-1} e^{-\alpha m^2} \times \left\{ \prod_{\mu=1}^n e^{-\frac{2\alpha}{a^2}} \left(\frac{1}{a} \right) I_{\frac{x_\mu}{a}} \left(\frac{2\alpha}{a^2} \right) \right\}. \quad (4.3)$$

Dabei wurde im ersten Schritt die Schwinger-Parametrisierung, siehe [37] bzw. Gleichung (A.1), benutzt und das Integral über k in ein Produkt von n eindimensionalen Integralen umgeschrieben. Nach Ausnutzung der Beziehung $2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$ gelangt man auf das Zwischenergebnis (4.2). Im zweiten Schritt wurde dann die Substitution $k_\mu a = \theta_\mu$ durchgeführt und der von null verschiedene, symmetrische Teil des Integrals über θ_μ in eine Besselfunktion erster Art umgeschrieben, siehe [43] bzw. Gleichung (A.2).

Obwohl vom Propagator gesprochen wurde, tritt ein zusätzlicher Exponent q im Nenner von Gleichung (4.1) auf, wodurch eine Verallgemeinerung der Entwicklung auf weitere

Gitterintegrale erreicht wird. Es soll von nun an diese gesamte Gruppe von Integralen als Propagator oder Propagatorintegral bezeichnet werden.

Das Integral in Gleichung (4.3) kann nun im Kontinuumsimes gelöst werden. Für $a \rightarrow 0$ streben die Ordnung und das Argument der Besselfunktion nicht auf gleiche Weise gegen unendlich, sodass zunächst eine asymptotische Entwicklung der Besselfunktion für diesen Fall gefunden werden muss. Als Ausgangspunkt wird die Differenzialgleichung betrachtet, die von $y = I_\sigma(x) = I_{\frac{x_\mu}{a}}\left(\frac{2\alpha}{a^2}\right)$ erfüllt wird. Im Allgemeinen besitzt diese die Form [43]

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + \sigma^2)y = 0. \quad (4.4)$$

Mit den Substitutionen $\beta = \frac{2\alpha}{x_\mu^2}$ und $\nu = \frac{x_\mu}{a}$, ergo $I_{\frac{x_\mu}{a}}\left(\frac{2\alpha}{a^2}\right) \rightarrow I_\nu(\nu^2\beta)$ und $I_\nu(\nu^2\beta) = \frac{C}{\sqrt{\beta}} Y(\beta, \nu)$ erhält man schließlich eine Differenzialgleichung für $Y(\beta, \nu)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} Y(\beta, \nu) - \left(\nu^4 + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{\beta^2} \right) Y(\beta, \nu) = 0. \quad (4.5)$$

C ist dabei eine noch zu bestimmende Konstante, die später im Vergleich mit dem Kontinuum als $(2\pi\nu^2)^{-1/2}$ identifiziert wird.

An dieser Stelle wird nun der Grenzwert $\nu \rightarrow \infty$ betrachtet. Dazu führen Paladini und Sexton die asymptotische Relation

$$Y(\beta, \nu) \sim e^{\nu^2\beta + \int w(\beta, \nu) d\beta} \quad (4.6)$$

ein. Diese impliziert, dass der führende und alle weiteren Terme der Entwicklung der Lösung von Gleichung (4.5) ein exponentielles Verhalten aufweisen. Anhand der nach Substitution neu entstandenen Differenzialgleichung für $w(\nu, \beta)$ nehmen Paladini und Sexton an, dass $w(\nu, \beta)$ für große ν als unendliche Reihe geschrieben werden kann:

$$w(\beta, \nu) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\beta) \nu^{-2n}. \quad (4.7)$$

Das Einsetzen dieses Ausdrucks in die Differenzialgleichung von $w(\nu, \beta)$ und Abgleichen der Potenzen von ν ermöglicht eine rekursive Berechnung der Koeffizienten $a_n(\beta)$ und somit eine Reihendarstellung für $w(\nu, \beta)$ bis zu beliebiger Ordnung in ν . Auf Grund dessen erhält man nach Entwicklung der Exponentialfunktion (4.6) folgende asymptotische Entwicklung der Besselfunktion $I_\nu(\nu^2\beta)$:

$$\begin{aligned} I_\nu(\nu^2\beta) \underset{\nu \rightarrow \infty}{\sim} & (2\pi\nu^2\beta)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\nu^2\beta - \frac{1}{2\beta}\right) \\ & \times \left\{ 1 + \left[\frac{1}{8\beta} - \frac{1}{4\beta^2} + \frac{1}{24\beta^3} \right] \nu^{-2} + O(\nu^{-4}) \right\}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Nun müssen β und ν durch α , x_μ und a ausgedrückt und Gleichung (4.8) in Gleichung (4.3) eingesetzt werden, sodass ein Ausdruck in geraden Potenzen von a für den Gitterpropagator gefunden wird:

$$\Delta^L(x, n, q, m) = \frac{(4\pi)^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma(q)} \left(\Delta_0^L(x, n, q, m) + a^2 \Delta_2^L(x, n, q, m) + O(a^4) \right). \quad (4.9)$$

Die Koeffizienten sind durch die modifizierten Besselfunktionen zweiter Art $K_\rho \left[m (x^2)^{\frac{1}{2}} \right]$ gegeben und lassen sich mittels der Funktion $P_\rho(m, x) = \left[\frac{2m}{(x^2)^{\frac{1}{2}}} \right]^\rho K_\rho \left[m (x^2)^{\frac{1}{2}} \right]$ schreiben als

$$\Delta_0^L(x, n, q, m) = 2P_{\frac{n}{2}-q}(m, x) \quad (4.10)$$

$$\Delta_2^L(x, n, q, m) = \frac{n}{8}P_{1+\frac{n}{2}-q}(m, x) - \frac{x^2}{8}P_{2+\frac{n}{2}-q}(m, x) + \frac{x^4}{96}P_{3+\frac{n}{2}-q}(m, x). \quad (4.11)$$

Es kann leicht gezeigt werden, dass der auf diese Weise umgeschriebene Gitterpropagator für $a \rightarrow 0$ in den Kontinuumspropagator übergeht, siehe Gleichung (A.4).

Die Entwicklung des masselosen Propagators ergibt sich im Limes $m(x^2)^{1/2} \rightarrow 0$, was einer Entwicklung der Besselfunktion zweiter Art, $K_\rho \left[m (x^2)^{\frac{1}{2}} \right]$, siehe [43], entspricht. Nach Ausführen des Limes findet man für $\rho \neq 0$:

$$\lim_{m \rightarrow 0} P_\rho(m, x) = \frac{2^{2\rho-1}}{(x^2)^\rho} \Gamma(\rho). \quad (4.12)$$

Hiermit folgt aus Gleichung (4.9):

$$\begin{aligned} \Delta^L(x, n, q, 0) = & \frac{(4\pi)^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma(q)} 2^{n-2q} \left\{ \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-q)}{(x^2)^{\frac{n}{2}-q}} + a^2 \left(\frac{n\Gamma(1+\frac{n}{2}-q)}{4(x^2)^{1+\frac{n}{2}-q}} - \frac{x^2\Gamma(2+\frac{n}{2}-q)}{(x^2)^{2+\frac{n}{2}-q}} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{x^4\Gamma(3+\frac{n}{2}-q)}{3(x^2)^{3+\frac{n}{2}-q}} \right) + O(a^4) \right\}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Der Propagator eines masselosen Teilchens in 4 Dimensionen lautet somit ($q = 1$):

$$\Delta^L(x, 4, 1, 0) = (4\pi)^{-2} \left\{ \frac{4}{x^2} + a^2 \frac{4}{(x^2)^2} \left(2 \frac{x^4}{(x^2)^2} - 1 \right) + O(a^4) \right\}. \quad (4.14)$$

Wenn $n = 4$ und $q = 2$ ist $\rho = 0$ und es muss für den führenden Term (4.10)

$$P_0(m, x) \underset{m \rightarrow 0}{\sim} -\gamma_E - \ln \left(\frac{m(x^2)^{\frac{1}{2}}}{2} \right) \quad (4.15)$$

beachtet werden [43]. $\gamma_E \simeq 0,5772$ bezeichnet hierbei die Euler-Mascheroni-Konstante. Gleichung (4.13) gibt somit das im Infraroten (IR) regularisierte¹ Ergebnis

$$\Delta^L(x, 4, 2, 0) = \frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ -2\gamma_E - \ln(m^2 x^2) + \ln 4 + a^2 \frac{2x^4}{3(x^2)^3} \right\} + O(a^4). \quad (4.16)$$

Für den Fall, dass ρ Element der negativen ganzen Zahlen ist, gibt es keine Lösung von Gleichung (4.13), da die Gammafunktionen divergieren. Auch für $x = 0$ kann die Methode von Paladini und Sexton nicht angewendet werden. Letzteres wird in Kapitel 6 genauer untersucht.

¹Um Divergenzen im infraroten Bereich zu vermeiden, wird u. a. eine von null verschiedene Masse gewählt, siehe z. B. [44].

Die vorangegangene Zusammenfassung führt nur Terme in den Entwicklungen auf, die relevant zur Berechnung der Beiträge der Diagramme aus Kapitel 3 sind. Höhere Ordnungen bis einschließlich der Ordnung $O(a^6)$ sind in der Publikation zu finden.

Auf Grund der eben genannten Schwächen der Entwicklung des Propagatorintegrals mittels der Technik von Paladini und Sexton und der mangelnden Beschreibung von Integralen mit zwei verschiedenen Impulsen und deren Mischtermen im Nenner, wird im nächsten Abschnitt eine alternative Berechnungsmethode vorgestellt.

4.1.2. Lüscher und Weisz

Lüscher und Weisz benutzten in ihrer Arbeit zur Berechnung von Feynmanintegralen im vierdimensionalen Ortsraum unter anderem die asymptotische Entwicklung des masselosen Propagators im Limes $x \rightarrow \infty$ für $q = 1$ und $q = 2$ [45]. Zur Herleitung verwendeten sie die Entwicklung einer Hilfsfunktion $I(x)$ für große x , die anfänglich besprochen werden soll. Im Anschluss werden $\Delta^L(x, 4, 1, 0)$ und $\Delta^L(x, 4, 2, 0)$ betrachtet.

Zuerst muss jedoch eine Beziehung zwischen den dimensionslosen Integralen im Artikel von Lüscher und Weisz und den dimensionsbehafteten Ausdrücken, die in dieser Arbeit Verwendung finden, hergestellt werden. Das Integral $\Delta^L(x, 4, q, 0)$ kann mit Hilfe der Substitutionen $p' = ap$ und $x' = x/a$ geschrieben werden als

$$\Delta^L(x, 4, q, 0) = \frac{1}{a^{4-2q}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip'x'}}{(\hat{p}'^2)^q}, \quad (4.17)$$

wobei der Nenner nun durch $\hat{p}'^2 = 4 \sum_{\mu=1}^4 \sin^2\left(\frac{p'_\mu}{2}\right)$ definiert ist. Hier stehen gestrichelte Größen für dimensionslose Variablen. Im Folgenden soll diese Markierung allerdings unterlassen werden.

