Quantenfeldtheorie und das Standardmodell der Teilchenphysik

Owe Philipsen

7. Februar 2024

1 Einführung

1.1 Quantenfeldtheorie und Teilchenphysik

Quantenfeldtheorie

- Allgemeiner Formalismus zur Beschreibung von quantenmechanischen Vielteilchensystemen
- Andwendungen: Elementarteilchenphysik und Kosmologie, Physik der kondensierten Materie, Theorie von Phasenübergängen
- In der Teilchenphysik: QFT notwendig zur Zusammenführung von spezieller Relativitätstheorie und Quantenmechanik

Teilchenphysik

- Wissenschaft der elementaren Bausteine der Materie und deren Wechselwirkungen
- Unterschied zu kondensierter Materie (Bsp. van der Waals Gas, Strömungslehre etc.): keine effektive Beschreibung komplexer Systeme, sondern *fundamentale* Beschreibung der Konstituenten
- Goethe: "....was die Welt im Innersten zusammenhält"

Experimenteller Zugang:

- Teilchenbeschleuniger, wg. de Broglie, $|\mathbf{p}| = h/\lambda, \Rightarrow$ Hochenergiephysik
  CERN (Genf), DESY (Hamburg, heute keine Teilchenphysik mehr), Fermilab (Chicago), GSI (Darmstadt), ...
- Satellitenexperimente
- Neutrinoexperimente
- Gravitationswellenexperimente

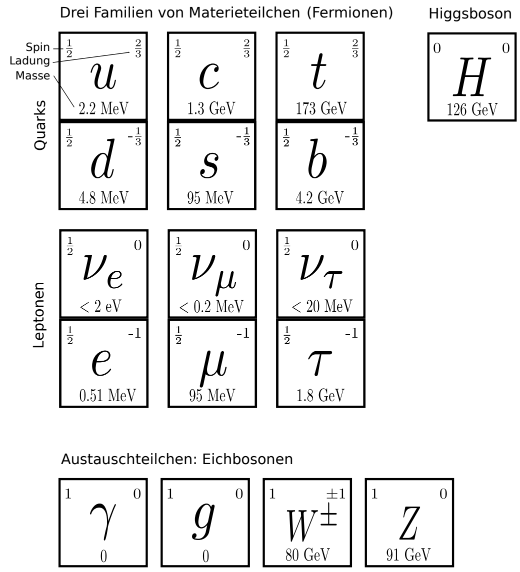
Historischer Abriss:

- 5. Jh. v. Chr. Demokrit:
  Postuliert Atome ("unteilbare Teilchen").
- 1808 Dalton:
  Atomtheorie der chemischen Elemente (Gesetz der multiplen Proportionen; "Bilden zwei Elemente miteinander mehrere Verbindungen, so stehen die Massenverhältnisse, mit denen die Elemente in diesen Verbindungen auftreten, zueinander im Verhältnis kleiner ganzer Zahlen.").
- 1897 Thomson:
  Elektron.
- 1919 Rutherford:
  Proton.
- 1932 Chadwick:
  Neutron.
- 1932 Anderson:
  Positron (Antimaterie; theoretisch bereits 1928 von Dirac vorhergesagt).
- 1937 Anderson, Neddermeyer:
  Myon.
- Ab ≈ 1950:
  Teilchenzoo ... Pionen, Kaonen, J/ψ, ...
- 1956 Cowan, Reines:
  Neutrino (theoretisch bereits 1930 von Pauli vorhergesagt).
- 1964 Gell-Mann, Zweig:
  Quarks, d.h. Substruktur von Nukleonen, etc.
- Heute:
  Hunderte von Teilchen bekannt, alle beschrieben durch einige wenige (nach heutigem Stand des Wissens) fundamentale Teilchen und vier WWs
  $\rightarrow$ **Standardmodell der Teilchenphysik**

=konkrete Eichquantenfeldtheorie, d.h. QFT mit bestimmten lokalen Symmetrien

1.2 Das Standardmodell

Teilcheninhalt:



- Quarks: (u, d), (c, s), (t, b) (drei Generationen) + Antiteilchen.
- Leptonen: (ν_e, e), (ν_μ, μ), (ν_τ, τ) (drei Generationen) + Antiteilchen.
- Antiteilchen: Gleiche Masse u. Spin, entgegengesetzte Ladung $(e^- \leftrightarrow e^+,\ u \leftrightarrow \bar{u})$, ...
- WW über Kraftfelder: QFT liefert Austauschteilchen

Wechselwirkung	Phänomene	Reichweite	relative Stärke	Austausch-teilchen
Starke (QCD)	Bindet Quarks zu Nukleonen und diese zu Kernen	$\sim 10^{-15}$ m	1	Gluonen
Elektro-magnetische (QED)	Elektrizität, Licht, Atomkräfte, ...	∞	10^{-2}	Photonen
Schwache	Radioaktiver Zerfall	$\sim 10^{-18}$ m	10^{-15}	W- und Z-Bosonen
Gravitative	Erdanziehung, Planetenbewegung, Kosmologie, ...	∞	10^{-41}	Gravitonen

- Higgs-Boson: Verantwortlich für die Massen der Materieteilchen

- Alle anderen Teilchen, z.B. Proton, Neutron, etc. sind aus obigen zusammengesetzt

Der “Teilchenzoo”:

- Offizielle Liste der bekannten Teilchen: Particle Data Group (`http://pdg.lbl.gov/`).
- Klassifizierung:
  - Masse.
  - Zerfallsrate bzw. Lebensdauer.
  - Zerfallskanäle.
  - Quantenzahlen (beschreiben innere Struktur; Liste nicht vollständig):
    * Spin J (Bosonen: $J = 0, 1, 2, \ldots$; Fermionen $J = 1/2, 3/2, 5/2, \ldots$).
    * Elektrische Ladung.
    * Parität $P = \pm 1$.
    * Ladungskonjugation $C = \pm 1$.
    * Flavor-Quantenzahlen:
      Isospin: $I_z = +1/2$ (u), $I_z = -1/2$ (d).
      Strangeness: $S = -1$ (s), $S = +1$ ($\bar{s}$).
      Charm: $C = +1$ (c), $C = -1$ ($\bar{c}$).
      Bottomness: $B' = -1$ (b), $B' = +1$ ($\bar{b}$).
      Topness: $T = +1$ (t), $T = -1$ ($\bar{t}$).
    * Leptonenzahl $L = +1$ für e, μ, τ, ν_e, ν_μ, ν_τ.
    * Baryonzahl $B = 1/3$ für u, d, c, s, t, b.

Hadronen (bilden sich auf Grund der starken WW):

- Quarks treten nie isoliert auf, sondern immer in gebunden Zuständen (Hadronen)
  $\rightarrow$ Confinement.
- Mesonen: $q\bar{q}$-Paare.
- Baryonen: qqq oder $\bar{q}\bar{q}\bar{q}$.
- Beispiele:
  - Pion: $\pi^+ = u\bar{d}$ ($J = 0$, $P = -$, $I = 1$, $I_z = +1$, ...).
  - Proton: $p = uud$ ($J = 1/2$, $P = +$, $I = 1/2$, $I_z = +1/2$, ...).
  - Neutron: $n = udd$ ($J = 1/2$, $P = +$, $I = 1/2$, $I_z = -1/2$, ...).

1.3 Natürliche Einheiten

$$\boxed{\hbar = c = k_B = 1} \tag{1}$$

vgl. CGS-System Elektrodynamik mit $4\pi\epsilon_0 = 1$

Dimension Energie in Mechanik und Elektrodynamik:

$$[E] = \mathrm{J} = \mathrm{kg\,m^2/s^2} = \mathrm{CV} \tag{2}$$

1 eV = Energie einer Elementarladung nach Beschleunigung durch eine Spannung von 1V

$$\begin{aligned} 1\mathrm{eV} &= 1,602 \cdot 10^{-19}\mathrm{CV} = 1,602 \cdot 10^{-19}\mathrm{J} \\ 1\mathrm{GeV} &= 10^9\mathrm{eV} = 1,602 \cdot 10^{-10}\mathrm{J} \end{aligned} \tag{3}$$

Masse und Impuls:

$$[m] = \mathrm{kg}, \quad [\mathbf{p}] = \mathrm{kg\,m}/s \tag{4}$$

Energie-Impuls-Beziehung für ein relativistisches Teilchen

$$E^2 = (mc^2)^2 + \mathbf{p}^2c^2 \equiv m'^2 + \mathbf{p}'^2 \tag{5}$$

$$\mathbf{p}' \equiv \mathbf{p}c, \quad m' \equiv mc^2, \quad [\mathbf{p}'] = [m'] = \mathrm{eV} \tag{6}$$

Ebenso Zeit- und Länge

$$[t] = s, \quad [l] = 1 \text{ fm} = 10^{-15}\mathrm{m} \tag{7}$$

De-Broglie-Beziehung

$$|\mathbf{p}| = \hbar\frac{2\pi}{\lambda}, \quad |\mathbf{p}'| = \hbar c\frac{2\pi}{\lambda} \tag{8}$$

Entsprechend modifizierte Längen und Zeiten

$$l' \equiv \frac{l}{\hbar c}, \quad t' \equiv \frac{t}{\hbar} \tag{9}$$

$$[l'] = \frac{\mathrm{fm}}{\hbar c} = \frac{1}{197,3 \text{ MeV}} \tag{10}$$

$$[t'] = \frac{s}{\hbar} = 1,52 \cdot 10^{24}\frac{1}{\mathrm{GeV}} \tag{11}$$

Temperatur, SI-Dimension Kelvin, $[T] = K$

$$T' \equiv k_B T, \quad 10^4 k_B K = 0,861 \text{ eV} \tag{12}$$

2 Wiederholung spezielle Relativitätstheorie

Postulate der speziellen Relativitätstheorie:

- Naturgesetze haben in allen gleichförmig gegeneinander bewegten Inertialsystemen die gleiche Form.

- Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist konstant und unabhängig von der Geschwindigkeit der Lichtquelle.