Hilfsfunktion

Die Funktion

$$I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ipx} e^{-p^2} Q(p) (p^2)^{-n} \quad (4.18)$$

ist absolut konvergent und für alle $x \in \mathbb{R}^4$ wohldefiniert, falls $Q(p)$ ein homogenes Polynom vom Grad d ist und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, mit $d - 2n \geq -3$. Die letzte Bedingung schließt eine Infrarotdivergenz aus. Für $n = 1$ wird mit Hilfe der Schwinger-Parametrisierung (Gleichung (A.1)), $Q(p)e^{ipx} = Q(-i\partial_x)e^{ipx}$ und einer zweckmäßigen Substitution

$$I(x) = Q(-i\partial_x) \int_1^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ipx} e^{-tp^2} \quad (4.19)$$

$$= Q(-i\partial_x) (4\pi^2 x^2)^{-1} \left(1 - e^{-\frac{x^2}{4}}\right) \quad (4.20)$$

$$\underset{x \rightarrow \infty}{\sim} Q(-i\partial_x) (4\pi^2 x^2)^{-1} \quad (4.21)$$

gefunden. Nach der quadratischen Ergänzung wurde im zweiten Schritt das Gauß'sche Integral und dann das Integral über t mittels einer weiteren Substitution gelöst. Im Falle von $n \geq 2$ wird analog vorgegangen, sodass sich

$$I(x) = Q(-i\partial_x) \frac{1}{(n-1)!} \int_1^{\infty} dt (t-1)^{n-1} (4\pi t)^{-2} (1 - T_m) e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad (4.22)$$

ergibt. Zuvor wurde

$$Q(p)e^{ipx} = Q(-i\partial_x)(1 - T_m)e^{ipx} \quad (4.23)$$

benutzt, mit dem Taylor-Operator $T_m f(x) = \sum_{k=0}^m \frac{x^k}{k!} \partial_x^k f(0)$. Der zweite Term in Gleichung (4.23) ergibt null, da der Grad d von $Q(p)$ größer als $m \equiv 2n - 4$ ist. Differenziation und Impulsintegral konnten vertauscht werden, weil das Integral über $(1 - T_m)e^{ipx}e^{-p^2}(p^2)^{-n}$ absolut konvergent ist. Im letzten Schritt wird für $(t - 1)^{n-1}$ der binomische Satz² angewendet:

$$I(x) = \frac{1}{(4\pi)^2} \sum_{\mu=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-1-\mu}}{\mu!(n-1-\mu)!} Q(-i\partial_x) \int_0^1 dt t^{-\mu} \left\{ e^{-\frac{tx^2}{4}} - \sum_{\nu=0}^{\mu-1} \frac{1}{\nu!} \left(-\frac{tx^2}{4}\right)^\nu \right\}. \quad (4.24)$$

Mittels partieller Integration können nun alle Terme mit $\mu \geq 1$ auf

$$\int_0^1 dt t^{-1} \left(e^{-\frac{tx^2}{4}} - 1 \right) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} -\ln(x^2) + \text{Konstante} + \dots \quad (4.25)$$

reduziert werden, sodass schließlich die asymptotische Entwicklung der Hilfsfunktion für $n \geq 1$ gefunden wird:

$$I(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{(4\pi)^2} Q(-i\partial_x) \left\{ \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{4}{x^2} + \sum_{\mu=1}^{n-1} \frac{(-1)^{n-1}}{(\mu-1)!\mu!(n-1-\mu)!} \left(\frac{x^2}{4}\right)^{\mu-1} \ln(x^2) \right\}. \quad (4.26)$$

Entwicklung des Propagators

Um die Entwicklung des Integrals

$$G(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ipx}}{\hat{p}^2} \quad (4.27)$$

für $x \rightarrow \infty$ durchzuführen, wird ein Äquivalent gebraucht, das zu allen Ordnungen in $|x|^{-1}$ Gleichung (4.27) entspricht. Dies wird von

$$G_h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ipx} h\left(\frac{p}{\pi}\right) (\hat{p}^2)^{-1} \quad (4.28)$$

erfüllt. $h(p)$, $p \in \mathbb{R}^4$, ist eine glatte Funktion mit der Eigenschaft

$$h(p) = \begin{cases} 1 & \text{für } |p| \leq 1, \\ 0 & \text{für } |p| \geq 2. \end{cases} \quad (4.29)$$

Wird die Entwicklung von $e^{p^2}(\hat{p}^2)^{-1}$ mit e^{-p^2} multipliziert und vom Integranden der Gleichung (4.28) abgezogen, so wird die Singularität an der Stelle $p = 0$ geglättet und man erhält

$$G(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ipx} e^{-p^2} \left\{ \frac{1}{p^2} + \frac{1}{12} \frac{p^4}{(p^2)^2} + \dots \right\}. \quad (4.30)$$

²Der binomische Satz lautet $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$, $n \in \mathbb{N}$, [46].

Im Vergleich mit der Entwicklung der Hilfsfunktion aus Abschnitt 4.1.2 findet man schließlich

$$G(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{4\pi^2 x^2} \left\{ 1 - \frac{x^2}{48} \partial_x^4 \ln(x^2) - \frac{x^2}{1440} \partial_x^6 \ln(x^2) + \frac{x^2}{4608} (\partial_x^4)^2 x^2 \ln(x^2) \right\} + O(|x|^{-8}) \quad (4.31)$$

$$\underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{4\pi^2 x^2} \left\{ 1 - \frac{1}{x^2} + 2 \frac{x^4}{(x^2)^3} - 4 \frac{1}{(x^2)^2} + 16 \frac{x^4}{(x^2)^4} - 48 \frac{x^6}{(x^2)^5} + 40 \frac{(x^4)^2}{(x^2)^6} + \dots \right\}. \quad (4.32)$$

Die asymptotische Entwicklung des Integrals

$$K(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ipx} - 1}{(\hat{p}^2)^2} \quad (4.33)$$

$$\underset{x \rightarrow \infty}{=} -\frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \ln(x^2) + c_1 - \frac{2x^4}{3(x^2)^3} + O(|x|^{-4}) \right\} \quad (4.34)$$

erfolgt mit der soeben beschriebenen Vorgehensweise. $c_1 \simeq 3,5601$ ist dabei eine Konstante, deren genauerer Wert in der Publikation angegeben ist.

Die gesuchten Entwicklungen für $\Delta^L(x, 4, 1, 0)$ und $\Delta^L(x, 4, 2, 0)$ werden unter Anwendung der Beziehung (4.17) und der Substitutionen $x \rightarrow x/a$ und $p \rightarrow ap$ gefunden. Da $\Delta^L(x, 4, 2, 0)$ dem Integral über den Minuenden in $K(x)$ entspricht, muss zu $K(x)$ der Subtrahend wieder hinzuaddiert werden. Dessen Wert kann im masselosen Limes oder in dimensionaler Regularisierung³ angegeben werden [20]:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\hat{p}^2)^2} = \lim_{m \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(\hat{p}^2)^2 + m^2} = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{1}{(4\pi)^2} (-\ln m^2 - \gamma_E + F_0) \quad (4.35)$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^{4-2\epsilon} p}{(2\pi)^{4-2\epsilon}} \frac{1}{(\hat{p}^2)^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(4\pi)^2} \left(-\frac{1}{\epsilon} - \ln 4\pi + F_0 \right), \quad (4.36)$$

wobei γ_E wieder die Euler-Mascheroni-Konstante bezeichnet und $F_0 \simeq 4,3692$ eine Konstante ist, die bei der rekursiven, numerischen Berechnung von bosonischen Gitterintegralen eine fundamentale Rolle spielt⁴.

Mit den Gleichungen (4.32) bis (4.36) ergibt sich für die zum Teil IR-regularisierten Propagatorintegrale

$$\Delta^L(x, 4, 1, 0) = \frac{1}{4\pi^2 x^2} \left\{ 1 - \frac{a^2}{x^2} + 2 \frac{x^4}{(x^2)^3} a^2 + O(a^4) \right\}, \quad (4.37)$$

$$\Delta^L(x, 4, 2, 0) = -\frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \ln(m^2 a^2) + \gamma_E - F_0 + c_1 + \ln \frac{x^2}{a^2} - \frac{2x^4}{3(x^2)^3} a^2 + O(a^4) \right\}, \quad \text{bzw.} \quad (4.38)$$

$$\Delta^L(x, 4, 2, 0) = -\frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{\epsilon} + \ln 4\pi - F_0 + c_1 + \ln \frac{x^2}{a^2} - \frac{2x^4}{3(x^2)^3} a^2 + O(a^4) \right\}. \quad (4.39)$$

Vergleicht man diese Ergebnisse mit jenen von Paladini und Sexton, kann man feststellen, dass die zwei Entwicklungen für $\Delta^L(x, 4, 1, 0)$ und für $\Delta^L(x, 4, 2, 0)$ genau übereinstimmen. Die konstanten Terme in den Gleichungen (4.38) und (4.16) gleichen einander:

³Regularisierungsschemata werden z. B. in [37] oder in [44] besprochen.

⁴Die Herkunft und ein genauerer Wert der Konstanten F_0 können in [20] gefunden werden.

$-2\gamma_E + \ln 4 = -\gamma_E + F_0 - c_1$. Die Konstanten sind jedoch unwesentlich für die Berechnung des Feldstärkekorrelators, weil bei der störungstheoretischen Betrachtung vor jedem der auftretenden Integrale mindestens eine Gitterableitung steht, die die Terme verschwinden lässt. Somit ist auch die weitere Auseinandersetzung mit der zuvor notwendigen Regularisierung hinfällig.

4.2. Integrale der Diagramme b, c, d und i

Bisher konnte für diese Gitterintegrale keine Lösung gefunden werden. Wenigstens die Integrale der Diagramme **c** und **d** können in einem ersten Schritt mit Hilfe einer weiteren Funktion aus der Veröffentlichung von Lüscher und Weisz umgeformt werden,

$$A(p) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\hat{k}^2(\widehat{k+p})^2} \quad (4.40)$$

$$\stackrel{p \rightarrow 0}{=} \frac{1}{(4\pi)^2} [-\ln(p^2) + 2] + P_2 + O(p^2), \quad (4.41)$$

sodass sich

$$\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikz}}{(\hat{k}^2)^2 \widehat{p}^2 (\widehat{k+p})^2} = \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikz}}{(\hat{k}^2)^2} \left\{ \frac{1}{(4\pi)^2} [-\ln(k^2) + 2] + P_2 + O(k^2) \right\} \quad (4.42)$$

ergibt. $P_2 \simeq 0,0240$ ist eine Konstante, die numerisch bestimmt werden kann [45]. Das Integral über den zweiten und dritten Term ist nach den vorangegangenen Abschnitten bekannt. Dahingegen kann das Integral, welches den Logarithmus des Impulses enthält, bisher nicht für große x dargestellt werden.

5. Gitterableitungen

In diesem Kapitel werden die für die weitere Berechnung benötigten Ableitungen der Entwicklungen der Gitterintegrale aus Kapitel 4 bereitgestellt. Zunächst jedoch soll auf die Invarianz des Integrals $\Delta^L(z, n, q, 0)$ unter $k \rightarrow -k$ eingegangen werden.

5.1. Symmetrie des Propagators unter Impulsumkehr

Da $\Delta^L(z, n, q, 0)$ nur vom Abstand zwischen x und y abhängt, weist es eine Symmetrie unter Umkehrung der Translationsrichtung, $z \rightarrow -z$, auf, was $k \rightarrow -k$ entspricht. Das heißt, es gilt $\Delta^L(z, n, q, 0) = \Delta^L(-z, n, q, 0)$:

$$\begin{aligned}
 \Delta^L(-z, n, q, 0) &= \left[\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \right]^n \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{e^{-ikz}}{(\hat{k}^2)^q} \\
 &\stackrel{k \rightarrow -k}{=} \left[\int_{\frac{\pi}{a}}^{-\frac{\pi}{a}} \right]^n \frac{(-1)^n d^n k}{(2\pi)^n} \frac{e^{ikz}}{(\hat{k}^2)^q} \\
 &= (-1)^n (-1)^n \left[\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \right]^n \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{e^{ikz}}{(\hat{k}^2)^q} \\
 &= \Delta^L(z, n, q, 0).
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Dies wiederum bedeutet, dass auch für alle Ableitungen gilt

$$\Delta_\mu \Delta^L(z, n, q, 0) = \Delta_\mu \Delta^L(-z, n, q, 0) \tag{5.2}$$

$$\Delta_\mu \Delta_\nu \Delta^L(z, n, q, 0) = \Delta_\mu \Delta_\nu \Delta^L(-z, n, q, 0). \tag{5.3}$$

Mit dieser Symmetrie fallen alle Terme in

$$\Delta^L(z, n, q, 0) = \frac{1}{2} (\Delta^L(z, n, q, 0) + \Delta^L(-z, n, q, 0)) \tag{5.4}$$

und dessen Ableitungen, die proportional zu ungeraden Potenzen in z bzw. z_μ sind, weg. Die Rechnungen im Anschluss zeigen, dass dies für keine oder eine gerade Anzahl an Ableitungen auf Terme von ungerader Ordnung in a zutrifft. Das Ergebnis einer ungeraden Zahl an Ableitungen gibt nur Terme ungerader Ordnung in der Gitterkonstanten. Bei der Berechnung der Korrelatorterme muss entsprechend auf die vorliegende Symmetrie Acht gegeben werden.

Bemerkt sei überdies, dass die Invarianz unter Impulsumkehr auch für massebehaftete Integrale gilt: $\Delta^L(z, n, q, m \neq 0) = \Delta^L(-z, n, q, m \neq 0)$.

5.2. Ableitungen der Propagatorintegrale

Um die Diagramme **a**, **e**, **f** und das der führenden Ordnung zu berechnen, werden zusätzlich zu der Entwicklung der Integrale $\Delta^L(z, n, q, 0)$, wie sie im vorangegangenen Kapitel beschrieben wurde, deren Ableitungen gebraucht. Abgeleitet werden müssen

$$\Delta^L(z, n, q, 0) = \frac{(4\pi)^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma(q)} 2^{n-2q} \left\{ \frac{\Gamma(\frac{n}{2} - q)}{(z^2)^{\frac{n}{2}-q}} + a^2 \left(\frac{\frac{n}{4}\Gamma(1 + \frac{n}{2} - q) - \Gamma(2 + \frac{n}{2} - q)}{(z^2)^{1+\frac{n}{2}-q}} + \frac{z^4\Gamma(3 + \frac{n}{2} - q)}{3(z^2)^{3+\frac{n}{2}-q}} \right) \right\}, \text{ bzw.} \quad (5.5)$$

$$\Delta^L(z, 4, 1, 0) = (4\pi)^{-2} \left\{ \frac{4}{z^2} + a^2 \frac{4}{(z^2)^2} \left(2 \frac{z^4}{(z^2)^2} - 1 \right) \right\} \text{ und} \quad (5.6)$$

$$\Delta^L(z, 4, 2, 0) = -\frac{1}{(4\pi)^2} \left\{ C + \ln \frac{z^2}{a^2} - \frac{2z^4}{3(z^2)^3} a^2 \right\}, \quad (5.7)$$

wobei C die konstanten und divergenten Terme in den Gleichungen (4.16) und (4.38) bzw. (4.39) ersetzt. Außerdem soll von nun an der Zusatz $+O(a^3)$ bzw. $+O(a^4)$ in allen Gleichungen vernachlässigt werden.

5.2.1. Einfache Gitterableitung

Um die einfache Ableitung der Entwicklungen (5.5) bis (5.7) zu berechnen, muss, wie bereits in Abschnitt 3.2.1 erwähnt, in Δ_μ^x und Δ_μ^y unterschieden werden, was mit $\Delta_\mu^{x/y}$ zusammengefasst werden soll. Kommen Plusminuszeichen vor, ist entsprechend x mit dem oberen und y mit dem unteren Vorzeichen korreliert. Es werden folgende Ableitungen benötigt:

$$\Delta_\mu^{x/y} \frac{1}{(z^2)^h} = \mp \frac{2hz_\mu}{(z^2)^{1+h}} + a \left(\frac{2(h+h^2)z_\mu^2}{(z^2)^{2+h}} - \frac{h}{(z^2)^{1+h}} \right) + a^2 \left(\pm \frac{2(h+h^2)z_\mu}{(z^2)^{2+h}} \mp \frac{4}{3} \frac{(2h+3h^2+h^3)z_\mu^3}{(z^2)^{3+h}} \right) \quad (5.8)$$

$$\Delta_\mu^{x/y} z^4 = \pm 4z_\mu^3 + 6az_\mu^2 \pm 4a^2 z_\mu + a^3. \quad (5.9)$$

Dabei wurde in Gleichung (5.8) nach Bildung der Gitterableitung $(z \pm a\hat{\mu})^2 = z^2 \pm 2az_\mu + a^2$ verwendet¹ und die binomische Reihe [46]

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \quad (5.10)$$

Der letzte Term in Gleichung (5.5) erfordert eine Produktregel für Gitterableitungen. Durch Einfügen von $-f(z)g(z \pm a\hat{\mu}) + f(z)g(z \pm a\hat{\mu})$ und geeignetes Umordnen der Terme gelangt man auf

$$\begin{aligned} \Delta_\mu^{x/y} (f(z)g(z)) &= \frac{1}{a} (f(z \pm a\hat{\mu})g(z \pm a\hat{\mu}) - f(z)g(z)) \\ &= \left(\Delta_\mu^{x/y} f(z) \right) g(z \pm a\hat{\mu}) + f(z) \left(\Delta_\mu^{x/y} g(z) \right). \end{aligned} \quad (5.11)$$

¹Eine Auflistung der Umformungen in Potenzreihen von Termen der Form $(z \pm a\hat{\mu} \pm / \mp \dots)^c$, $c \in \mathbb{N}$ befindet sich in Anhang B.

Hiermit ist

$$\Delta_\mu^{x/y} \frac{z^4}{(z^2)^h} = \left(\Delta_\mu^{x/y} \frac{1}{(z^2)^h} \right) (z \pm a\hat{\mu})^4 + \frac{1}{(z^2)^h} \left(\Delta_\mu^{x/y} z^4 \right). \quad (5.12)$$

Nach Ausmultiplizieren des Terms $(z \pm a\hat{\mu})^4$ findet man unter Beachtung der Symmetrie, siehe Unterkapitel 5.1, für $\Delta_\mu^{x/y} \Delta^L(z, n, q, 0)$ und $\Delta_\mu^{x/y} \Delta^L(z, 4, 1, 0)$:

$$\Delta_\mu^{x/y} \Delta^L(z, n, q, 0) = \frac{(4\pi)^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma(q)} 2^{n-2q} \frac{a}{2} (n-2q) \Gamma\left(\frac{n}{2} - q\right) \left(\frac{(2+n-2q)z_\mu^2}{(z^2)^{2+\frac{n}{2}-q}} - \frac{1}{(z^2)^{1+\frac{n}{2}-q}} \right), \quad (5.13)$$

$$\Delta_\mu^{x/y} \Delta^L(z, 4, 1, 0) = -\frac{a}{(2\pi)^2} \left(\frac{1}{(z^2)^2} - \frac{4z_\mu^2}{(z^2)^3} \right). \quad (5.14)$$

Die einfache Gitterableitung der Gleichung (5.7) ist für die Berechnung des Feldstärkekorrelators nicht notwendig und wird aus diesem Grund nicht aufgeführt.

5.2.2. Doppelte Gitterableitung

Die Berechnung der zweifachen Ableitung des Propagators $\Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y \Delta^L(z, n, q, 0)$ erfolgt analog zu der der ersten. Es werden also wieder die ausmultiplizierten Ausdrücke von Termen der Form $(z \pm a\hat{\mu} \pm / \mp \dots)^c$, $c \in \mathbb{N}$, siehe Anhang B, und Gleichung (5.10) gebraucht. An dieser Stelle soll zudem betont werden, dass auch hier für Lorentz-Indizes die Einstein'sche Summenkonvention nicht gilt. Man findet

$$\begin{aligned} \Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y \frac{1}{(z^2)^h} &= \frac{2h\delta_{\lambda\mu}}{(z^2)^{1+h}} - \frac{4h(1+h)z_\lambda z_\mu}{(z^2)^{2+h}} \\ &+ a \left(\frac{-2h(1+h)(z_\lambda - z_\mu)}{(z^2)^{2+h}} - \frac{4h(2+3h+h^2)z_\lambda(z_\lambda - z_\mu)z_\mu}{(z^2)^{3+h}} \right) \\ &+ a^2 \left(\frac{h(1+h)(1-2\delta_{\lambda\mu})}{(z^2)^{2+h}} - \frac{2h(2+3h+h^2)(z_\lambda^2 - 4z_\lambda z_\mu + z_\mu^2)}{(z^2)^{3+h}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{4h(6+11h+6h^2+h^3)z_\lambda z_\mu(2z_\lambda^2 - 3z_\lambda z_\mu + 2z_\mu^2)}{3(z^2)^{4+h}} \right). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Die Produktregel (5.11) lässt sich für nochmaliges Ableiten auf

$$\begin{aligned} \Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y (f(z)g(z)) &= (\Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y f(z))g(z - a\hat{\lambda} + a\hat{\mu}) + (\Delta_\lambda^y f(z))(\Delta_\mu^x g(z - a\hat{\lambda})) \\ &+ (\Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y g(z))f(z + a\hat{\mu}) + (\Delta_\lambda^y g(z))(\Delta_\mu^x f(z)) \end{aligned} \quad (5.16)$$

erweitern, sodass zusätzlich $\Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y z^4$, $\Delta_\mu^x (z - a\hat{\lambda})^4$ und $\frac{1}{((z+a\hat{\mu})^2)^h}$ berechnet werden müssen, da

$$\begin{aligned} \Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y \frac{z^4}{(z^2)^h} &= \left(\Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y \frac{1}{(z^2)^h} \right) (z - a\hat{\lambda} + a\hat{\mu})^4 + \left(\Delta_\lambda^y \frac{1}{(z^2)^h} \right) \left(\Delta_\mu^x (z - a\hat{\lambda})^4 \right) \\ &+ (\Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y z^4) \frac{1}{((z+a\hat{\mu})^2)^h} + (\Delta_\lambda^y z^4) \left(\Delta_\mu^x \frac{1}{(z^2)^h} \right). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Die Reihenentwicklung des Bruches geschieht mit Gleichung (5.10). Man erhält

$$\Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y z^4 = -\delta_{\lambda\mu} (12z_\mu^2 + 2a^2) \quad (5.18)$$

$$\Delta_\mu^x (z - a\hat{\lambda})^4 = 4z_\mu^3 + 6az_\mu^2 + 4a^2z_\mu + a^3 - \delta_{\lambda\mu} (12az_\mu^2 + 2a^3) \quad (5.19)$$

$$\frac{1}{((z + a\hat{\mu})^2)^h} = \frac{1}{(z^2)^h} - \frac{2hz_\mu a}{(z^2)^{1+h}} + a^2 \left(\frac{(h + h^2)2z_\mu^2}{(z^2)^{2+h}} - \frac{h}{(z^2)^{1+h}} \right) \quad (5.20)$$

und schließlich unter Beachtung der vorliegen Symmetrie (Gleichung (5.3)):

$$\begin{aligned} \Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y \Delta^L(z, n, q, 0) &= \frac{(4\pi)^{-\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2} - q)}{24\Gamma(q)} 2^{n-2q} \left\{ \frac{24(n-2q)\delta_{\lambda\mu}}{(z^2)^{1+\frac{n}{2}-q}} - \frac{24(n-2q)(2+n-2q)z_\lambda z_\mu}{(z^2)^{2+\frac{n}{2}-q}} \right. \\ &\quad + a^2 (-n^2 - n(2-4q) - 4(-1+q)q) \left(\frac{-6 + 3(8+n-4q)\delta_{\lambda\mu}}{(z^2)^{2+\frac{n}{2}-q}} \right. \\ &\quad + \frac{3(4+n-2q)(2z_\lambda^2 - (12+n-4q)z_\lambda z_\mu + 2(1+2\delta_{\lambda\mu})z_\mu^2)}{(z^2)^{3+\frac{n}{2}-q}} \\ &\quad + \frac{-(n^2 + n(10-4q) + 4(6-5q+q^2))(z^4\delta_{\lambda\mu} + 6z_\lambda^2 z_\mu^2)}{(z^2)^{4+\frac{n}{2}-q}} \\ &\quad \left. \left. + \frac{(4+n-2q)(n^2 + n(14-4q) + 4(12-7q+q^2))z^4 z_\lambda z_\mu}{(z^2)^{5+\frac{n}{2}-q}} \right) \right\}, \\ \Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y \Delta^L(z, 4, 1, 0) &= \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \frac{2\delta_{\lambda\mu}}{(z^2)^2} - \frac{8z_\lambda z_\mu}{(z^2)^3} \right. \\ &\quad + a^2 \left(\frac{2-8\delta_{\lambda\mu}}{(z^2)^3} + \frac{-12z_\lambda^2 + 72z_\lambda z_\mu - 12z_\mu^2 - 24\delta_{\lambda\mu} z_\mu^2}{(z^2)^4} \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{16z^4\delta_{\lambda\mu} + 96z_\lambda^2 z_\mu^2}{(z^2)^5} - \frac{160z^4 z_\lambda z_\mu}{(z^2)^6} \right) \right\}. \quad (5.21) \end{aligned}$$

Für die zweifache Ableitung von $\Delta^L(z, 4, 2, 0)$ wird nun nur noch die Ableitung des Logarithmus benötigt, da der zweite nicht konstante Term mit Gleichung (5.17) für $h = 3$ berechnet werden kann. Mittels

$$\ln\left(\frac{(x \pm y)^2}{a^2}\right) = \ln\left(\frac{x^2}{a^2}\right) + \ln\left(1 \pm \frac{2xy}{x^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) \quad (5.22)$$

und der Reihenentwicklung $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ [46] folgt

$$\begin{aligned} \Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y \ln\left(\frac{z^2}{a^2}\right) &= -\frac{2\delta_{\lambda\mu}}{z^2} + \frac{4z_\lambda z_\mu}{(z^2)^2} + a \left(\frac{2(z_\lambda - z_\mu)}{(z^2)^2} + \frac{8(z_\lambda^2 z_\mu - z_\lambda z_\mu^2)}{(z^2)^3} \right) \\ &\quad + a^2 \left(\frac{2\delta_{\lambda\mu} - 1}{(z^2)^2} + \frac{4(z_\lambda^2 + z_\mu^2) - 16z_\lambda z_\mu}{(z^2)^3} + \frac{16(z_\lambda^3 z_\mu + z_\lambda z_\mu^3) - 24z_\lambda^2 z_\mu^2}{(z^2)^4} \right). \quad (5.23) \end{aligned}$$

Der Gesamtausdruck $\Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y \Delta^L(z, 4, 2, 0)$ kommt exakt in dieser Form in Diagramm **e** vor, vgl. Gleichung (3.39), und ist bis auf Vorfaktoren in Gleichung (6.5) zu finden.