2.1 Minkowskiraum und Lorentztransformationen

Def. Raumzeitvektor oder kontravarianter Vierervektor (mit hochgestelltem Index):

$$x^\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3$$

$$\begin{array}{ll} x^0 \equiv t & \quad x^1 \equiv x,\ x^2 \equiv y,\ x^3 \equiv z \\ (x^0 = ct) & \end{array}$$

$$\text{kurz:} \quad x = \quad (x^0, x^1, x^2, x^3) \quad = (t; \mathbf{x}) = (x^\mu) \tag{13}$$

Metrik definiert Abstandsquadrat zwischen benachbarten Raumzeitpunkten

$$(ds)^2 \equiv \sum_{\mu,\nu=1}^{4} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{14}$$

mit Einstein'scher Summenkonvention (wiederholte Indizes werden summiert) und metrischem Tensor

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} = (g^{\mu\nu}) \tag{15}$$

Def. kovarianter Vierervektor (mit tiefgestelltem Index):

$$x_\mu \equiv g_{\mu\nu} x^\nu, \qquad \text{d.h.} \quad x_0 = x^0,\ x_i = -x^i$$

D.h. der metrische Tensor lässt sich zum Indexheben u. -senken verwenden:

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu, \quad x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu, \quad g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = g^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu \tag{16}$$

Def. Skalarprodukt:

$$x \cdot y \equiv x^\mu y_\mu = g_{\mu\nu}\, x^\mu y^\nu = x^0 y^0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_\mu y^\mu \tag{17}$$

Ein vierdimensionaler Vektorraum mit Metrik (14) und Skalarprodukt (17) heißt Minkowskiraum.

Partielle Ableitungen:

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \; ; \quad (\partial_\mu) = (\partial_0, \nabla) \tag{18}$$

$$\partial^\mu \equiv g^{\mu\nu}\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = (\partial_0, -\nabla) \tag{19}$$

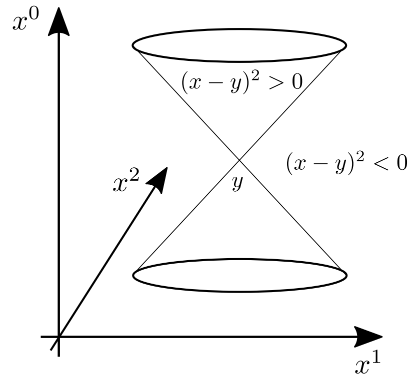
$$\Box \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \partial_0^2 - \nabla^2 \qquad \text{D'Alembert Operator} \tag{20}$$

Der Lichtkegel:

Betrachte Aussenden eines Lichtsignals im Inertialsystem Σ bei $\mathbf{y}$ zur Zeit y^0, Ausbreitung nach allen Richtungen

Räumliche Koordinaten der Wellenfront:

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = (x^0 - y^o) \quad \Rightarrow \quad (x^0 - y^0)^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 = 0$$
$$x^0 > y^0 \quad \text{vorwärts in } t$$
$$x^0 < y^0 \quad \text{rückwärts in } t$$



Raumzeitabstand zwischen zwei Ereignissen (Raumzeitpunkten):

$$s^2 = (x - y)^2 = (x - y)^\mu (x - y)_\mu$$

$s = 0$ definiert den Lichtkegel. Ereignisse x mit mit raumartigem Abstand von y, $s < 0$ (ausserhalb des Lichtkegels), können in keinerlei kausalem Zusammenhang mit y stehen. Kausal verbundene Ereignisse x haben zeitartige Abstände von y, $s > 0$ (innerhalb des Lichtkegels).

Betrachte Koordinatentrafo zu anderem Koordinatensystem Σ':

$$x'^\mu = x'^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3) \; . \tag{21}$$

Der Begriff Vierervektor bezeichnet nicht einfach ein vierkomponentiges Objekt, sondern ist über sein Transformationsverhalten unter Koordinatentransformationen definiert. Allgemeiner sind Tensoren der n-ten Stufe (i.A. koordinatenabhängige) Größen, die sich kovariant gemäß folgender Regeln transformieren:

Tensor 0. Stufe/Skalar	A'	$=$	A
kontravarianter Tensor 1. Stufe/Vektor	A'^{μ}	$=$	$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} A^{\nu}$
kovarianter Tensor 1. Stufe/Vektor	A'_{μ}	$=$	$\frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} A_{\nu}$
kontravarianter Tensor 2. Stufe	$A'^{\alpha\beta}$	$=$	$\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} A^{\mu\nu}$
kovarianter Tensor 2. Stufe	$A'_{\alpha\beta}$	$=$	$\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\beta}} A_{\mu\nu}$
gemischter Tensor 2. Stufe	A'^{β}_{α}	$=$	$\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} A^{\nu}_{\mu}$
...			

Jetzt speziell Trafos zu Inertialsystem Σ', das sich mit $\mathbf{v}$ gegen Σ bewegt:

$$x'^{\mu} = \underbrace{\Lambda^{\mu}_{\nu}}_{\substack{\uparrow \\ \text{lineare Trafo wegen Homogenität} \\ \text{und Isotropie des Raumes}}} x^{\nu} + \underbrace{a^{\mu}}_{\substack{\uparrow \\ \text{Verschiebung des Ursprungs}}} \tag{22}$$

Konstanz der Lichtgeschwindigkeit: $(x'-y')^2 \overset{!}{=} 0$ falls $(x-y)^2 = 0$

$$\begin{aligned}
x'^{\mu} - y'^{\mu} &= \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} - \Lambda^{\mu}_{\sigma} y^{\sigma} = \Lambda^{\mu}_{\nu}(x-y)^{\nu} && (23)\\
(x'-y')^2 &= g_{\mu\nu}(x'-y')^{\mu}(x'-y')^{\nu} && (24)\\
&= g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\varrho}(x-y)^{\varrho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}(x-y)^{\sigma} && (25)\\
&= g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\varrho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma}(x-y)^{\varrho}(x-y)^{\sigma} \overset{!}{=} 0 \text{ für } (x-y)^2 = 0 && (26)\\
&\Rightarrow g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\varrho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} \overset{!}{=} g_{\varrho\sigma} f(v) \quad \rightarrow f \text{ hängt nur von } v = |\mathbf{v}| \text{ ab} && (27)
\end{aligned}$$

Trafos zwischen drei Paaren von Inertialsystemen $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2$:

$$s^2 = f(v_1) s_1^2 \tag{28}$$

$$s^2 = f(v_2) s_2^2 \quad \Rightarrow \quad f(v_{12}) = \frac{f(v_2)}{f(v_1)} \tag{29}$$

$$s_1^2 = f(v_{1\,2}) s_2^2 \tag{30}$$

$f(v_{12})$ hängt i.A. vom Betrag und Richtung von $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ab
$\Rightarrow$ f = konstant = 1

$$(x'-y')^2 = (x-y)^2 = 0$$

Für Abstände zwischen beliebigen Ereignissen bei x^μ, y^μ gilt

$$s'^2 = (x' - y')^2 = (x - y)^2 = s^2$$

Betrachte Trafos mit $a^\mu = 0$: Ursprünge bei $t' = t = 0$ identisch, homogene Lorentztrafos

Die Menge aller linearen Trafos, die Viererlängen invariant lässt, bildet die homogene Lorentzgruppe der Matrizen $O(3,1)$. Kombiniert man sie mit der Gruppe aller Translationen $\Lambda = 0, a^\mu \neq 0$, so heißt sie inhomogene Lorentzgruppe oder Poincarégruppe.

$$\text{Bedingung an LT-Matrizen:} \quad \begin{aligned} g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\varrho \Lambda^\nu{}_\sigma &= g_{\varrho\sigma} \\ (\Lambda^T)_\varrho{}^\mu g_{\mu\nu}\Lambda^\nu{}_\sigma &= g_{\varrho\sigma} \end{aligned} \tag{31}$$

$$\text{Matrixform:} \quad \Lambda^T \cdot g \cdot \Lambda = g$$

$$\Rightarrow \quad \det(\Lambda^T g \Lambda) = \det\, g \tag{32}$$

$$\Rightarrow \quad \det\,\Lambda\, \det g\, \det\,\Lambda = \det\, g \tag{33}$$

$$\det\,\Lambda = \pm 1 \qquad \begin{matrix} \text{eigentliche} \\ \text{uneigentliche} \end{matrix} \ \text{LT's} \tag{34}$$

00-Komponente von (31)

$$1 = g_{\mu\nu}\Lambda^\mu_0 \Lambda^\nu_0 = (\Lambda^0_0)^2 - (\Lambda^i_0)^2 \,, \quad \Rightarrow |\Lambda^0_0| \geq 1 \,. \tag{35}$$

Entsprechend vier Klassen von LT's:

i) eigentlich, orthochron

ii) eigentlich, nicht orthochron

iii) uneigentlich, orthochron

iv) uneigentlich, nicht orthochron

Beispiele:

- **3d Rotationen:**

$$t' = t, \quad \mathbf{x}' = R\mathbf{x}, \tag{36}$$

mit einer orthogonalen (3×3)-Matrix R, $R^{-1} = R^T$,

$$\Rightarrow \Lambda \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} . \tag{37}$$

$\det \Lambda = \det(R) = \pm 1$, orthochron.

- **Boost in x-Richtung (analog in y- oder z-Richtung):**
  Zwei Intertialsysteme bewegen sich mit v relativ zueinander in x-Richtung,

$$(t', x', y', z') = (\gamma(t \pm \beta x), \gamma(x \pm \beta t), y, z), \qquad \beta \equiv v, \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} , \tag{38}$$

$$\Rightarrow \Lambda \;=\; \begin{pmatrix} \gamma & \pm\gamma\beta & 0 & 0 \\ \pm\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{39}$$

  Geht für $v \to 0$ in die Einheitsmatrix über: eigentlich, orthochron.

- **Zeitumkehr:**

$$t' = -t, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x} . \tag{40}$$

$$\Lambda \;=\; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} . \tag{41}$$

  Uneigentlich, nicht orthochron.

- **Paritätstransformation (Raumspiegelung):**

$$t' = t, \quad \mathbf{x}' = -\mathbf{x} . \tag{42}$$

$$\Lambda \;=\; \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{43}$$

  Uneigentlich, orthochron.

Jede beliebige homogene Lorentztransformation lässt sich als Produkt aus diesen vier Typen darstellen.

Sämtliche physikalischen Gesetze des Standardmodells der Teilchenphysik sind in allen Inertialsystemen gleich, die durch eigentliche, orthochrone Poincarétransformationen auseinander hervorgehen.