Es soll an dieser Stelle betont werden, dass $\ln z^2 \neq 2 \ln z$, da z^2 die Summe der einzelnen Komponenten zum Quadrat repräsentiert (vgl. Gleichung (2.54)).

5.3. Ableitungen zur Berechnung der Diagramme *g*, *h*, *j*, *k* und *l*

Die Integrale der Diagramme *g*, *h*, *j*, *k* und *l* müssen gesondert behandelt werden, da die Ortsvariable in manchen Exponenten der Exponentialfunktion *a*-abhängig ist.

Um den Beitrag von Diagramm *g* zu berechnen, wird noch der folgende Term gebraucht:

$$\Delta^L(a\hat{\nu}, 4, 1, 0) = \frac{1}{2a^2\pi^2}. \quad (5.24)$$

Für das Diagramm *h* werden folgende Faktoren zusätzlich benötigt:

$$\Delta^L(ma\rho, 4, 1, 0) = \frac{1 + m^2}{4a^2m^4\pi^2}, \quad (5.25)$$

$$\Delta^L(a\mu - ma\rho, 4, 1, 0) = \frac{2 + m^2 + 4m^4 + m^6 - 2m(5 - 10m + 12m^2 - 6m^3 + 3m^4)\delta_{\mu\rho}}{4a^2\pi^2(1 + m^2 - 2m\delta_{\mu\rho})^4}, \quad (5.26)$$

$$\Delta^L(z + ma\rho, 4, 1, 0) = \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{1}{z^2} + a^2 \left(-\frac{1}{(z^2)^2} - \frac{m^2}{(z^2)^2} + \frac{2z^4}{(z^2)^4} + \frac{4m^2z_\rho^2}{(z^2)^3} \right) \right), \quad (5.27)$$

$$\Delta_\mu^{x/y} \Delta^L(z + ma\hat{\rho}, 4, 1, 0) = \frac{a m}{(2\pi)^2} \left\{ \frac{-1 \mp 2\delta_{\mu\rho}}{(z^2)^2} + \frac{4z_\mu^2 \pm 8z_\mu z_\rho}{(z^2)^3} \right\}. \quad (5.28)$$

Sie können mittels der bereits vorgestellten Methoden gewonnen werden. Bis auf den dritten Term werden diese ebenfalls für die Berechnung der Diagramme *j* und *k* gebraucht.

Auch die Rechnung zu Diagramm *l* erfordert einen neuen Bestandteil:

$$\Delta^L((m - l)a\rho, 4, 1, 0) = \frac{1 + l^2 - 2lm + m^2}{4a^2(l - m)^4\pi^2}. \quad (5.29)$$

Zur Verallgemeinerung der notwendigen Berechnungen findet sich in Anhang B zudem eine Auflistung der Ableitungen der Terme in $\Delta^L(z \pm a\hat{\alpha}, 4, 2, 0)$. Dies deckt alle bisher aufgetauchten Konstellationen an Ableitungen von Termen, die Ortsvektoren beinhalten, ab.

6. Ergebnisse und Auswertung

In den zwei vorangegangenen Kapiteln wurde die Berechnung der Gitterintegrale, die für die störungstheoretische Behandlung des Feldstärkekorrelators notwendig sind, erörtert. Hier sollen nun die Ergebnisse der Beiträge der einzelnen Feynmandiagramme präsentiert werden. Wie bereits in Unterkapitel 4.2 erwähnt, konnte für einige der Graphen keine Lösung gefunden werden. Vorschläge zur Lösungsfindung werden am Ende des Kapitels vorgestellt. Außerdem wird in Abschnitt 6.2 das Problem der Berechnung des Propagatorintegrals $\Delta^L(0, n, 1, m)$ mit der Methode von Paladini und Sexton besprochen.

6.1. Entwicklung der berechenbaren Diagramme

Hier sollen die Ergebnisse für die Diagramme, deren Berechnungen jetzt bekannt sind, bis einschließlich $O(a^2)$ dargestellt werden. Die Rechnungen wurden in den Kapiteln 4 und 5 vorbereitet. Allgemein lässt sich sagen, dass durch die allgegenwärtigen Gitterableitungen keine konstanten Terme auftreten und dass der Faktor $N(N^2 - 1)$ wie erwartet und wie bereits in Rechnungen im Kontinuum gezeigt [47, 39], bei allen 1-Schleifen-Diagrammen vorkommt. Des Weiteren wird für die Diagramme **a** und **b** das Kontinuumsergebnis im Limes $a \rightarrow 0$ wiedergefunden. Ein Vergleich der Gitter- und Kontinuumsausdrücke der Diagramme mit Schwingerlinieninhalt kann nicht angestellt werden, da hierzu zuerst die Summen in den Gleichungen (6.8) bis (6.11) ausgewertet werden müssen.

6.1.1. Führende Ordnung

Die Entwicklung des Korrelators in führender Ordnung in der Kopplungskonstanten bis einschließlich $O(a^2)$ ergibt folgendes Ergebnis:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}_{[\mu\nu][\lambda\omega]}^{(0)}(z) = & \\
& \frac{(N^2 - 1)}{2\pi^2} \left\{ \frac{\delta_{\lambda\mu}\delta_{\nu\omega} - \delta_{\lambda\nu}\delta_{\mu\omega}}{(z^2)^2} - \frac{2(\delta_{\nu\omega}z_\lambda z_\mu - \delta_{\mu\omega}z_\lambda z_\nu - \delta_{\lambda\nu}z_\mu z_\omega + \delta_{\lambda\mu}z_\nu z_\omega)}{(z^2)^3} \right. \\
& + a^2 \left(\frac{\delta_{\lambda\mu} - \delta_{\lambda\nu} - \delta_{\mu\omega} + \delta_{\nu\omega} + 8(\delta_{\lambda\nu}\delta_{\mu\omega} - \delta_{\lambda\mu}\delta_{\nu\omega})}{2(z^2)^3} \right. \\
& + \frac{3z_\lambda^2(\delta_{\mu\omega} - \delta_{\nu\omega}) + 3z_\mu^2(\delta_{\lambda\nu} - \delta_{\nu\omega}) + 3z_\nu^2(\delta_{\mu\omega} - \delta_{\lambda\mu}) + 3z_\omega^2(\delta_{\lambda\nu} - \delta_{\lambda\mu})}{(z^2)^4} \\
& + \frac{6(\delta_{\lambda\nu}\delta_{\mu\omega} - \delta_{\lambda\mu}\delta_{\nu\omega})(z_\mu^2 + z_\nu^2) + 18(\delta_{\nu\omega}z_\lambda z_\mu - \delta_{\mu\omega}z_\lambda z_\nu - \delta_{\lambda\nu}z_\mu z_\omega + \delta_{\lambda\mu}z_\nu z_\omega)}{(z^2)^4} \\
& + \frac{8z^4(\delta_{\lambda\mu}\delta_{\nu\omega} - \delta_{\lambda\nu}\delta_{\mu\omega}) + 24(\delta_{\nu\omega}z_\lambda^2 z_\mu^2 - \delta_{\mu\omega}z_\lambda^2 z_\nu^2 - \delta_{\lambda\nu}z_\mu^2 z_\omega^2 + \delta_{\lambda\mu}z_\nu^2 z_\omega^2)}{(z^2)^5} \\
& \left. - \frac{40z^4(\delta_{\nu\omega}z_\lambda z_\mu - \delta_{\mu\omega}z_\lambda z_\nu - \delta_{\lambda\nu}z_\mu z_\omega + \delta_{\lambda\mu}z_\nu z_\omega)}{(z^2)^6} \right\}. \tag{6.1}
\end{aligned}$$

Für $a \rightarrow 0$ stimmt dieses mit dem des Kontinuums überein [47, 39]:

$$\mathfrak{D}_{[\mu\nu][\lambda\omega]}^{(0)}(z) \xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{N^2 - 1}{2\pi^2} \left((\delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\omega} - \delta_{\mu\omega}\delta_{\nu\lambda}) \frac{1}{(z^2)^2} - 2(\delta_{\mu\lambda}z_\nu z_\omega - \delta_{\mu\omega}z_\nu z_\lambda - \delta_{\nu\lambda}z_\mu z_\omega + \delta_{\nu\omega}z_\mu z_\lambda) \frac{1}{(z^2)^3} \right). \quad (6.2)$$

6.1.2. Ordnung g^2

Zur zweiten Ordnung in der Kopplungskonstanten können die Diagramme **a**, **e**, **f**, **g**, **i**, **j** und **k** berechnet werden. Die Entwicklungen in der Gitterkonstanten bis zur zweiten Ordnung sind in diesem Abschnitt zu finden.

Diagramm a

Diagramm **a** berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{[\mu\nu][\lambda\omega]}^{(2)a}(z) = & \frac{g^2}{2} N(N^2 - 1) (2\pi)^{-4} \left\{ \frac{\delta_{\lambda\mu}\delta_{\nu\omega} - \delta_{\lambda\nu}\delta_{\mu\omega}}{(z^2)^2} \right. \\ & + a^2 \left(\frac{4z^4(\delta_{\lambda\mu}\delta_{\nu\omega} - \delta_{\lambda\nu}\delta_{\mu\omega})}{(z^2)^5} \right. \\ & - \frac{\delta_{\lambda\mu}\delta_{\nu\omega} - \delta_{\lambda\nu}\delta_{\mu\omega} + 2(\delta_{\lambda\mu}\delta_{\lambda\nu}\delta_{\mu\omega} - \delta_{\lambda\mu}\delta_{\lambda\nu}\delta_{\nu\omega} - \delta_{\lambda\mu}\delta_{\mu\omega}\delta_{\nu\omega} + \delta_{\lambda\nu}\delta_{\mu\omega}\delta_{\nu\omega})}{(z^2)^3} \\ & + \frac{4(\delta_{\lambda\mu}\delta_{\nu\omega} - \delta_{\lambda\nu}\delta_{\mu\omega})(z_\lambda^2 + z_\mu^2 + z_\nu^2 + z_\omega^2) - \delta_{\nu\omega}z_\lambda z_\mu + \delta_{\mu\omega}z_\lambda z_\nu + \delta_{\lambda\nu}z_\mu z_\omega - \delta_{\lambda\mu}z_\nu z_\omega}{(z^2)^4} \\ & + \frac{2(\delta_{\lambda\mu}\delta_{\nu\omega} - \delta_{\lambda\nu}\delta_{\mu\omega})(z_\mu z_\nu + z_\lambda z_\omega) + 4\delta_{\lambda\nu}\delta_{\mu\omega}(z_\lambda z_\nu + z_\mu z_\omega) - 4\delta_{\lambda\mu}\delta_{\nu\omega}(z_\lambda z_\mu + z_\nu z_\omega)}{(z^2)^4} \\ & + \frac{2(\delta_{\lambda\mu}\delta_{\mu\omega}z_\nu(z_\lambda - z_\omega) + \delta_{\lambda\nu}\delta_{\nu\omega}z_\mu(-z_\lambda + z_\omega))}{(z^2)^4} \\ & \left. \left. + \frac{2(+\delta_{\lambda\mu}\delta_{\lambda\nu}(z_\mu - z_\nu)z_\omega + \delta_{\mu\omega}\delta_{\nu\omega}z_\lambda(-z_\mu + z_\nu))}{(z^2)^4} \right) \right\}. \quad (6.3) \end{aligned}$$

Im Limes $a \rightarrow 0$ wird hier ebenso das Kontinuumsergebnis wiedergefunden [47, 39]:

$$\mathfrak{D}_{[\mu\nu][\lambda\omega]}^{(2)a}(x - y) = \frac{g^2 N(N^2 - 1)}{32\pi^4 (z^2)^2} (\delta_{\lambda\mu}\delta_{\nu\omega} - \delta_{\lambda\nu}\delta_{\mu\omega}). \quad (6.4)$$

Diagramme e, f und g

Die Gesamtausdrücke der Diagramme **e**, **f** und **g** sind durch ihre Länge unübersichtlich und führen zu keinem Verständnissgewinn. Aus diesem Grund soll hier jeweils nur der erste

Terme aus Gleichung (3.19) angegeben werden:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)e}(z) = & -\frac{3g^2a^{-2}}{2(4\pi)^2}N(N^2-1)r_0\delta_{\nu\omega}\left\{\frac{2\delta_{\lambda\mu}}{z^2}-\frac{4z_\lambda z_\mu}{(z^2)^2}\right. \\
 & +a^2\left(\frac{1-2\delta_{\lambda\mu}}{(z^2)^2}-\frac{4z_\lambda^2-16z_\lambda z_\mu+4z_\mu^2+72\delta_{\lambda\mu}z_\mu^2}{(z^2)^3}\right. \\
 & \left.\left.+\frac{36z^4\delta_{\lambda\mu}+128z_\lambda^3z_\mu+24z_\lambda^2z_\mu^2+128z_\lambda z_\mu^3}{(z^2)^4}-\frac{288z^4z_\lambda z_\mu}{(z^2)^5}\right)\right\}, \quad (6.5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)f}(z) = & -\frac{g^2a^{-2}}{24(4\pi)^2}N(N^2-1)\delta_{\nu\omega}\left\{\frac{2\delta_{\lambda\mu}}{z^2}-\frac{4z_\lambda z_\mu}{(z^2)^2}\right. \\
 & +a^2\left(\frac{1-2\delta_{\lambda\mu}}{(z^2)^2}-\frac{4z_\lambda^2-16z_\lambda z_\mu+4z_\mu^2+72\delta_{\lambda\mu}z_\mu^2}{(z^2)^3}\right. \\
 & \left.\left.+\frac{36z^4\delta_{\lambda\mu}+128z_\lambda^3z_\mu+24z_\lambda^2z_\mu^2+128z_\lambda z_\mu^3}{(z^2)^4}-\frac{288z^4z_\lambda z_\mu}{(z^2)^5}\right)\right\}, \quad (6.6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)g}(z) = & \frac{g^2a^{-2}}{12(4\pi^2)^2}N(N^2-1)\delta_{\nu\omega}\left\{\frac{2\delta_{\lambda\mu}}{z^2}-\frac{4z_\lambda z_\mu}{(z^2)^2}\right. \\
 & +a^2\left(\frac{1-2\delta_{\lambda\mu}}{(z^2)^2}-\frac{4z_\lambda^2-16z_\lambda z_\mu+4z_\mu^2+72\delta_{\lambda\mu}z_\mu^2}{(z^2)^3}\right. \\
 & \left.\left.+\frac{36z^4\delta_{\lambda\mu}+128z_\lambda^3z_\mu+24z_\lambda^2z_\mu^2+128z_\lambda z_\mu^3}{(z^2)^4}-\frac{288z^4z_\lambda z_\mu}{(z^2)^5}\right)\right\}. \quad (6.7)
 \end{aligned}$$

Der Faktor $r_0 \simeq 0,1549$ in Gleichung (6.5) repräsentiert das letzte ortsunabhängige Integral in Gleichung (3.37). Seine Herkunft wurde bereits in Abschnitt 2.3.2 besprochen. Wie sich bereits in den Gleichungen (3.37), (3.39) und (3.41) andeutet, gleichen sich die Beiträge der Diagramme **e**, **f** und **g** bis auf konstante Vorfaktoren.

Diagramm h

Auch die Angabe des Ergebnisses von Diagramm **h** soll sich auf den ersten Summanden in Gleichung (3.19) beschränken:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)h}(z) = & -\frac{ig^2a}{2(2\pi)^4} N(N^2 - 1) \sum_{m=0}^{M-1} \left\{ \right. \\
 & \frac{1}{2a} \left(-\frac{(1+m^2)(-\delta_{\nu\rho}\delta_{\nu\omega} + 2\delta_{\lambda\mu}(2\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\omega} + \delta_{\nu\rho}(\delta_{\mu\omega} + \delta_{\nu\omega})))}{(z^2)^2 m^4} \right. \\
 & + \frac{g(m)\delta_{\nu\rho}(2(-1 + \delta_{\lambda\mu})\delta_{\mu\omega} - \delta_{\nu\omega})}{(z^2)^2(1+m^2-2m\delta_{\mu\rho})^4} \\
 & - \frac{4(1+m^2)z_\lambda(z_\lambda\delta_{\nu\rho}\delta_{\nu\omega} - 2z_\mu(2\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\omega} + \delta_{\nu\rho}(\delta_{\mu\omega} + \delta_{\nu\omega})))}{(z^2)^3 m^4} \\
 & \left. + \frac{4z_\lambda g(m)\delta_{\nu\rho}(-2z_\mu\delta_{\mu\omega} + z_\lambda(2\delta_{\mu\omega} + \delta_{\nu\omega}))}{(z^2)^3(1+m^2-2m\delta_{\mu\rho})^4} \right) \\
 & + a \left(\frac{(1+m^2)(-1+4\delta_{\lambda\mu})(2\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\omega} + \delta_{\nu\rho}(\delta_{\mu\omega} + \delta_{\nu\omega}))}{(z^2)^3 m^4} \right. \\
 & + \frac{\delta_{\nu\omega}(-\delta_{\lambda\rho} + \delta_{\lambda\mu}(2\delta_{\lambda\omega} + \delta_{\rho\omega}))}{(z^2)^3} \\
 & - \frac{(-1+4\delta_{\lambda\mu})g(m)\delta_{\nu\rho}\delta_{\mu\omega}}{(z^2)^3(1+m^2-2m\delta_{\mu\rho})^4} \\
 & + \frac{6(1+m^2)(z_\lambda^2 - 6z_\lambda z_\mu + z_\mu^2(1+2\delta_{\lambda\mu}))(2\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\omega} + \delta_{\nu\rho}(\delta_{\mu\omega} + \delta_{\nu\omega}))}{(z^2)^4 m^4} \\
 & + \frac{4z_\mu\delta_{\nu\omega}(z_\mu\delta_{\lambda\rho} - z_\lambda(2\delta_{\lambda\omega} + \delta_{\rho\omega}))}{(z^2)^4} \\
 & - \frac{6(z_\lambda^2 - 6z_\lambda z_\mu + z_\mu^2(1+2\delta_{\lambda\mu}))g(m)\delta_{\nu\rho}\delta_{\mu\omega}}{(z^2)^4(1+m^2-2m\delta_{\mu\rho})^4} \\
 & - \frac{8(1+m^2)(6z_\lambda^2 z_\mu^2 + z^4\delta_{\lambda\mu})(2\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\omega} + \delta_{\nu\rho}(\delta_{\mu\omega} + \delta_{\nu\omega}))}{(z^2)^5 m^4} \\
 & + \frac{8(6z_\lambda^2 z_\mu^2 + z^4\delta_{\lambda\mu})g(m)\delta_{\nu\rho}\delta_{\mu\omega}}{(z^2)^5(1+m^2-2m\delta_{\mu\rho})^4} \\
 & + \frac{80(1+m^2)z^4 z_\lambda z_\mu(2\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\omega} + \delta_{\nu\rho}(\delta_{\mu\omega} + \delta_{\nu\omega}))}{(z^2)^6 m^4} \\
 & \left. - \frac{80z^4 z_\lambda z_\mu g(m)\delta_{\nu\rho}\delta_{\mu\omega}}{(z^2)^6(1+m^2-2m\delta_{\mu\rho})^4} \right) \left. \right\}, \tag{6.8}
 \end{aligned}$$

mit $g(m) = 2 + m^2 + 4m^4 + m^6 - 2m(5 - 10m + 12m^2 - 6m^3 + 3m^4)\delta_{\mu\rho}$.

Diagramme j, k und l

Der Beitrag zum Feldstärkekorrelator des ersten Summanden in Gleichung (3.19) der Diagramme **j** und **k** ist

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)j,k}(z) = & -\frac{g^2 a}{4} N(N^2 - 1) \delta_{\nu\rho} \delta_{\omega\rho} \sum_{m,l}^{M-1} k(m,l) \left\{ \frac{1}{a} \left(\frac{-1 + 2\delta_{\lambda\rho}}{(z^2)^2} + \frac{4z_\lambda^2 - 8z_\lambda z_\rho}{(z^2)^3} \right) \right. \\
 & + a \left(\frac{2(1 - 2\delta_{\lambda\rho})}{(z^2)^3} + \frac{2(12z_\lambda z_\rho - 12\delta_{\lambda\rho} z_\rho^2)}{(z^2)^4} \right. \\
 & \left. \left. + \frac{2(-4z^4 + 8z^4 \delta_{\lambda\rho} - 32z_\lambda^4 + 32z_\lambda^3 z_\rho + 32z_\lambda z_\rho^3)}{(z^2)^5} + \frac{2(40z^4 z_\lambda^2 - 80z^4 z_\lambda z_\rho)}{(z^2)^6} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

mit

$$\begin{aligned}
 k(m,l) = & \frac{l(-1 - 5m^2 - 8m^4 - 9m^6 - m^8)}{16m^4 \pi^4 (1 + m^2 - 2m\delta_{\mu\rho})^4} \\
 & + \frac{2lm(4 - 2m + 32m^2 - 44m^3 + 51m^4 - 34m^5 + 20m^6 - 6m^7 + m^8) \delta_{\mu\rho}}{16m^4 \pi^4 (1 + m^2 - 2m\delta_{\mu\rho})^4}.
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

Diagramm **l** ergibt:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)l}(z) = & \frac{g^2 a^2}{4} N(N^2 - 1) \delta_{\nu\omega} \left(\sum_{m,l}^{M-1} \frac{1 + l^2 - 2lm + m^2}{4a^2(l - m)^4 \pi^2} \right) \\
 & \times \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \frac{2\delta_{\lambda\mu}}{(z^2)^2} - \frac{8z_\lambda z_\mu}{(z^2)^3} + a^2 \left(\frac{2 - 8\delta_{\lambda\mu}}{(z^2)^3} + \frac{-12z_\lambda^2 + 72z_\lambda z_\mu - 12z_\mu^2 - 24\delta_{\lambda\mu} z_\mu^2}{(z^2)^4} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{16z^4 \delta_{\lambda\mu} + 96z_\lambda^2 z_\mu^2}{(z^2)^5} - \frac{160z^4 z_\lambda z_\mu}{(z^2)^6} \right) \right\}.
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

6.2. Problem der Methode von Paladini und Sexton

Die Vorgehensweise von Paladini und Sexton führt bei der Berechnung von $\Delta^L(z)(z, 4, 1, 0)$ für $z = 0$ nicht zum bekannten Ergebnis (Gleichung (2.58)). Die Rechnung soll im Folgenden skizziert werden.