2.2 Energie und Impuls relativistischer Teilchen

Weltlinie eines Teilchens im Inertialsystem Σ:

$$x^\mu(t) = (t, \mathbf{x}(t)) \tag{44}$$

Im Ruhesystem Σ' des Teilchens:

$$\Sigma' : \qquad dx'^\mu \equiv (d\tau, 0) \; . \tag{45}$$

Wegen $(dx')^2 = (d\tau)^2$ ist die Eigenzeit τ des Teilchens ein Lorentzskalar. Mit $(dx')^2 = (dx)^2$ folgt daraus

$$d\tau^2 = dt^2 - d\mathbf{x}^2 = dt^2 \left(1 - \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2\right) = dt^2(1 - \mathbf{v}^2) \; . \tag{46}$$

Einem Zeitintervall $(t_2 - t_1)$ im Inertialsystem Σ enspricht also die Eigenzeit

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \mathbf{v}^2} \tag{47}$$

im Ruhesystem Σ' des Teilchens.

Def. Vierergeschwindigkeit:

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma\mathbf{v} \end{pmatrix}. \tag{48}$$

Den Viererimpuls erhalten wir dann durch Multiplikation mit der Masse (Lorentzskalar, s.u.),

$$p^\mu \equiv m u^\mu \tag{49}$$

$$p^0 = m u^0 = m\gamma = E, \quad \mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v} = m\mathbf{v} + O(v^3) \; . \tag{50}$$

Das Quadrat des Viererimpulses ist ein Lorentzskalar

$$p^2 = m^2 u^2 = m^2 \left[\frac{1}{1 - v^2} - \frac{v^2}{1 - v^2}\right] = m^2 \tag{51}$$

Daraus folgt für die Komponenten die relativistische Energie-Impuls-Beziehung

$$\Rightarrow \qquad E^2 = m^2 + \mathbf{p}^2 \tag{52}$$

2.3 Kinematik von Teilchenkollisionen

Betrachte Zwei-nach-Zwei-Streuung

$$a + b \longrightarrow c + d \, ,$$

Energie-Impuls-Erhaltung ausgedrückt durch Vierervektoren:

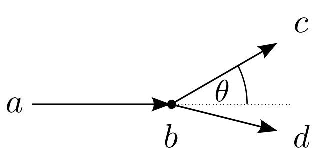
$$p_a + p_b = p_c + p_d \tag{53}$$

Gebräuchliche Inertialsysteme für Streuprozesse sind das Fixed-Target-System, in dem das Streuzentrum b ruht, oder das Schwerpunkts- oder Center-of-Mass-System, in dem der Schwerpunkt der kollidierenden Teilchen ruht, so dass gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b = \mathbf{p}_c + \mathbf{p}_d \, , & (54) \\ \sqrt{s} &\equiv E_a + E_b = E_c + E_d \, . & (55) \end{aligned}$$

(Das Schwerpunktsenergiequadrat s ist nicht mit dem Viererabstand zu verwechseln!)

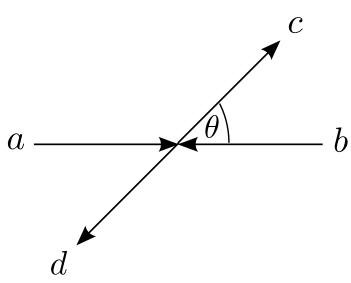
Fixed Target im Laborsystem:



$$\begin{aligned} p_a &= \begin{pmatrix} E_a \\ \mathbf{p}_a \end{pmatrix}, \quad p_b = \begin{pmatrix} m_b \\ 0 \end{pmatrix}, \\ p_c &= \begin{pmatrix} E_c \\ \mathbf{p}_c \end{pmatrix}, \quad p_d = \begin{pmatrix} E_d \\ \mathbf{p}_d \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_c}{|\mathbf{p}_a||\mathbf{p}_c|}$$

Schwerpunkt- oder CMS-System:



$$\begin{aligned} p_a &= \begin{pmatrix} E_a \\ \mathbf{p}_a \end{pmatrix}, \quad p_b = \begin{pmatrix} E_b \\ -\mathbf{p}_a \end{pmatrix}, \\ p_c &= \begin{pmatrix} E_c \\ \mathbf{p}_c \end{pmatrix}, \quad p_d = \begin{pmatrix} E_d \\ -\mathbf{p}_c \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{p}_c}{|\mathbf{p}_a||\mathbf{p}_c|}$$

Umrechnung zwischen Systemen am bequemsten unter Benutzung von Invarianten. Sei Σ das FT und Σ' das CMS-System

$$s' = s = (p_a + p_b)^2 = (p_c + p_d)^2 \tag{56}$$

Wir können dies benutzen, um nicht lorentzinvariante Größen wie die Energie E_a des einlaufenden Teilchens im Laborsystem vollständig durch Lorentzinvarianten auszudrücken,

$$\begin{aligned} s &= p_a^2 + 2p_a \cdot p_b + p_b^2 = m_a^2 + 2E_a m_b + m_b^2 \ , && (57) \\ E_a &= \frac{s - m_a^2 - m_b^2}{2m_b} && (58) \end{aligned}$$

Ebenso finden wir für den zugehörigen Dreierimpuls

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}_a| &= \sqrt{E_a^2 - m_a^2} \\ &= \frac{1}{2m_b}\left[(s - m_a^2 - m_b^2)^2 - 4m_a^2 m_b^2\right]^{1/2} \\ &= \frac{1}{2m_b}\left[s^2 + m_a^4 + m_b^4 - 2sm_a^2 - 2sm_b^2 - 2m_a^2 m_b^2\right]^{1/2} \end{aligned}$$

Weitere Invarianten:

$$\begin{aligned} t &= (p_a - p_c)^2 = (p_b - p_d)^2 \ , && (59) \\ u &= (p_a - p_d)^2 = (p_b - p_c)^2 \ . && (60) \end{aligned}$$

t steht in direkter Beziehung zum Streuwinkel

$$\begin{aligned} t &= m_a^2 + m_c^2 - 2p_a \cdot p_c \\ &= m_a^2 + m_c^2 - 2(E_a E_c - |\mathbf{p}_a||\mathbf{p}_c| \cos\theta) && (61) \end{aligned}$$

Die Variable u erhalten wir durch Vertauschen oder „Kreuzen“ der Teilchen c und d aus der Variablen t. Man findet nach einfacher Rechnung für diese sogenannten Mandelstamvariablen die Beziehung

$$s + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2 \qquad (62)$$

3 Relativistische Wellengleichungen

3.1 Die Klein-Gordon-Gleichung

freies Teilchen mit $E, \mathbf{p}$ $\Rightarrow$ ebene Welle $\qquad \phi(\vec{x}, t) = e^{-ipx} = e^{-i(E \cdot t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}$

$$E\phi = \underbrace{i \frac{\partial}{\partial t}}_{= \hat{H}} \phi \qquad \mathbf{p}\, \phi = \underbrace{-i \nabla}_{= \hat{\mathbf{p}}} \phi \tag{63}$$

$$\text{nichtrelativistisch:} \quad E = \frac{p^2}{2m} \quad \Rightarrow \quad i \frac{\partial}{\partial t} \phi = -\frac{\nabla^2}{2m} \phi \tag{64}$$

Relativistische Invariante: $p^2 = p^\mu p_\mu = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$

$$\Rightarrow \quad E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$$

$$\hat{H} = \sqrt{\hat{\mathbf{p}}^2 + m^2} \qquad \text{Problem Wurzel: nichtlokale Theorie} \tag{65}$$

$$\hat{H}^2 = \hat{\mathbf{p}}^2 + m^2 \tag{66}$$

$$-\partial_t^2 \phi(x) = (-\nabla^2 + m^2)\, \phi\,(x) \tag{67}$$

$$\boxed{(\partial_\mu \partial^\mu \; + \; m^2) \quad \phi\,(x) = 0} \tag{68}$$

Klein-Gordon-Gleichung

Relativitätsprinzip: Forminvarianz in anderem Inertialsystem $\quad \Sigma'$

$$\Rightarrow \; (\partial'_\mu \partial'^\mu + m^2)\, \phi'(x') = 0 \quad \Rightarrow \; (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\, \phi'(x') = 0 \tag{69}$$

$\Rightarrow \qquad \phi'(x') = \phi(x) \qquad$ Lorentzskalar!

Ansatz zur Lösung: ebene Welle $\qquad \phi(x) = Ne^{-ikx}$

$$\Rightarrow \quad (\Box + m^2)\,\phi \;=\; (-k^2 + m^2)\,\phi \;\stackrel{!}{=}\; 0 \tag{70}$$

$$\Rightarrow \quad -k_0^2 + \mathbf{k}^2 + m^2 = 0 \tag{71}$$

$$k_0 = \pm\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$$

Lösung mit negativer Energie!

Allgemeine Lösung Superposition: $\quad E(\mathbf{k}) \;=\; +\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$

$$\phi(x) \;=\; \int d^3k \Big[N_+(\mathbf{k})e^{-i(E(\mathbf{k})t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \;+\; N_-(\mathbf{k})e^{-i(-E(\mathbf{k})t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\Big]$$

$$= \int d^3k \Big[N_+(\mathbf{k})e^{-i(E(\mathbf{k})t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \;+\; N_-(-\mathbf{k})e^{i(E(\mathbf{k})t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}\Big] \tag{72}$$

$$\text{Konvention:} \quad N_+(\mathbf{k}) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^3\, 2E(\mathbf{k})}\; a(\mathbf{k}) \tag{73}$$

$$N_-(-\mathbf{k}) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^3\, 2E(\mathbf{k})}\; b^*(\mathbf{k}) \tag{74}$$

$$\Rightarrow \quad \phi(x) \;=\; \int \frac{d^3k}{(2\pi^3)E(\mathbf{k})} \quad \Big[a(\mathbf{k})\, e^{-ikx} \;+\; b^*(\mathbf{k})e^{ikx}\Big] \tag{75}$$

$$\text{N.B.:} \quad \text{Lorentzinvariantes Maß:} \quad \frac{d^4k}{(2\pi)^3}\,\delta(k^2 - m^2)\,\Theta(k_0) \;=\; \frac{d^3k}{(2\pi)^3\, 2E(k)} \tag{76}$$

Für $\phi \in \mathbb{R} \qquad a(\mathbf{k}) = b(\mathbf{k})$

$\phi \in \mathbb{C} \qquad$ (zwei reelle Freiheitsgrade) $\quad a(\mathbf{k}), b(\mathbf{k})$ unabhängig

Kontinuitätsgleichung:

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \qquad = \qquad \partial_t \varrho + \nabla \cdot \mathbf{j} \tag{77}$$

$$j_\mu = i\,(\phi^* \partial_\mu \phi - (\partial_\mu \phi^*)\,\phi) \quad = (\varrho, \mathbf{j}) \tag{78}$$

$$\begin{aligned} \varrho &= +i\,(\phi^* \partial_0 \phi - \phi \partial_0 \phi^*) \quad \Rightarrow \text{ Wahrscheinlichkeitsdichte?} \\ \mathbf{j} &= +i(\phi^* \nabla \phi - \phi \nabla \phi^*) \qquad \text{Nein! Nicht positiv definit!} \end{aligned} \tag{79}$$

$\Longrightarrow$ zwei Probleme:

- Lösungen negativer Energie
- keine Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Wellenfunktion
(negative Wahrscheinlichkeiten!)