In Anlehnung an Abschnitt 4.1.1 kann das massebehaftete Integral $\Delta^L(0, n, 1, m)$ mittels Schwinger-Parametrisierung, Umformung des Sinus und einer Substitution als Integral

über eine modifizierte Besselfunktion erster Art dargestellt werden:

$$\Delta^L(z)(0, n, 1, m) = \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{1}{m^2 + \hat{k}^2} \quad (6.12)$$

$$= \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha m^2} \times \left\{ \prod_{\mu=1}^n e^{-\frac{2\alpha}{a^2}} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{dk_\mu}{2\pi} e^{\frac{2\alpha}{a^2} \cos k_\mu a} \right\} \quad (6.13)$$

$$= \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha m^2} \times \left\{ \prod_{\mu=1}^n e^{-\frac{2\alpha}{a^2}} \left(\frac{1}{a} \right) I_0 \left(\frac{2\alpha}{a^2} \right) \right\}. \quad (6.14)$$

Die asymptotische Entwicklung der Besselfunktion $I_\sigma(x)$ für große Argumente x ist in [43] gegeben. Nach den Substitutionen $\sigma = 0$ und $x = \frac{2\alpha}{a^2}$ und Ausführen des Produktes findet man

$$\Delta^L(z)(0, n, 1, m) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha m^2} \times \left\{ \alpha^{-\frac{n}{2}} + \frac{na^2}{16} \alpha^{-\frac{n}{2}-1} + \left(\frac{9na^4}{512} + \frac{(n-1)!a^4}{256} \right) \alpha^{-\frac{n}{2}-2} + \dots \right\}. \quad (6.15)$$

Alle auftretenden Integrale sind für Potenzen von $\alpha \leq -1$ und insbesondere für $n = 4$ divergent. Das Ergebnis $\Delta^L(0, 4, 1, 0) = \frac{r_0}{a^2}$ kann demnach nicht reproduziert werden.

6.3. Diskussion weiterer Lösungsmöglichkeiten

Um die Integrale in den Diagrammen **b**, **c**, **d** und **i** als Entwicklung für $a \rightarrow 0$ auszuwerten, müssen andere als die in dieser Arbeit vorgestellten Ansätze gefunden werden. Wie bereits in Kapitel 4 erwähnt wurde, kann für die Diagramme **b** und **c** die in der Arbeit von Lüscher und Weisz verwendete Funktion $A(p)$ [45] eingesetzt werden. Nachdem so das eine der zwei Integrale gelöst ist, verbleibt jedoch eines, dessen Entwicklung bisher unbekannt ist.

Einen Ansatz, den man in zukünftigen Arbeiten verfolgen könnte ist der, welcher von Borasoy und Krebs benutzt wurde [48]. In Anhang A leiten sie eine asymptotische Entwicklung des Propagatorintegrals für große (dimensionslose) x her, indem sie zuerst den Integranden für $a \rightarrow 0$ entwickeln und so eine Potenzreihe des gesamten Integrals in a erhalten. In einem nächsten Schritt argumentieren sie, dass eine Erweiterung der Integralgrenzen nur das Verhalten des Integrals nahe des Ursprunges beeinflusst und somit das Integral im gewünschten Limes $x \rightarrow \infty$ in den Grenzen $-\infty$ und ∞ betrachtet werden kann. Sie erhalten damit das gleiche Ergebnis wie Paladini und Sexton, vgl. Abschnitt 4.1.1. Die Methode ließe sich eventuell auch auf andere Integrale anwenden.

Ein zweiter Ansatz ergibt sich mit der in Abschnitt 4.1.2 beschriebenen Vorgehensweise. Mit der Konstruktion einer zweckmäßigen Hilfsfunktion und der Erweiterung der Grenzen auf $\pm\infty$ könnte eine Entwicklung der noch zu berechnenden Integrale erzeugt werden.

Kann keine analytische Methode gefunden werden, muss die Lösung der verbliebenen Integrale auf numerischem Weg durchgeführt werden. Eine Möglichkeit hierbei wäre, die Berechnungen für hinreichend viele kleine aber feste a auszuführen und dann das Verhalten für den Kontinuumsimes abzuschätzen.

Genannt werden sollte außerdem das Theorem von Reisz [49], das unter bestimmten Bedingungen auf Integrale auf dem Gitter angewendet werden kann. Hiermit wurde bereits der Übergang zum Kontinuumsausdruck der führenden Ordnung im Limes $a \rightarrow 0$ bestätigt [47].

7. Zusammenfassung

In dieser Arbeit steht die störungstheoretische Behandlung der Korrelationsfunktion der Feldstärke im Zentrum des Interesses.

Nach einer Einführung in das Themengebiet in den ersten zwei Kapiteln wird in Kapitel drei die Reihenentwicklung des Feldstärkekorrelators im Vakuum bis zur zweiten Ordnung in der Kopplungskonstanten hergeleitet. Die sich hierbei ergebenden Feynmangraphen enthalten Integrale, deren Integranden durch die Gitterregularisierung hervorgerufene komplexe Strukturen aufweisen. Dies erschwert die Analyse des Verhaltens dieser Integrale und damit des Feldstärkekorrelators im Kontinuumsliches erheblich.

Die zwei im vierten Kapitel vorgestellten Methoden zur Auswertung von Gitterintegralen im Limes $a \rightarrow 0$ liefern für zwei der benötigten Integraltypen eine Lösung. Paladini und Sexton finden die Entwicklung des n -dimensionalen, massebehafteten Propagatorintegrals mittels der Darstellung des Propagators als Integral über die modifizierte Besselfunktion erster Art und mit Hilfe der Entwicklung dieser Besselfunktion für große Argumente und Ordnungen. Der Formalismus ist außerdem für eine beliebige Potenz q des Nenners des Integranden gültig, sodass eine größere Klasse von Integralen erfasst wird. Im masselosen Limes und in 4 Dimensionen stimmt die so bestimmte Reihenentwicklung in der Gitterkonstanten für $q = 1$ und $q = 2$ mit den Ergebnissen von Lüscher und Weisz überein. Lüscher und Weisz selbst benutzen in ihrer Herleitung Hilfsfunktionen, die eine Erweiterung der Integralgrenzen auf unendlich und eine Entwicklung des Integranden ermöglichen. Die Gitterableitungen der in den Entwicklungen vorhandenen Terme werden in Kapitel fünf bereitgestellt.

Bei der Diskussion der Ergebnisse der berechenbaren Feynmandiagramme im sechsten Kapitel wird gezeigt, dass für die führende Ordnung sowie für das Diagramm **a** der 1-Schleifen-Ordnung, welches weder einen Schwingerlinienbeitrag noch einen Wechselwirkungsverteck enthält, das Kontinuumsergebnis im Limes $a \rightarrow 0$ reproduziert werden kann. Die anderen Diagramme können nicht direkt mit denen im Kontinuum verglichen werden, da es sich entweder um Gitterartefakte oder um Diagramme mit explizitem Beitrag der Schwingerlinie handelt. Bei letzteren muss erst die durch die Diskretisierung entstandene Summe über endlich viele Gitterpunkte ausgewertet werden. Es lässt sich aber feststellen, dass die konstanten und divergenten Terme in den von Paladini und Sexton bzw. Lüscher und Weisz gefundenen Entwicklungen durch die ständige Präsenz der Gitterableitungen nicht beitragen.

Darüber hinaus werden im gleichen Kapitel Lösungsansätze für die Berechnung der noch unbekanntem Beiträge zum Feldstärkekorrelator vorgeschlagen, da bisher kein Verfahren zur Berechnung von ortsabhängigen Integralen, deren Nenner Summen von verschiedenen Impulsen in den Argumenten der Sinus-Funktion enthalten, bekannt ist. Neben der Suche nach Berechnungsmethoden für diese Integrale sollte zudem der Grund der Ungleichheit des Ergebnisses aus der Berechnung des ortsunabhängigen Integrals mit der Technik von Paladini und Sexton und dem bekannten konstanten Wert gefunden werden.

Da kein vollständiger analytischer Ausdruck des Feldstärkekorrelators auf dem Gitter

bis zur 1-Schleifen-Ordnung bestimmt werden konnte, ist ein Vergleich der verschiedenen Regularisierungsschemata auf dem Gitter und im Kontinuum noch nicht möglich.

A. Formeln

A.1. Schwinger-Parametrisierung

$$\frac{1}{A^b} = \frac{1}{\Gamma(b)} \int_0^\infty d\alpha \alpha^{b-1} e^{-\alpha A} \quad (\text{A.1})$$

A.2. Besselfunktion

$$I_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{z \cos \theta} \cos(n\theta) d\theta \quad (\text{A.2})$$

A.3. Paladini und Sexton im Kontinuum

Die Darstellung des Propagators mittels der modifizierten Besselfunktion zweiter Art wird mit Nutzung der Schwinger-Parametrisierung und der quadratischen Ergänzung möglich:

$$\Delta^C(x, n, q, m) = \int_{-\infty}^\infty \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{e^{ikx}}{(m^2 + k^2)^q} \quad (\text{A.3})$$

$$= \frac{2(4\pi)^{-\frac{n}{2}}}{\Gamma(q)} \left[\frac{2m}{(x^2)^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{n}{2}-q} K_{\frac{n}{2}-q} \left[m (x^2)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (\text{A.4})$$

A.4. Baker-Campbell-Hausdorff-Formel

$$e^x e^y = \exp \left\{ x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \frac{1}{12}([x, [x, y]] + [y, [y, x]]) + \frac{1}{24}[x, [y, [y, x]]] + \dots \right\} \quad (\text{A.5})$$

Siehe auch [50].

A.5. Beweis der BCH-Formel für ein Produkt aus beliebig vielen Exponentialfunktionen

Der Beweis von Gleichung (3.5) wird mittels vollständiger Induktion geführt. In vereinfachter Form soll

$$\prod_{i=0}^{M-1} e^{\alpha A_i} = \exp \left\{ \alpha \sum_{i=0}^{M-1} A_i + \frac{\alpha^2}{2} \sum_{i=0, j=1, i < j}^{M-1} [A_i, A_j] + O(\alpha^3) \right\} \quad (\text{A.6})$$

gezeigt werden, wobei auf Gleichung (3.5) bezogen $\alpha = ig_0 a$ und $A_i = A_\rho(x + ia\hat{\rho})$ gilt. Der Induktionsanfang für $M = 1$ ist trivial. Mit $M = 2$ findet man die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel:

$$e^{\alpha A_0} e^{\alpha A_1} = e^{\alpha A_0 + \alpha A_1 + \frac{\alpha^2}{2}[A_0, A_1] + O(\alpha^3)}. \quad (\text{A.7})$$

Der Induktionsschritt $M \rightarrow M + 1$ führt auf das gewünschte Ergebnis, womit Gleichung (3.5) bestätigt ist:

$$\prod_{i=0}^M e^{\alpha A_i} = \prod_{i=0}^{M-1} e^{\alpha A_i} e^{\alpha A_M} \quad (\text{A.8})$$

$$= \exp \left\{ \alpha \sum_{i=0}^{M-1} A_i + \frac{\alpha^2}{2} \sum_{i=0, j=1, i < j}^{M-1} [A_i, A_j] + O(\alpha^3) \right\} e^{\alpha A_M} \quad (\text{A.9})$$

$$= \exp \left\{ \alpha \sum_{i=0}^{M-1} A_i + A_M + \frac{\alpha^2}{2} \sum_{i=0, j=1, i < j}^{M-1} [A_i, A_j] + \frac{\alpha^2}{2} \sum_{i=0}^{M-1} [A_i, A_M] + O(\alpha^3) \right\} \quad (\text{A.10})$$

$$= \exp \left\{ \alpha \sum_{i=0}^M A_i + \frac{\alpha^2}{2} \sum_{i=0, j=1, i < j}^M [A_i, A_j] + O(\alpha^3) \right\}. \quad (\text{A.11})$$