Vermuteter Grund: Gleichung 2. Ordnung in der Zeit (Quadrat des Hamiltonians)

3.2 Die Diracgleichung

(1928)

Gesucht:

$$i\,\frac{\partial}{\partial t}\,\psi \;=\; \hat{H}\psi$$

mit $\hat{H}$ linear in ∇, konsistent mit $E^2 = \mathbf{p}^{\,2} + m^2$

$$\Rightarrow \text{Ansatz:} \quad \hat{H} = \frac{1}{i}\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + \beta m \tag{80}$$

$$\begin{aligned} i\,\partial_0\,\psi &= \frac{1}{i}\,(\alpha^1\,\partial_1\,\psi + \alpha^2\,\partial_2\,\psi + \alpha^3\,\partial_3\,\psi) + \beta m\psi \\ \text{Differenzieren:}\quad i\,\partial_0^2\,\psi &= \frac{1}{i}(\alpha^1\,\partial_0\,\partial_1\,\psi + \alpha^2\,\partial_0\,\partial_2\,\psi + \alpha^3\,\partial_0\,\partial_3\,\psi) + \beta m\partial_0\psi \end{aligned}$$

$\partial_0\psi$ rechts eliminieren

$$\begin{aligned} \partial_0^2\psi &= \sum_{i=1}^{3}\alpha^{i\,2}\,\partial_i^2\psi \;-\; m^2\,\beta^2\,\psi \\ &+ \sum_{\substack{i\neq j\\ i,\,j=1}}^{3}\frac{1}{2}(\alpha^i\alpha^j \;+\; \alpha^j\,\alpha^i)\,\partial_i\,\partial_j\,\psi \\ &+ im\sum_{j=1}^{3}(\alpha^j\,\beta \;+\; \beta\alpha^j)\,\partial_j\,\psi \end{aligned} \tag{81}$$

ebene Welle: $\quad \psi \sim e^{-i\,p\cdot x} \qquad$ Forderung: $E^2 = \mathbf{p}^{\,2} + m^2$

$$\begin{aligned} -E^2\,\psi &= -\sum_{i=1}^{3}\alpha^{i\,2}\,p^{i\,2}\,\psi \;-\; m^2\,\beta^2\,\psi \\ &- \sum_{\substack{i\neq j\\ i,\,j=1}}^{3}\frac{1}{2}(\alpha^i\,\alpha^j \;+\; \alpha^j\alpha^i)\,p^ip^j\,\psi \\ &- m\sum_{j=1}^{3}(\alpha^j\beta \;+\; \beta\alpha^j)\,p^j\,\psi \end{aligned} \tag{82}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\begin{aligned} \alpha^{i\,2} = \beta^2 &= 1 \\ \alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i &= 0 \quad \text{für } i\neq j \\ \alpha^i\beta + \beta\alpha^i &= 0 \end{aligned}} \qquad \Rightarrow \text{Matrizen!}$$

$$\text{Zusätzliche Bedingungen:} \quad \hat{H} = \hat{H}^\dagger \quad \Rightarrow \quad \alpha^j = \alpha^{j\dagger}, \beta = \beta^\dagger$$
$$\alpha^{i\,2} = \beta^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Eigenwerte} \pm 1$$

$$\mathrm{Tr}(\alpha^i) \quad = \quad \mathrm{Tr}(\alpha^i \beta^2) \;=\; \mathrm{Tr}\;(\underbrace{\beta\alpha^i}_{=-\alpha^i\beta}\;\beta) \quad = \quad -\mathrm{Tr}(\alpha^i)$$

$$\Rightarrow\; \mathrm{Tr}(\alpha^i) = 0 \Rightarrow\; \mathrm{Tr}(\beta) = 0$$

Spur $=$ Summe Eigenwerte $\Rightarrow$ gerade Dimension

benötige 4 linear unabhängige Matrizen $\quad\Rightarrow$ 4 Dimensionen notwendig

$$\text{„Standard"-Darstellung:} \quad \alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix},\; \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{83}$$

$$\text{mit Paulimatrizen:} \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\; \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\; \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{84}$$

<u>Zurück zur Gleichung:</u>

$$\Rightarrow \quad \boxed{i\,\partial_0\,\psi \;=\; \frac{1}{i}\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\,\psi \;+\; m\,\beta\,\psi} \tag{85}$$

$\Rightarrow \quad \psi$ muss 4-komp. Objekt sein $\qquad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$ $\qquad$ Diracspinor

<u>kovariante Schreibweise:</u>

$$\underline{\text{Def.:}} \quad \gamma^0 \equiv \beta,\; \gamma^i \equiv \beta\,\alpha^i \;=\; \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \qquad i \;=\; 1,2,3 \tag{86}$$

$$\Rightarrow \qquad \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu \;=\; 2g^{\mu\nu}, \quad \gamma^{0\dagger} = \gamma^0, \quad \gamma^{i\dagger} = -\gamma^i$$

$$\Rightarrow \qquad i\beta\partial_0\psi \;=\; -\beta\boldsymbol{\alpha} i\nabla\,\psi \;+\; m\psi$$

$$\boxed{(i\,\gamma^\mu\partial_\mu \;-\; m)\,\psi(x) \;=\; 0} \qquad \text{Diracgleichung} \tag{87}$$

3.3 Lorentzkovarianz der Diracgleichung

Ziel war: Wellengleichung, die dem Relativitätsprinzip genügt

Betrachte LT's:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$$

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$$

wie transformiert $(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi(x) = 0$?

Unter LT's: ∂^{μ} Vierervektor
Achtung: γ^{μ} notiert wie Vierervektor, aber transformiert nicht wie einer

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x') \tag{88}$$

ψ: Vierkomponentiges Objekt, "Spinor"
$S(\Lambda)$: Matrix im Spinorraum, wirkt auf Komponenten von ψ

Lorentzkovarianz:
Diracgleichung soll dieselbe Form in allen Inertialsystemen haben!

$$\text{Forderung:} \quad (i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi(x) = 0 \underset{\text{LT}}{\longrightarrow} (i\gamma^{\mu}\partial'_{\mu} - m)\psi'(x') = 0 \tag{89}$$

Umschreiben der ungestrichenen Koordinaten auf gestrichene und Vergleich:

$$\text{ungestrichen:} \quad (i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi(x) = (i\gamma^{\mu}\Lambda^{\sigma}_{\mu}\partial'_{\sigma} - m)\psi(\Lambda^{-1}x') = 0 \tag{90}$$

$$\text{wegen} \quad \partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x'^{\sigma}} = \Lambda^{\sigma}_{\mu}\partial'_{\sigma}$$

$$\text{gestrichen:} \quad (i\gamma^{\mu}\partial'_{\mu} - m)\psi'(x') = (i\gamma^{\sigma}\partial'_{\sigma} - m)S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x') = 0 \tag{91}$$

multipliziere ungestrichen mit $S(\Lambda)$

$$\Big(iS(\Lambda)\gamma^{\mu}\Lambda^{\sigma}_{\mu}\partial'_{\sigma} - mS(\Lambda)\Big)\psi(\Lambda^{-1}x') = 0$$

$$\Big(iS(\Lambda)\gamma^{\mu}\Lambda^{\sigma}_{\mu}S^{-1}(\Lambda)\partial'_{\sigma} - m\Big)S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x') = 0 \tag{92}$$

$$\text{Vergleich mit gestrichener Gleichung (91):} \quad \Rightarrow S(\Lambda)\gamma^{\mu}\Lambda^{\sigma}_{\mu}S^{-1}(\Lambda) = \gamma^{\sigma} \tag{93}$$

$$\gamma^{\mu}\Lambda^{\sigma}_{\mu} = S^{-1}(\Lambda)\gamma^{\sigma}S(\Lambda) \tag{94}$$

Für infinitesimale LT's $\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \delta\omega^\mu_\nu \quad (\delta\omega^{\mu\nu} = -\delta\omega^{\nu\mu})$

$$\begin{aligned} \text{findet man:} \quad S(\Lambda) &= 1 - \frac{i}{4}\delta\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} + \dots & (95) \\ S^{-1}(\Lambda) &= 1 + \frac{i}{4}\delta\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu} + \dots & (96) \end{aligned}$$

$$\text{mit} \quad \sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu) = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$$

Endliche LT's aus infinitesimalen zu erhalten mit $\lim_{N\to\infty}(1 + x/N)^N = e^x$

$$S = e^{-\frac{i}{4}\omega^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}} \tag{97}$$

$\Longrightarrow S(\Lambda)$ gegeben durch Parameter $\omega^{\mu\nu}$ der LT und γ-Matrizen

3.4 Bilineare Kovarianten

Adjungierter Diracspinor: $\overline{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$

Mit $\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = S^{-1}(\Lambda)$ (wg. $\gamma^0 \sigma^{\mu\nu}\gamma^0 = \sigma^{\mu\nu\,\dagger}$) folgt:

$$\overline{\psi}\,'(x') = \overline{\psi}(x) S^{-1}(\Lambda) \qquad \text{unter LT's} \tag{98}$$

$$\begin{aligned} \overline{(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x)} &= [(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x)]^\dagger\gamma^0 = \partial_\mu\psi^\dagger(x)(-i\gamma^{\mu\dagger})\gamma^0 - m\psi^\dagger(x)\gamma^0 \\ &= \partial_\mu\psi^\dagger(x)\gamma^0(-i\gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0) - m\psi^\dagger(x)\gamma^0 = 0 \end{aligned} \tag{99}$$

Aus den Eigenschaften der γ-Matrizen:

$$\begin{aligned} -i\gamma^0\gamma^{0\dagger}\gamma^0 &= -i\gamma^0\,, \\ -i\gamma^0\gamma^{i\dagger}\gamma^0 &= i\gamma^0\gamma^i\gamma^0 = i(2g^{i0} - \gamma^i\gamma^0)\gamma^0 = -i\gamma^i \end{aligned} \tag{100}$$

Damit adjungierte Diracgleichung:

$$\begin{aligned} \partial_\mu\bar{\psi}(x)(-i\gamma^\mu) - m\bar{\psi}(x) &= 0 \\ \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m) &= 0 \end{aligned} \tag{101}$$

Allgemeine Bilinearform $\bar{\psi}(x)\Gamma\psi(x)$ mit beliebiger (4×4)-Matrix Γ:

$$\bar{\psi}'(x')\Gamma\psi'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)\Gamma S(\Lambda)\psi(x)\,. \tag{102}$$

$\Gamma = 1$: $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ Lorentzskalar

$\Gamma = \gamma^\mu$: $\bar{\psi}'(x')\gamma^\mu\psi'(x') = \bar{\psi}(x)S^{-1}\gamma^\nu S\psi(x) = \Lambda^\mu{}_\nu\, \bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x)$ Vierervektor

Beliebiges Γ: Linearkombination von 16 linear unabhängigen Basismatrizen

$$\text{Def.:} \qquad \gamma_5 = \gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{103}$$

Eigenschaften:

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0, \quad (\gamma_5)^2 = 1, \quad \gamma_5^\dagger = \gamma_5 \tag{104}$$

Alternative Darstellung:

$$\gamma_5 = \frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma \tag{105}$$

Verhalten unter LT's:

$$\begin{aligned} S^{-1}(\Lambda)\gamma_5 S(\Lambda) &= \frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\Lambda^\mu_{\mu'}\Lambda^\nu_{\nu'}\Lambda^\rho_{\rho'}\Lambda^\sigma_{\sigma'}\gamma^{\mu'}\gamma^{\nu'}\gamma^{\rho'}\gamma^{\sigma'} \\ &= \det(\Lambda)\gamma_5 \end{aligned} \tag{106}$$

mit Determinante einer (4×4)-Matrix

$$\det(\Lambda) = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\Lambda^0_\mu\Lambda^1_\nu\Lambda^2_\rho\Lambda^3_\sigma \quad \text{oder} \quad \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\det(\Lambda) = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\Lambda^\alpha_\mu\Lambda^\beta_\nu\Lambda^\gamma_\rho\Lambda^\delta_\sigma \tag{107}$$

Damit:

Γ	Anzahl	LT-Verhalten der bilinearen Kovarianten
1	1	Skalar ($P = 1$)
γ_5	1	Pseudoskalar ($P = -1$)
γ^μ	4	Vektor ($P = -1$)
$\gamma^\mu\gamma_5$	4	Axialvektor ($P = 1$)
$\sigma^{\mu\nu}$	6	antisymmetrischer Tensor

<u>Kontinuitätsgleichung</u> (aus Diracgleichung und ihrer Adjungierten):

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \quad \text{mit} \quad j^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \tag{108}$$

$$\begin{aligned} \varrho(x) &= \bar{\psi}(x)\gamma^0\psi(x) \\ &= \psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^0\psi(x) = \psi^\dagger(x)\psi(x) \\ &= \psi_1^*(x)\psi_1(x) + \psi_2^*(x)\psi_2(x) + \psi_3^*(x)\psi_3(x) + \psi_4^*(x)\psi_4(x) \geq 0 \end{aligned} \tag{109}$$

$\Rightarrow$ Kann als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert werden!

3.5 Spin

Diracspinor ist mehrkomponentig, erwarte vier lin. unabhängige Lösungen
$\Rightarrow$ zusätzliche Freiheitsgrade!

$$\hat{H} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \beta m, \qquad \hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}$$

$$\begin{aligned} \left[\hat{\mathbf{L}}, \hat{H}\right] &= [\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}, \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}}] & \text{l-te Komponente:} \\ &= [\hat{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}}] \times \hat{\mathbf{p}} & \left[r^i, \alpha^j p^j\right] \varepsilon_{ikl}\, p^k \\ &= i\, \boldsymbol{\alpha} \times \hat{\mathbf{p}} & = i\, \alpha^j \delta_{ij}\, \varepsilon_{ikl}\, p^k \end{aligned} \tag{110}$$

$\Rightarrow$ $\hat{\mathbf{L}}$ nicht separat erhalten
$\Rightarrow$ Suche $\hat{\mathbf{J}}$, so dass $\left[\hat{\mathbf{J}},\, \hat{H}\right] = 0$

$$\underline{\text{Def:}} \quad \Sigma^i = \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} = -i\alpha^1\alpha^2\alpha^3\alpha^i \tag{111}$$

Paulimatrizen: $\left[\sigma^i, \sigma^j\right] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma^k$ Algebra $SU(2)$ Rotationsgruppe

die Σ^i sind blockdiagonal $\Rightarrow$ ergeben dieselbe Algebra

Mit $\left[\Sigma^i, \beta\right] = 0$ und $\left[\Sigma^i, \alpha^j\right] = 2i\varepsilon_{ijk}\alpha^k$ findet man:

$$\left[\hat{\boldsymbol{\Sigma}}, \hat{H}\right] = -2i\boldsymbol{\alpha} \times \hat{\mathbf{p}} \tag{112}$$

$$\text{Damit ist } \left[\hat{\mathbf{L}} + \frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}, \hat{H}\right] = 0 \tag{113}$$

$$\Rightarrow \hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}, \quad \hat{\mathbf{J}} = \hat{\mathbf{L}} + \hat{\mathbf{S}} \tag{114}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{S}}^2 &= \frac{1}{4}\boldsymbol{\Sigma}^2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}^2 & \\ & \boldsymbol{\sigma}^2 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \hat{S}^3 &= \frac{1}{2}\Sigma^3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma^3 & \\ & \sigma^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{115}$$

Eigenwert von $\hat{\mathbf{S}}^2$ ist $s(s+1) \Rightarrow s = \frac{1}{2}$
Eigenwerte von S^3: $s_3 = \pm\frac{1}{2}$

Diracgleichung $\Rightarrow$ Fermionen mit Spin $\frac{1}{2}$, aber 2 Freiheitsgrade pro Spineinstellung!

3.6 Lösung der Diracgleichung

Ansatz: $$\psi \;=\; \begin{pmatrix}\varphi(p)\\ \chi(p)\end{pmatrix} e^{\mp ipx} \qquad \varphi,\,\chi \quad \text{2er Spinoren}$$

$$\Rightarrow\;(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,\psi \;=\; (\pm\,\gamma^\mu p_\mu - m)\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} e^{\mp ipx} \;=\; 0$$

$$\gamma_\mu p^\mu \;=\; p^0\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\\ -\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} & 0\end{pmatrix} \tag{116}$$

$\Rightarrow$

$$(p^0 \mp m)\,\varphi - \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\,\chi \;=\; 0 \tag{117}$$
$$(p^0 \pm m)\,\chi - \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\,\varphi \;=\; 0 \tag{118}$$

untere Gleichung, oberes Vorzeichen, $\mathbf{p}=0$: χ entspricht wieder Lösung mit negativer Energie!!

$\Rightarrow$ Setze $E(\mathbf{p}) \;=\; +\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$

a) oberes Vorzeichen

$$\Rightarrow\;\chi \;=\; \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E\,+\,m}\,\varphi \qquad \text{aus (2)} \tag{119}$$

(1): $$(E-m)\;\varphi \;-\; \underbrace{\frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})^2}{E+m}}_{=\frac{\mathbf{p}^2}{E+m}\,=\,\frac{(E-m)\,\cancel{(E+m)}}{\cancel{E+m}}}\;\varphi \;=\; 0 \qquad \text{für jedes } \varphi$$

wähle zwei linear unabhängige Basisspinoren $$\varphi_1 \;=\; \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \varphi_2 \;=\; \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{120}$$

$$\Rightarrow\quad u_1 \;=\; N\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\,\varphi_1\end{pmatrix} \;=\; N\begin{pmatrix}1\\0\\ \frac{p^3}{E+m}\\ \frac{p^1+ip^2}{E+m}\end{pmatrix},\; u_2 \;=\; N\begin{pmatrix}\varphi_2\\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\,\varphi_2\end{pmatrix} \;=\; N\begin{pmatrix}0\\1\\ \frac{p^1-ip^2}{E+m}\\ \frac{-p^3}{E+m}\end{pmatrix} \tag{121}$$

b) unteres Vorzeichen

$$\varphi \;=\; \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\,\chi \qquad\qquad \chi_1 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\, \chi_2 \;=\; \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\; v_1 \;= N \begin{pmatrix}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\,\chi_1\\ \chi_1\end{pmatrix} = N \begin{pmatrix}\frac{p^1-ip^2}{E+m}\\ -\frac{p^3}{E+m}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \quad v_2 \;= N \begin{pmatrix}\frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}\,\chi_2\\ \chi_2\end{pmatrix} = N \begin{pmatrix}\frac{p^3}{E+m}\\ \frac{p^1+ip^2}{E+m}\\ 1\\ 0\end{pmatrix} \tag{122}$$

<u>Spin der Lösungsspinoren:</u>

Wähle $\mathbf{p} = (0, 0, p^3)$

$$\Rightarrow u_1 = N \begin{pmatrix}1\\0\\ \frac{p^3}{E+m}\\ 0\end{pmatrix}, \quad u_2 = N \begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \frac{-p^3}{E+m}\end{pmatrix}, \quad v_1 = N \begin{pmatrix}0\\ -\frac{p^3}{E+m}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}, \quad v_2 = N \begin{pmatrix}\frac{p^3}{E+m}\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \tag{123}$$

$$S_3 u_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sigma_3 & 0\\ 0 & \sigma_3\end{pmatrix} u_1 = \frac{1}{2} u_1 \qquad S_3 v_1 = -\frac{1}{2} v_1$$

$$S_3 u_2 = -\frac{1}{2} u_2 \qquad S_3 v_2 = \frac{1}{2} v_2$$

4 Freiheitsgrade eines Diracspinors:

ein Teilchen positiver Energie mit $s_3 = \pm\frac{1}{2}$,
ein Teilchen negativer Energie mit $s_3 = \mp\frac{1}{2}$