B. Ableitungen

B.1. Reihenentwicklungen der auftretenden Polynome

$$(z \pm a\hat{\mu})^2 = z^2 \pm 2az_\mu + a^2 \quad (\text{B.1})$$

$$(z \pm a\hat{\alpha} \mp a\hat{\mu})^2 = z^2 \pm 2az_\alpha \mp 2az_\mu + 2a^2 - 2a^2\delta_{\alpha\mu} \quad (\text{B.2})$$

$$(z \pm a\hat{\alpha} \pm a\hat{\mu})^2 = z^2 \pm 2az_\alpha \pm 2az_\mu + 2a^2 + 2a^2\delta_{\alpha\mu} \quad (\text{B.3})$$

$$(z \pm a\hat{\alpha} - a\hat{\lambda} + a\hat{\mu})^2 = z^2 \pm 2az_\alpha - 2az_\lambda + 2az_\mu + 3a^2 - 2a^2\delta_{\lambda\mu} \mp 2a^2\delta_{\alpha\lambda} \pm 2a^2\delta_{\alpha\mu} \quad (\text{B.4})$$

$$(z \pm a\hat{\mu})^4 = z^4 \pm 4az_\mu^3 + 6a^2z_\mu^2 \pm 4a^3z_\mu + a^4 \quad (\text{B.5})$$

$$(z \pm a\hat{\alpha} \mp a\hat{\mu})^4 = z^4 \pm 4az_\alpha^3 + 6a^2z_\alpha^2 \pm 4a^3z_\alpha \mp 4az_\mu^3 + 6a^2z_\mu^2 \mp 4a^3z_\mu + 2a^4 - \delta_{\alpha\mu}(12a^2z_\alpha^2 + 2a^4) \quad (\text{B.6})$$

$$(z \pm a\hat{\alpha} \pm a\hat{\mu})^4 = z^4 \pm 4az_\alpha^3 + 6a^2z_\alpha^2 \pm 4a^3z_\alpha \pm 4az_\mu^3 + 6a^2z_\mu^2 \pm 4a^3z_\mu + 2a^4 + \delta_{\alpha\mu}(12a^2z_\alpha^2 \pm 24a^3z_\alpha + 14a^4) \quad (\text{B.7})$$

$$(z + a\hat{\alpha} - a\hat{\lambda} + a\hat{\mu})^4 = z^4 + 4az_\alpha^3 + 6a^2z_\alpha^2 + 4a^3z_\alpha - 4az_\lambda^3 + 6a^2z_\lambda^2 - 4a^3z_\lambda + 4az_\mu^3 + 6a^2z_\mu^2 + 4a^3z_\mu + 3a^4 - \delta_{\lambda\mu}(12a^2z_\mu^2 + 2a^4) - \delta_{\alpha\lambda}(12a^2z_\alpha^2 + 2a^4) + \delta_{\alpha\mu}(12a^2z_\alpha^2 + 24a^3z_\alpha + 14a^4) \quad (\text{B.8})$$

$$(z - a\hat{\alpha} - a\hat{\lambda} + a\hat{\mu})^4 = z^4 - 4az_\alpha^3 + 6a^2z_\alpha^2 - 4a^3z_\alpha - 4az_\lambda^3 + 6a^2z_\lambda^2 - 4a^3z_\lambda + 4az_\mu^3 + 6a^2z_\mu^2 + 4a^3z_\mu + 3a^4 - \delta_{\lambda\mu}(12a^2z_\mu^2 + 2a^4) - \delta_{\alpha\mu}(12a^2z_\alpha^2 + 2a^4) + \delta_{\alpha\lambda}(12a^2z_\alpha^2 - 24a^3z_\alpha + 14a^4) \quad (\text{B.9})$$

B.2. Herleitung der zweifachen Ableitungen von

$$\Delta^L(z \pm a\hat{\alpha}, 4, 2, 0)$$

Unter Zuhilfenahme von Gleichung (4.39) sieht man, dass für den ersten nichtkonstanten Term unter Berücksichtigung der Gleichungen (B.1) bis (B.4) folgende Ableitung benötigt

wird:

$$\begin{aligned}
\Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y \ln \left(\frac{(z \pm a\hat{\alpha})^2}{a^2} \right) &= -\frac{2\delta_{\lambda\mu}}{z^2} + \frac{4z_\lambda z_\mu}{(z^2)^2} \\
&+ a \left(\frac{2(z_\lambda - z_\mu) \pm 4(\delta_{\mu\alpha} z_\lambda + \delta_{\lambda\alpha} z_\mu + \delta_{\lambda\mu} z_\alpha)}{(z^2)^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{8(z_\lambda^2 z_\mu - z_\lambda z_\mu^2) \mp 16z_\lambda z_\mu z_\alpha}{(z^2)^3} \right) \\
&+ a^2 \left(\frac{4(\delta_{\lambda\mu} \mp \delta_{\lambda\mu} \delta_{\lambda\alpha} \pm \delta_{\lambda\mu} \delta_{\mu\alpha} + \delta_{\lambda\alpha} \delta_{\mu\alpha}) \pm 2(\delta_{\lambda\alpha} - \delta_{\mu\alpha}) - 1}{(z^2)^2} \right. \\
&\quad + \frac{4z_\lambda^2 + 4z_\mu^2 - 24z_\lambda z_\mu + 8(\mp z_\lambda z_\alpha \pm z_\mu z_\alpha - \delta_{\lambda\mu} z_\alpha^2)}{(z^2)^3} \\
&\quad + \frac{16(\pm \delta_{\lambda\alpha} z_\lambda z_\mu \mp \delta_{\mu\alpha} z_\lambda z_\mu \pm \delta_{\lambda\mu} z_\lambda z_\alpha)}{(z^2)^3} \\
&\quad + \frac{16(-\delta_{\mu\alpha} z_\lambda z_\alpha \mp \delta_{\lambda\mu} z_\mu z_\alpha - \delta_{\lambda\alpha} z_\mu z_\alpha) \mp 8(\delta_{\lambda\alpha} z_\mu^2 - \delta_{\mu\alpha} z_\lambda^2)}{(z^2)^3} \\
&\quad + \frac{16(z_\lambda^3 z_\mu + z_\lambda z_\mu^3) - 24z_\lambda^2 z_\mu^2}{(z^2)^4} \\
&\quad \left. + \frac{48(z_\lambda z_\mu z_\alpha^2 \mp z_\lambda^2 z_\mu z_\alpha \pm z_\lambda z_\mu^2 z_\alpha)}{(z^2)^4} \right) \tag{B.10}
\end{aligned}$$

und für den zweiten Term mit Beachtung der Produktregel (Gleichung (5.11)):

$$\begin{aligned}
\Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y \frac{(z \pm a\hat{\alpha})^4}{((z \pm a\hat{\alpha})^2)^h} &= \left(\Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y \frac{1}{((z \pm a\hat{\alpha})^2)^h} \right) (z \pm a\hat{\alpha} - a\hat{\lambda} + a\hat{\mu})^4 \\
&\quad + \left(\Delta_\lambda^y \frac{1}{((z \pm a\hat{\alpha})^2)^h} \right) \left(\Delta_\mu^x (z \pm a\hat{\alpha} - a\hat{\lambda})^4 \right) \\
&\quad + \left(\Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y (z \pm a\hat{\mu})^4 \right) \frac{1}{((z \pm a\hat{\alpha} + a\hat{\mu})^2)^h} \\
&\quad + \left(\Delta_\lambda^y (z \pm a\hat{\mu})^4 \right) \left(\Delta_\mu^x \frac{1}{((z \pm a\hat{\alpha})^2)^h} \right). \tag{B.11}
\end{aligned}$$

Hierfür ergeben sich mittels der Gleichungen (B.1) bis (B.9):

$$\begin{aligned}
\Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y \frac{1}{((z \pm a\hat{\alpha})^2)^h} &= \frac{2h\delta_{\lambda\mu}}{(z^2)^{1+h}} - \frac{4h(1+h)z_\lambda z_\mu}{(z^2)^{2+h}} \\
&- a \left(\frac{2h(1+h)(z_\lambda - z_\mu \pm 2(\delta_{\mu\alpha}z_\lambda + \delta_{\lambda\alpha}z_\mu + \delta_{\lambda\mu}z_\alpha))}{(z^2)^{2+h}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{4h(1+h)(2+h)(z_\lambda^2 z_\mu - z_\lambda z_\mu^2 \mp 2z_\lambda z_\mu z_\alpha)}{(z^2)^{3+h}} \right) \\
&+ a^2 \left(\frac{h(1+h)(1 \mp 2(\delta_{\lambda\alpha} - \delta_{\mu\alpha}))}{(z^2)^{2+h}} \right. \\
&\quad - \frac{4h(1+h)(\delta_{\lambda\mu} \mp \delta_{\lambda\mu}\delta_{\lambda\alpha} \pm \delta_{\lambda\mu}\delta_{\mu\alpha} + \delta_{\lambda\alpha}\delta_{\mu\alpha})}{(z^2)^{2+h}} \\
&\quad + \frac{2h(1+h)(2+h)(-z_\lambda^2 - z_\mu^2 + 6z_\lambda z_\mu \pm 2z_\lambda z_\alpha \mp 2z_\mu z_\alpha)}{(z^2)^{3+h}} \\
&\quad + \frac{2h(1+h)(2+h)(\delta_{\mu\alpha}(\pm 4z_\lambda z_\mu + 4z_\lambda z_\alpha \mp 2z_\lambda^2))}{(z^2)^{3+h}} \\
&\quad + \frac{2h(1+h)(2+h)(\delta_{\lambda\alpha}(\pm 2z_\mu^2 + 4z_\mu z_\alpha \mp 4z_\lambda z_\mu) + 2\delta_{\lambda\mu}z_\alpha^2)}{(z^2)^{3+h}} \\
&\quad - \frac{4h(1+h)(6+5h+h^2)z_\lambda z_\mu(2(z_\lambda^2 + z_\mu^2) - 3z_\lambda z_\mu)}{3(z^2)^{4+h}} \\
&\quad \left. - \frac{4h(1+h)(6+5h+h^2)z_\lambda z_\mu(-6(\pm z_\lambda z_\alpha \mp z_\mu z_\alpha - z_\alpha^2))}{3(z^2)^{4+h}} \right), \tag{B.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_\lambda^y \frac{1}{(z \pm a\hat{\alpha})^2)^h} &= \frac{2hz_\lambda}{(z^2)^{1+h}} + a \left(\frac{\pm 2h\delta_{\lambda\alpha} - h}{(z^2)^{1+h}} + \frac{2h(1+h)z_\lambda(z_\lambda \mp 2z_\alpha)}{(z^2)^{2+h}} \right) \\
&+ a^2 \left(\frac{2h(1+h)(2(\pm\delta_{\lambda\alpha} - 1)z_\lambda + (\pm 1 - 2\delta_{\lambda\alpha})z_\alpha)}{(z^2)^{2+h}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{4h(1+h)(2+h)z_\lambda(z_\lambda^2 \mp 3z_\lambda z_\alpha + 3z_\alpha^2)}{3(z^2)^{3+h}} \right), \tag{B.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_\mu^x(z + a\hat{\alpha} - a\hat{\lambda})^4 &= 4z_\mu^3 + 6z_\mu^2 a + 4z_\mu a^2 + a^3 - \delta_{\lambda\mu}(12z_\mu^2 a + 2a^3) \\
&\quad + \delta_{\mu\alpha}(12z_\alpha^2 a + 24z_\alpha a^2 + 14a^3), \tag{B.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_\mu^x(z - a\hat{\alpha} - a\hat{\lambda})^4 &= 4z_\mu^3 + 6z_\mu^2 a + 4z_\mu a^2 + a^3 - \delta_{\lambda\mu}(12z_\mu^2 a + 2a^3) \\
&\quad - \delta_{\mu\alpha}(12z_\alpha^2 a + 2a^3), \tag{B.15}
\end{aligned}$$

$$\Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y (z \pm a\hat{\alpha})^4 = \Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y z^4 = -\delta_{\lambda\mu}(12z_\mu^2 + 2a^2), \tag{B.16}$$

$$\frac{1}{((z \pm a\hat{\alpha} + a\hat{\mu})^2)^h} = \frac{1}{(z^2)^h} - a \frac{2h(z_\mu \pm z_\alpha)}{(z^2)^{1+h}} + a^2 \left(\frac{2h(\mp\delta_{\mu\alpha} - 1)}{(z^2)^{1+h}} + \frac{2h(1+h)(z_\mu^2 \pm 2z_\mu z_\alpha + z_\alpha^2)}{(z^2)^{2+h}} \right), \quad (\text{B.17})$$

$$\Delta_\lambda^y(z + a\hat{\alpha})^4 = -4z_\lambda^3 + 6z_\lambda^2 a - 4z_\lambda a^2 + a^3 - \delta_{\lambda\alpha}(12z_\alpha^2 a + 2a^3), \quad (\text{B.18})$$

$$\Delta_\lambda^y(z - a\hat{\alpha})^4 = -4z_\lambda^3 + 6z_\lambda^2 a - 4z_\lambda a^2 + a^3 + \delta_{\lambda\alpha}(12z_\alpha^2 a - 24z_\alpha a^2 + 14a^3), \quad (\text{B.19})$$

$$\Delta_\mu^x \frac{1}{((z \pm a\hat{\alpha})^2)^h} = -\frac{2hz_\mu}{(z^2)^{1+h}} + a \left(\frac{\mp 2h\delta_{\mu\alpha} - h}{(z^2)^{1+h}} + \frac{2h(1+h)z_\mu(z_\mu \pm 2z_\alpha)}{(z^2)^{2+h}} \right) + a^2 \left(\frac{2h(1+h)(2(\pm\delta_{\mu\alpha} + 1)z_\mu + (\pm 1 + 2\delta_{\mu\alpha})z_\alpha)}{(z^2)^{2+h}} - \frac{4h(1+h)(2+h)z_\mu(z_\mu^2 \pm 3z_\mu z_\alpha + 3z_\alpha^2)}{3(z^2)^{3+h}} \right). \quad (\text{B.20})$$

C. Gitterintegrale

An dieser Stelle soll ein Überblick über die Gitterintegrale gegeben werden, für die eine Entwicklung in der Gitterkonstanten benötigt wird. Um die korrekte Dimension beizubehalten sind der Vorfaktor a mit der jeweiligen Potenz und die auftretenden Gitterableitungen mit aufgeführt. Kommt dasselbe Integral in verschiedenen Kombinationen mit der Ableitung vor, z. B. im Ausdruck von Diagramm **a**, so wird nur einer dieser Fälle genannt.