<u>Normierung:</u> Konvention

für $N = \sqrt{E+m}$ wird $u_r^\dagger(p)\, u_s(p) \;=\; v_r^\dagger(p)\, v_s(p) \;=\; 2E\,\delta_{rs}$

$$
\begin{aligned}
\text{Orthonormalität:} \quad & \overline{u}_r(p) u_s(p) && = 2m\delta_{rs} \\
& \overline{u}_r(p) v_s(p) && = \overline{v}_r(p) u_s(p) = 0 \\
& \overline{v}_r(p) v_s(p) && = -2m\delta_{rs}
\end{aligned} \tag{124}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Dirac im Impulsraum} \quad & (\not{p} - m) u_s(p) && = 0 \\
& (\not{p} + m) v_s(p) && = 0
\end{aligned} \tag{125}
$$

$$
\text{Notation:} \quad \not{a} = a^\mu \gamma_\mu
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Vollständigkeitsrelation:} \quad & \sum_s u_\alpha(s,p) \overline{u}_\beta(s,p) && = (\not{p} + m)_{\alpha\beta} \\
& \sum_s v_\alpha(s,p) \overline{v}_\beta(s,p) && = (\not{p} - m)_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{126}
$$

$\Rightarrow$ <u>allgemeine Lösung der Diracgleichung:</u>

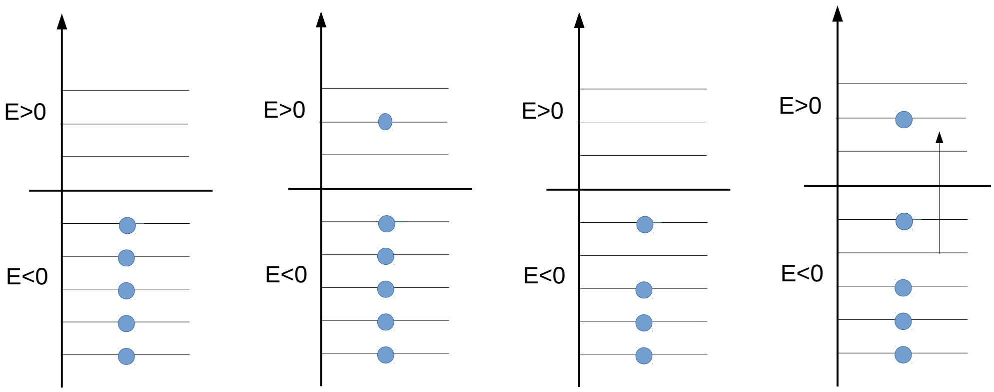
$$
\boxed{\psi(x) \ = \ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3\, 2E(k)} \ \sum_{r=1}^{2} \left\{ b_r(k) u_r(k) e^{-ikx} \ + \ d_r^*(k) v_r(k) e^{ikx} \right\}} \tag{127}
$$

3.7 Lösungen negativer Energie und Antiteilchen

“Negative Energien” sowohl bei K.-G. als auch in Dirac!

Dirac’sche Interpretation, *nur* gültig für Fermionen:

- Pauliprinzip: jeder Quantenzustand *höchstens einfach* besetzt
- Vakuum selbst nicht beobachtbar, nur Energiedifferenzen relativ zum Vakuum
- Diracvakuum: unendlich tiefer “See” aus Fermionen,
  alle Niveaus negativer Energie besetzt; stabiler Zustand!
- $\Rightarrow$ Teilchenzustände, Lochzustände=Antiteilchenzustände
- Es gibt Paarerzeugung und Paarvernichtung, gleiche Quantenzahlen wie das Vakuum, $E = mc^2$

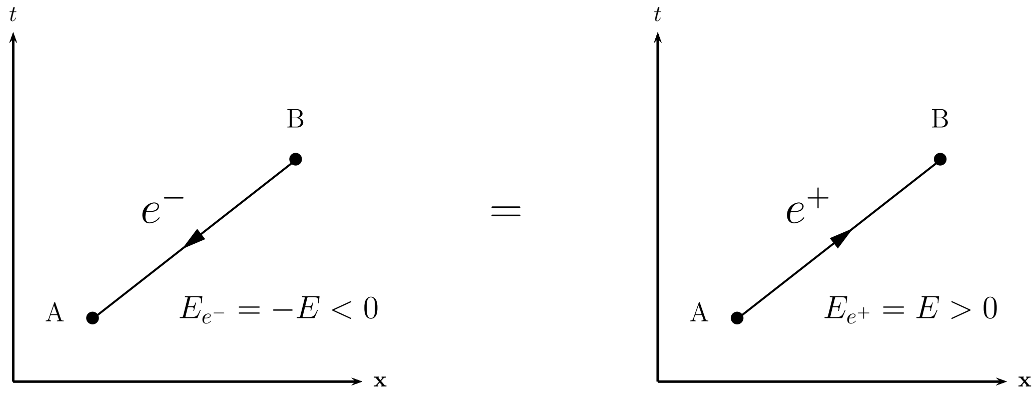


(a) Vakuumzustand als Diracsee, (b) Ein-Teilchenzustand, (c) Ein-Loch (Antiteilchen)-Zustand, (d) Teilchen-Loch (Antiteilchen)-Paar

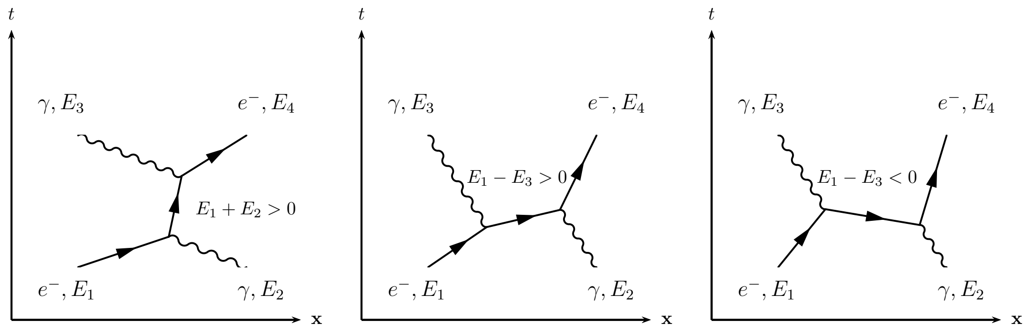
Feynman-Stückelberg-Interpretation
aus der QFT, vgl. später, gültig für Fermionen und Bosonen:

- “Negative Energien” in ebenen Wellen wie $-E \cdot t$
- Vorwärts in der Zeit laufende Teilchen negativer Energie
  =Rückwarts in der Zeit laufende Antiteilchen positiver Energie

Beispiel: Äquivalenter Ladungstransport durch ein rückwärts in der Zeit laufendes Elektron und ein vorwärts laufendes Positron:



Beispiel: Elementarprozesse zur Comptonstreuung $e^-\gamma \longrightarrow e^-\gamma$:



3.8 Parität und Ladungskonjugation

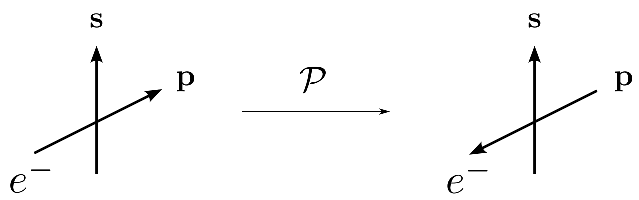
a) Parität = Spezialfall einer LT, $(\Lambda^\sigma_\mu) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad & \gamma^\mu \Lambda^\sigma_\mu && = S^{-1}(\Lambda)\gamma^\sigma S(\Lambda) \quad \text{wie gezeigt} && (128)\\
\sigma = 0: \qquad & \gamma^0 && = S^{-1}(\Lambda)\gamma^0 S(\Lambda) && \\
\sigma = i: \qquad & -\gamma^i && = S^{-1}(\Lambda)\gamma^i S(\Lambda) && (129)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \text{gelöst durch} \qquad & S(\Lambda) = \gamma^0 e^{i\alpha} \quad \text{wähle} \quad \alpha = 0\\
\Rightarrow \qquad & \psi'(x') = \psi^P(x) = \gamma^0 \psi(\mathbf{x}, t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Beachte:} \quad & \gamma^0 u_s(p) = u_s(p)\\
& \gamma^0 v_s(p) = -v_s(p) \qquad (130)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Teilchen und Antiteilchen haben entgegengesetzte "intrinsische Parität", Spin von P nicht beeinflusst



Links- und Rechtssystem gleichwertig bei freien e^+, e^-!

b) Ladungskonjugation C: Teilchen $\longleftrightarrow$ Antiteilchen

reelles Skalarfeld: $\phi(x)$ nur ein Freiheitsgrad $\quad \Rightarrow$ kein Antiteilchen
komplexes Skalarfeld: $\phi(x) = \phi_1(x) + i\phi_2(x)$, $\phi_1, \phi_2 \epsilon R \quad \Rightarrow$ 2 Freiheitsgrade

$$\Big[(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi(x)\Big]^* = (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi^*(x) = 0 \qquad (131)$$

$$\phi^C(x) = \phi^*(x) \text{ Antiteilchen zu } \phi$$

<u>Adjungierte Diracgleichung:</u>

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}(-i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu - m) \quad &= \quad 0 \qquad (132)\\
[\qquad\qquad\qquad]^T &
\end{aligned}$$

$$\Big(i(-\gamma^\mu)^T\partial_\mu - m\Big)\overline{\psi}^T = 0 \iff \Big(+iS(-\gamma^\mu)^T S^{-1}\partial_\mu - m\Big)S\overline{\psi}^T = 0 \tag{133}$$

Forminvariante Gleichung falls $S(C)(-\gamma^\mu)^T S^{-1}(C) = \gamma^\mu$

gelöst durch $S(C) = i\gamma^2\gamma^0 = i\begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}$

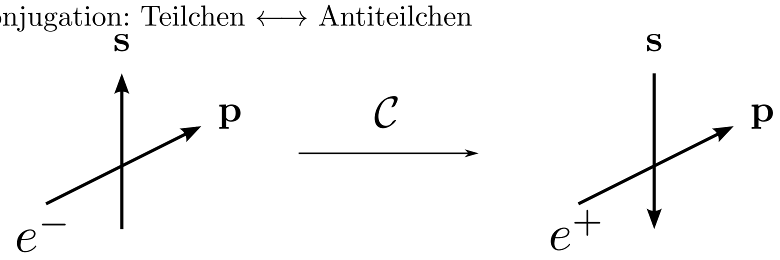
$\Rightarrow (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)S(C)\overline{\Psi}^T = 0$

also $S(C)\overline{\Psi}^T$ erfüllt die Diracgleichung

$\Rightarrow\ \psi^C = S(C)\overline{\psi}^T = i\gamma^2\gamma^0\,\overline{\psi}^T = i\gamma^2\psi^*$

$$\begin{aligned} S(C)\overline{u}_s^T(p) &= (-1)^{s-1}\, v_s(p) \\ S(C)\overline{v}_s^T(p) &= (-1)^{s-1}\, u_s(p) \end{aligned} \tag{134}$$

Ladungskonjugation: Teilchen $\longleftrightarrow$ Antiteilchen



$\Rightarrow$ Freie Diractheorie invariant unter CP
später: ebenso QED und QCD, schwache WW dagegen bricht C, P, CP!