C.1. Integrale der bekannten Diagramme

$$\mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(0)}(z) \supset \Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikz}}{\hat{k}^2} \quad (\text{C.1})$$

$$\mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)a}(z) \supset \left(\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikz}}{\hat{k}^2} \right)^2 \quad (\text{C.2})$$

$$\mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)e}(z) \supset a^{-2} \Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikz}}{(\hat{k}^2)^2} \quad (\text{C.3})$$

$$\mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)f}(z) \supset a^{-2} \Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikz}}{(\hat{k}^2)^2} \quad (\text{C.4})$$

$$\mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)g}(z) \supset \left(\Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikz}}{(\hat{k}^2)^2} \right) \left(\int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ipa\hat{\nu}} + e^{ipa\hat{\omega}}}{\hat{p}^2} \right) \quad (\text{C.5})$$

$$\mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)h}(z) \supset a \left(\sum_{m=0}^{M-1} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikma\hat{\rho}}}{\hat{k}^2} \right) \left(\Delta_\lambda^y \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ipz}}{\hat{p}^2} \right) \quad (\text{C.6})$$

$$\mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)j,k}(z) \supset a \Delta_\lambda^y \sum_{m,l}^{M-1} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikma\hat{\rho}}}{\hat{k}^2} \frac{e^{ip(z+la\hat{\rho})}}{\hat{p}^2} \quad (\text{C.7})$$

$$\mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)l}(z) \supset a^2 \left(\Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikz}}{\hat{k}^2} \right) \left(\sum_{m,l}^{M-1} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(m-l)a\hat{\rho}}}{\hat{p}^2} \right) \quad (\text{C.8})$$

C.2. Integrale der unbekanntenen Diagramme

$$\mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)b}(z) \supset a^{-1} \Delta_\lambda^y \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{i(k+p)z}}{\hat{k}^2 \hat{p}^2 (\widehat{k+p})^2} \quad (\text{C.9})$$

$$\mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)c}(z) \supset a^{-2} \Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikz}}{(\hat{k}^2)^2 \hat{p}^2 (\widehat{k-p})^2} \quad (\text{C.10})$$

$$\mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)d}(z) \supset a^{-2} \Delta_\mu^x \Delta_\lambda^y \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikz}}{(\hat{k}^2)^2 \hat{p}^2 (\widehat{k-p})^2} \quad (\text{C.11})$$

$$\mathcal{D}_{\mu\nu\lambda\omega}^{(2)i}(z) \supset a^{-1} \Delta_\lambda^y \sum_m^{M-1} \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ikz+ip(z+ma\hat{\rho})}}{\hat{k}^2 \hat{p}^2 (\widehat{k+p})^2} \quad (\text{C.12})$$

Literaturverzeichnis

- [1] H. G. Dosch. Gluon condensate and effective linear potential. *Physics Letters B*, 190(1–2):177 – 181, 1987.
- [2] H. G. Dosch and Yu. A. Simonov. The area law of the wilson loop and vacuum field correlators. *Physics Letters B*, 205(2–3):339 – 344, 1988.
- [3] Yu. A. Simonov. Nonperturbative dynamics of heavy quarkonia. *Nuclear Physics B*, 324(1):67 – 90, 1989.
- [4] O. Nachtmann and A. Reiter. The vacuum structure in QCD and hadron-hadron scattering. *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, 24:283–296, 1984.
- [5] P. V. Landshoff and O. Nachtmann. Vacuum structure and diffraction scattering. *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, 35:405–416, 1987.
- [6] A. Krämer and H. G. Dosch. High-energy scattering and vacuum properties. *Physics Letters B*, 252(4):669 – 675, 1990.
- [7] H. G. Dosch, Erasmo Ferreira, and A. Krämer. Nonperturbative QCD treatment of high-energy hadron-hadron scattering. *Phys. Rev. D*, 50:1992–2015, 1994.
- [8] Dieter Gromes. Space-time dependence of the gluon condensate correlation function and quarkonium spectra. *Physics Letters B*, 115(6):482 – 486, 1982.
- [9] M. Campostrini, A. Di Giacomo, and S. Olejnik. On the possibility of detecting gluon condensation from the spectra of heavy quarkonia. *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, 31:577–582, 1986.
- [10] Yu.A. Simonov, S. Titard, and F.J. Ynduráin. Heavy quarkonium systems and non-perturbative field correlators. *Physics Letters B*, 354(3–4):435 – 441, 1995.
- [11] M.B. Voloshin. On dynamics of heavy quarks in a non-perturbative QCD vacuum. *Nuclear Physics B*, 154(3):365 – 380, 1979.
- [12] A. Di Giacomo and H. Panagopoulos. Field strength correlations in the QCD vacuum. *Physics Letters B*, 285(1–2):133 – 136, 1992.
- [13] A. Di Giacomo, E. Meggiolaro, and H. Panagopoulos. Gauge-invariant field strength correlations in QCD at zero and non-zero temperature. *Nuclear Physics B*, 483(1–2):371 – 382, 1997.
- [14] M. D’Elia, A. Di Giacomo, and E. Meggiolaro. Field strength correlators in full QCD. *Physics Letters B*, 408(1–4):315 – 319, 1997.

- [15] M. D’Elia, A. Di Giacomo, and E. Meggiolaro. Gauge-invariant field-strength correlators in pure Yang-Mills theory and full QCD at finite temperature. *Phys. Rev. D*, 67:114504, 2003.
- [16] M. E. Peskin and D. V. Schroeder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, Boulder, Colorado, 1995.
- [17] T. Muta. *Foundations of Quantum Chromodynamics: An Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories*. World Scientific Publishing C. Pte. Ltd., Singapore, 2010.
- [18] H. J. Rothe. *Lattice Gauge Theories: An Introduction*. World Scientific Publishing C. Pte. Ltd., Singapore, 3. edition, 2005.
- [19] I. Montvay and G. Münster. *Quantum Fields on a Lattice*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [20] S. Capitani. Lattice perturbation theory. *Physics Reports*, 382(3–5):113 – 302, 2003.
- [21] K. Simonyi. *Kulturgeschichte der Physik: Von den Anfängen bis heute*. Verlag Harri Deutsch, 2004.
- [22] W. Heisenberg and W. Pauli. Zur Quantendynamik der Wellenfelder. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, 56:1–61, 1929.
- [23] W. Heisenberg and W. Pauli. Zur Quantentheorie der Wellenfelder. II. *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei*, 59:168–190, 1930.
- [24] M. Gell-Mann. A schematic model of baryons and mesons. *Physics Letters*, 8(3):214 – 215, 1964.
- [25] G. Zweig. An SU_3 model for strong interaction symmetry and its breaking. [oai:cds.cern.ch:570209](http://cds.cern.ch/record/570209); part ii. (CERN-TH-412):80 p, Feb 1964.
- [26] G. ’t Hooft. unpublished.
- [27] D. J. Gross and F. Wilczek. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories. *Phys. Rev. Lett.*, 30:1343–1346, 1973.
- [28] H. D. Politzer. Reliable perturbative results for strong interactions? *Phys. Rev. Lett.*, 30:1346–1349, 1973.
- [29] C. N. Yang and R. L. Mills. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Phys. Rev.*, 96:191–195, 1954.
- [30] S. L. Glashow. Partial-symmetries of weak interactions. *Nuclear Physics*, 22(4):579 – 588, 1961.
- [31] S. Weinberg. A model of leptons. *Phys. Rev. Lett.*, 19:1264–1266, 1967.
- [32] A. Salamw. Elementary particle theory: Relativistic groups and analyticity. page 367. Almqvist and Wilsell, 1968. Nobel Symp. No. 8.
- [33] <http://cms.web.cern.ch/news/observation-new-particle-mass-125-gev>, July 2012.

-
- [34] <http://www.atlas.ch/news/2012/latest-results-from-higgs-search.html>, July 2012.
- [35] R. P. Feynman. Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics. *Rev. Mod. Phys.*, 20:367, 1948.
- [36] K. G. Wilson. Confinement of quarks. *Phys. Rev. D*, 10:2445–2459, 1974.
- [37] J. Collins. *Renormalization*. Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
- [38] L. D. Faddeev and V. N. Popov. Feynman diagrams for the Yang-Mills field. *Physics Letters B*, 25(1):29 – 30, 1967.
- [39] M. Eidemüller and M. Jamin. QCD field strength correlator at the next-to-leading order. *Physics Letters B*, 416(3–4):415 – 420, 1998.
- [40] H. Georgi. *Lie Algebras in Particle Physics: From Isospin to Unified Theories*. Westview Press, Boulder, Colorado, 1999.
- [41] G. Burgi, S. Caracciolo, and A. Pelissetto. Algebraic algorithm for the computation of one loop Feynman diagrams in lattice QCD with wilson fermions. *Nucl. Phys. B*, 478:687, 1996.
- [42] B. Paladini and J. C. Sexton. Asymptotic expansion of the lattice scalar propagator in coordinate space. *Phys. Lett. B*, 448:76, 1999.
- [43] M. Abramowitz and I. A. Stegun, editors. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. Dover Publications, Inc., New York, 10. edition, 1972.
- [44] P. Ramond. *Field Theory: A Modern Primer*. Westview Press, Boulder, Colorado, 2. edition, 1997.
- [45] M. Lüscher and P. Weisz. Coordinate space methods for the evaluation of Feynman diagrams in lattice field theories. *Nucl. Phys. B*, 445:429, 1995.
- [46] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, G. Musiol, and H. Mühlig. *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, 6. edition.
- [47] J. Hütig. Der quantenchromodynamische Feldstärkekorrelator in Kontinuums- und Gitterstörungstheorie, 2009. Diplomarbeit.
- [48] H. Krebs B. Borasoy. Renormalization of two-loop diagrams in scalar lattice field theory. *Nuclear Physics B*, 748(1–2):1 – 23, 2006.
- [49] T. Reisz. A power counting theorem for Feynman integrals on the lattice. *Communications in Mathematical Physics*, 116:81–126, 1988.
- [50] Masuo Suzuki. On the convergence of exponential operators—the Zassenhaus formula, BCH formula and systematic approximants. *Communications in Mathematical Physics*, 57:193–200, 1977.

Dank

Ich möchte mich ganz herzlich bei Professor Dr. Owe Philipsen für die Vergabe des interessanten Themas und ein immerfort offenes Ohr bedanken.

Mein besonderer Dank gilt Dr. Stefano Capitani und Dr. Michael Fromm, die sich beide viel Zeit für die Lösung verschiedenster Fragen, die während der Bearbeitung auftraten, genommen haben.

Des Weiteren danke ich Janine Hütig für die Bereitstellung ihrer Diplomarbeit und die geduldigen Hilfestellungen und der gesamten Arbeitsgruppe für die angenehme Atmosphäre während und auch außerhalb der Bürozeiten.

Zum Schluss möchte ich Dr. Michael Fromm, Clara Stiebing, Hannes Dinter und Daniel Noll für das Korrekturlesen und die kritischen Anmerkungen danken.

Erklärung (nach § 30 (11) Ordnung für den Bachelor- und den Masterstudiengang)

Hiermit erkläre ich, dass ich die Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfasst habe. Alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus Veröffentlichungen oder aus anderen fremden Texten entnommen wurden, sind von mir als solche kenntlich gemacht worden. Ferner erkläre ich, dass die Arbeit nicht – auch nicht auszugsweise – für eine andere Prüfung verwendet wurde.

Frankfurt am Main, den 31. Juli 2012

Susanne Ehret