3.9 Nichtrelativistischer Grenzfall der Diracgleichung

freie Dirac-Gleichung:

$$(i\partial\!\!\!/ - m)\psi = 0 \tag{135}$$

Betrachte Teilchenlösung (positive Energie) $\psi = \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{p}) \\ \chi(\mathbf{p}) \end{pmatrix} e^{-ipx}$

$$\begin{aligned} (E-m)\varphi - \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\,\chi &= 0 && (136)\\ (E+m)\chi - \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\,\varphi &= 0 && (137) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= \left(\mathbf{p}^2 + m^2\right)^{\frac{1}{2}} = m\left(\frac{\mathbf{p}^2}{m^2} + 1\right)^{\frac{1}{2}} = m\left(1 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m^2} + ...\right) && (138)\\ &= m + \frac{\mathbf{p}^2}{2m^2} + O\left(\frac{\mathbf{p}^4}{m^4}\right) && (139) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathbf{p}^2}{2m}\varphi = \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\,\chi$$

$$\left(2m + \frac{\mathbf{p}^2}{2m}\right)\chi = \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\,\varphi \quad \Rightarrow \quad \chi \approx \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{2m}\varphi \tag{140}$$

$$\Rightarrow \quad \chi \text{ klein gegen } \varphi \tag{141}$$

$\Rightarrow$ Gleichung für große Komponente φ :

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m}\varphi = \frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})^2}{2m}\varphi = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}\varphi \quad \checkmark \tag{142}$$

Reparametrisiere:

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi(t,\mathbf{p}) \\ \chi(t,\mathbf{p}) \end{pmatrix} e^{-imt + i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, \quad i\partial_t\psi = \begin{pmatrix} m\varphi + i\partial_t\varphi(x) \\ m\chi + i\partial_t\chi(x) \end{pmatrix} e^{-imt + i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \tag{143}$$

Wellengleichung:

$$\begin{aligned} (i\partial_t + m)\varphi &= \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\,\chi + m\varphi && (144)\\ (i\partial_t + m)\chi &= \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}\,\varphi - m\chi && (145) \end{aligned}$$

obere Komponente : $$i\frac{\partial}{\partial t}\varphi = \frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})^2}{2m}\varphi = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}\varphi = -\frac{\nabla^2}{2m}\varphi \tag{146}$$

$$\Rightarrow \boxed{i\frac{\partial}{\partial t}\varphi = -\frac{\nabla^2}{2m}\varphi} \quad \text{Schrödinger!} \tag{147}$$

Diracgleichung mit elektromagnetischem Feld:

Kopplung eines Teilchens mit Ladung q an äußeres elektromagnetisches Feld:

vgl. Hamiltonfunktion Elektrodynamik bzw. Hamiltonoperator in QM,
Ersetzung $E \to E - q\phi, \quad \mathbf{p} \to \mathbf{p} - q\mathbf{A}$ oder

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu \quad \text{mit} \quad A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$$

$$(i\not{D} - m)\psi = (i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) - m)\psi = 0 \tag{148}$$

Für $|q\phi|/m, |q\mathbf{A}|/m \ll 1$ wieder Aufspaltung in große und kleine Kompenten

Große Komponente:

$$i\partial_t\varphi = \frac{(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{\Pi}})^2}{2m}\varphi + q\phi\varphi \quad \text{mit} \tag{149}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{\Pi}} &= (\hat{\mathbf{p}} - q\mathbf{A}) && (150)\\
&= \frac{1}{i}\nabla - q\mathbf{A} && (151)\\
&= -i\mathbf{D} && (152)
\end{aligned}$$

Benutze:

$$\sigma^i\sigma^j = \delta^{ij} + i\,\varepsilon^{ijk}\sigma^k \tag{153}$$

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{\Pi}})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{\Pi}}) &= \hat{\mathbf{\Pi}}^2 + i\,\varepsilon^{ijk}\Big(\frac{1}{i}\nabla^i - qA^i\Big)\Big(\frac{1}{i}\nabla^j - qA^j\Big)\sigma^k && (154)\\
&= \hat{\mathbf{\Pi}}^2 + i\,\varepsilon^{ijk}\Big(-\frac{q}{i}\nabla^i A^j\Big)\sigma^k && (155)\\
&= \hat{\mathbf{\Pi}}^2 - q(\nabla\times\mathbf{A})\cdot\boldsymbol{\sigma} = \hat{\mathbf{\Pi}}^2 - q\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\sigma} && (156)\\
& && (157)\\
\Big(\quad &= \hat{\mathbf{\Pi}}^2 + \frac{q}{2}\,\varepsilon^{ijk}\Big(\partial^i\mathbf{A}^j - \partial^j\mathbf{A}^i\Big)\sigma^k \qquad \text{wg. } \nabla^i = -\partial^i\\
&= \hat{\mathbf{\Pi}}^2 + \frac{q}{2}\,\varepsilon^{ijk}F^{ij}\sigma^k = \hat{\mathbf{\Pi}}^2 - q\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\sigma}\Big) && (158)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{i\partial_t\varphi = \Big[\frac{1}{2m}\Big(\frac{1}{i}\nabla - q\mathbf{A}\Big)^2 - \frac{q}{2m}\mathbf{B}\cdot\boldsymbol{\sigma} + q\phi\Big]\varphi} \tag{159}$$

Pauligleichung! Spin-Wechselwirkung mit $\mathbf{B}$-Feld:

$$\begin{aligned}
V &= -\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B} = -g_L\mu_B\,\mathbf{s}\cdot\mathbf{B} && (160)\\
\boldsymbol{\mu} &= \underbrace{\frac{q}{2m}}_{\mu_B}\boldsymbol{\sigma} = \mu_B 2\mathbf{s} && (161)\\
&\Rightarrow g_L = 2 \qquad \text{Vorhersage Landéfaktor!} && (162)
\end{aligned}$$

Vergleiche Schrödinger:

$$i\,\partial_t \psi = \left[\frac{1}{2m}\left(\frac{1}{i}\nabla - q\mathbf{A}\right)^2 + q\phi\right]\psi \tag{163}$$

enthält keine Spin-Wechselwirkung!

3.10 Ultrarelativistische und masselose Fermionen

$|\mathbf{p}|/m \to \infty$ bzw. $m \simeq 0$ Neutrinos, hochbeschleunigte Teilchen

Diracgleichung:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) \tag{164}$$

Ansatz im Ortsraum:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix}, \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} +i\partial_0\varphi(x) + i\sigma^j\partial_j\chi(x) &= 0\,, \\ -i\partial_0\chi(x) - i\sigma^j\partial_j\varphi(x) &= 0\,. \end{aligned} \tag{165}$$

Linearkombination entkopplet Gln, $\phi_R(x) = \varphi(x) + \chi(x)$, $\phi_L(x) = \varphi(x) - \chi(x)$

$\Rightarrow$ Weylgleichungen:

$$\begin{aligned} \left(i\partial_0 + i\sigma^j\partial_j\right)\phi_R(x) &= 0 \\ \left(i\partial_0 - i\sigma^j\partial_j\right)\phi_L(x) &= 0 \end{aligned} \tag{166}$$

$\phi_{L,R}(x)$ heißen Weylspinoren

Ansatz ebene Welle

$$\phi_R(x) = \phi_{R,L}(\mathbf{p})e^{-ipx}\,, \tag{167}$$

Weylgleichungen:

$$\begin{aligned} (p^0 - \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})\phi_R(\mathbf{p}) &= 0 \\ (p^0 + \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p})\phi_L(\mathbf{p}) &= 0 \end{aligned} \tag{168}$$

Wähle o.B.d.A. $\mathbf{p} = (0, 0, p^3)$

$$\begin{gathered} p^0\phi_R(\mathbf{p}) = \sigma^3 p^3 \phi_R(\mathbf{p}) \\ p^0\phi_L(\mathbf{p}) = -\sigma^3 p^3 \phi_L(\mathbf{p}) \end{gathered} \tag{169}$$

Wegen $\sigma^3 = \mathrm{diag}(1, -1)$ enthalten ϕ_R, ϕ_L jeweils wieder "Lösungen positiver und negativer Energie"

Schreibe $E = \sqrt{\mathbf{p}^2} = |\mathbf{p}|, p^0 = \pm E$; Def. Basisspinoren:

$$\begin{aligned} p^0 = E: \quad \phi_{R,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \phi_{L,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ p^0 = -E: \quad \phi_{R,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \phi_{L,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{170}$$

Allgemeine Lösungen der Weylgleichungen

$$\begin{aligned}
\phi_R(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})} \left\{ b(\mathbf{p})\phi_{R,1}\, e^{-ipx} + d^*(\mathbf{p})\phi_{R,2}\, e^{ipx} \right\} \\
\phi_L(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})} \left\{ b(\mathbf{p})\phi_{L,1}\, e^{-ipx} + d^*(\mathbf{p})\phi_{L,2}\, e^{ipx} \right\} \qquad (171)
\end{aligned}$$

Beide äquivalent!

Umschreiben (168) für $p^0 = E$:

$$\begin{aligned}
\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{\mid \mathbf{p} \mid}\phi_L &= -\phi_L \ , \\
\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{\mid \mathbf{p} \mid}\phi_R &= \phi_R \ , \qquad (172)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \phi_{R,L}$ sind Eigenvektoren zum Helizitätsoperator

$$\hat{h} = \frac{1}{2} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}}{\mid \mathbf{p} \mid} \qquad (173)$$

Projektion Spin auf Impuls

$\Rightarrow \phi_R$ positive Helizität (rechtsdrehend), ϕ_L negative Helizität (linksdrehend)

Paritätstransformation: $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$:

$$\phi_R \overset{\mathcal{P}}{\longleftrightarrow} \phi_L \ . \qquad (174)$$

Theorien, die links- und rechtshändige Anteile unterschiedlich behandeln verletzen Parität: schwache Wechselwirkung

Übersetzung auf Diracspinoren:

Diracgleichung f. $m = 0$ im Impulsraum

$$E\psi = +\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}\psi \ . \qquad (175)$$

Lösungsspinoren für $\mathbf{p} = (0, 0, p^3), p^3 > 0$ und $m = 0$:

$$u_2 = -v_1, \quad u_1 = v_2 \ , \qquad (176)$$

Nur zwei linear unabhängige Lösungen!
Teilchen und Antiteilchen haben festgelegte, entgegengesetzte Helizität!

Natur: Neutrinos mit Helizität -1, Antineutrinos Helizität +1

$$\gamma_5 \alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix} = \Sigma^i \tag{177}$$

Mit $E = |\mathbf{p}|$ aus (175):

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_5}{2}\psi &= \frac{\gamma_5}{2}\frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{|\, \mathbf{p} \,|}\psi \\ &= \frac{\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{p}}}{|\, \mathbf{p} \,|}\psi \; . \end{aligned} \tag{178}$$

Rechts: Helizität , links: Chiralität. Im masselosen Fall (und nur dann!) gleich

Def. Projektionsoperatoren:

$$P_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} \; , \quad P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} \; , \tag{179}$$

mit den Eigenschaften

$$P_R^2 = P_R, \quad P_L^2 = P_L, \quad P_R P_L = P_L P_R = 0 \; . \tag{180}$$

Allgemeiner Spinor: Linearkombination von Spineigenzuständen

$$\psi(x) = a\psi_+(x) + b\psi_-(x) \; , \tag{181}$$

$$P_R \psi = a\psi_+ = \psi_R, \quad P_L \psi = b\psi_- = \psi_L \; . \tag{182}$$

Im masselosen Fall sind Spineigenzustände auch Eigenzustände des Helizitätsoperators

Beachte:

$$\psi = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5 + 1 - \gamma_5) = \psi_R + \psi_L \; , \tag{183}$$

auch für Spinoren mit $m \neq 0$ möglich, aber dann sind chirale Anteile *keine* Helizitätseigenzustände!

3.11 Maxwellgleichungen

klassische E-Dynamik: $(\varepsilon_0 = \mu_0 = 1)$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \varrho \qquad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j} \tag{184}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \tag{185}$$

$$\tag{186}$$

B,E-Felder aus Potenzialen:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \ \mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{187}$$

$$\tag{188}$$

Potenziale erfüllen automatisch zwei Maxwellgleichungen:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad \text{für jedes } \mathbf{A} \tag{189}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \underbrace{\nabla \times (-\nabla}_{= 0 \text{ für } \underline{\text{jedes}}\ \Phi} \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{190}$$

<u>Rest:</u>

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla^2\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \mathbf{A} = \varrho \tag{191}$$

$$\Big(\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{A})\Big) \tag{192}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla^2\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) \tag{193}$$

$$-\nabla^2 \mathbf{A} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mathbf{j} - \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) \tag{194}$$

<u>Kovariante Formulierung:</u>

$$A^\mu(x) = \Big(\Phi(x), \mathbf{A}(x)\Big) \tag{195}$$

$$F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A^\nu(x) - \partial^\nu A^\mu(x) \qquad \text{Feldstärketensor} \tag{196}$$

wegen

$$E^i = -\nabla^i\Phi - \partial_t A^i = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = F^{i0}$$

$$B^i = \varepsilon^{ijk}\nabla^j A^k = -\varepsilon^{ijk}\partial^j A^k = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F^{jk} \tag{197}$$

$$\Rightarrow (F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{198}$$

Ladungsdichte und Strom: $j^\mu = (\varrho, \mathbf{j})$

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \tag{199}$$

$$\text{inhomogene Maxwellgleichungen:} \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \tag{200}$$

$$\text{homogene Maxwellgleichungen:} \quad \partial^\mu F^{\nu\varrho} + \partial^\nu F^{\varrho\mu} + \partial^\varrho F^{\mu\nu} = 0 \tag{201}$$

Freie Felder (keine Ladung, keine Wechselwirkungen): $\mathbf{j} = \varrho = 0$

$$\Rightarrow \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \tag{202}$$

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = 0 \tag{203}$$

Eichfreiheit: Nichteindeutigkeit von A^μ; Physikalische $\mathbf{E}, \mathbf{B}$, i.e. $F^{\mu\nu}$ bleiben unverändert, wenn

$$A^\mu \to A^{\mu\prime} = A^\mu + \partial^\mu f \tag{204}$$

für beliebiges $f(x)$:

$$\partial^\mu A^{\nu\prime} - \partial^\nu A^{\mu\prime} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + \partial^\mu \partial^\nu f - \partial^\nu \partial^\mu f \tag{205}$$

$$\text{Wähle } f \text{ so, dass } \partial_\mu A^\mu = 0 \qquad \boxed{\text{Lorenzeichung}} \tag{206}$$

$$\text{Wellengleichung} \;\Rightarrow \boxed{\Box A^\nu = 0} \tag{207}$$

wie 4 KG-Gleichungen für $m = 0$, A^ν reell, Vektor $\to$ Spin 1!

$$\text{Lösung: ebene Wellen} \quad A^\mu(x) = \epsilon^\mu(k) e^{-ikx} \tag{208}$$

$$\text{mit } k^2 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow m = 0 \tag{209}$$

$$\text{Aus Eichbedingung:} \quad k^\mu \cdot \epsilon_\mu(k) \stackrel{!}{=} 0 \tag{210}$$

Lorenzeichung noch immer nicht eindeutig

$$\partial^\mu A_\mu = 0 \text{ für } A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu g \text{ mit } \Box g = 0 \tag{211}$$

$\Rightarrow$ ein weiterer Freiheitsgrad kann eliminiert werden, e.g. $A^0 = 0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \epsilon^0(k) &= 0 && (212) \\ \boldsymbol{\epsilon}(k) \cdot \mathbf{k} &= 0 && (213) \end{aligned}} \quad \text{Strahlungseichung}$$

$$\boldsymbol{\epsilon} \perp \mathbf{k} \quad \text{transversal} \;\Rightarrow\; \text{zwei Lösungen!} \tag{214}$$

$$\underline{\text{Vollständigkeit:}} \qquad \sum_{\lambda=1}^{2} \epsilon^i_\lambda(k)\epsilon^j_\lambda(k) = \delta_{ij} - \frac{k^i k^j}{\mathbf{k}^2} \tag{215}$$

<u>Allgemeine Lösung:</u>

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(k)} \sum_{\lambda=1}^{2} \epsilon^\mu_\lambda(k) \left\{ a_\lambda(k) e^{-ikx} + a^*_\lambda(k) e^{ikx} \right\} \tag{216}$$

3.12 Relativistische Quantenmechanik oder Quantenfeldtheorie

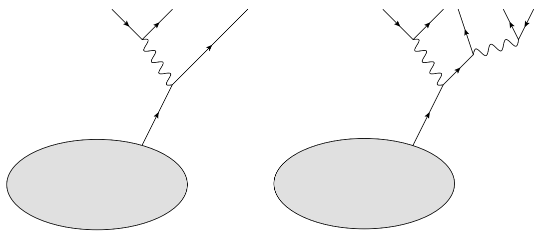
Ergebnisse bisher:

Wellengleichung	Kovarianz unter LT's	Spin	q.m. Wahrscheinlichkeitsinterpretation
$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi(x) = 0$	✓	0	—
$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$	✓	$\frac{1}{2}$	✓
$\Box A^\mu(x) = 0$	✓	1	—

$\Rightarrow$ Nur die Diracgleichung lässt sich als relativistische Quantenmechanik auffassen!

- Beschreibung von Teilchen mit Spin 0 (Pionen, Kaonen,...) und Spin 1 (ρ-Meson, J/ψ,....) ?
- Dirac: Wechselwirkung bisher mit rein klassischem e.m. Feld (Emission und Absoprtion von Strahlung im Atom,...)?
- Keine Beschreibung der Quantisierung und Dynamik von Photonen!

Wegen Möglichkeit für Paarproduktion relativistische q.m. Beschreibung grundsätzlich ungeeignet:



Endzustände mit verschiedenen Anzahlen von Teilchen und Antiteilchen möglich, bei gleichen Quantenzahlen!

Einteilchenwellenfunktion $\psi(\mathbf{x}, t)$ verliert ihren Sinn!
$\psi(x_1, \ldots x_n, t)$, aber n nicht fixiert!

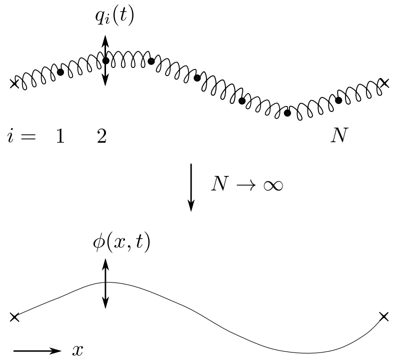
$\Rightarrow$ Benötige neuen Formalismus mit unendlich vielen Freiheitsgraden

$\Rightarrow$ Quantenfeldtheorie!

4 Klassische Feldtheorie

4.1 Von der N-Punktmechanik zur relativistischen Feldtheorie

Beispiel: Elastische Saite



N-Punktmechanik	Feldtheorie
i	x
t	t, x
$q_i(t)$	$\phi(x,t)$
$\dot{q}_i(t)$	$\dot{\phi}(x,t)$
$L(q_i, \dot{q}_i)$	$L(\phi, \dot{\phi})$

N Massenpunkte, $2N$ Freiheitsgrade $q_i(t)$, $\quad p_i(t) = m\dot{q}_i(t)$, $\quad i = 1, ...N$

Rand: $q_0 = q_{N+1} = 0 = \dot{q}_0 = \dot{q}_{N+1}$

$$\begin{aligned}
L(q_i, \dot{q}_i) &= \sum_{i=0}^{N} \left(\frac{m}{2}\dot{q}_i^2 - \frac{k}{2}\Big(q_i - q_{i-1}\Big)^2 \right) - \frac{k}{2}q_N^2 \\
&= \sum_{i=1}^{N} \Delta x \left(\frac{m}{2\Delta x}\dot{q}_i^2 - \frac{k\Delta x}{2} \left(\frac{q_i - q_{i-1}}{\Delta x} \right)^2 \right) - \frac{k}{2}q_N^2 \qquad (217) \\
H(p_i, q_i) &= \sum_{i=0}^{N+1} p_i \dot{q}_i - L \qquad (218) \\
S[q_i, \dot{q}_i] &= \int_{t_0}^{t_1} dt\; L(q_i, \dot{q}_i) \qquad (219)
\end{aligned}$$

Die Wirkung ist ein Funktional: Abb. von Funktionen auf eine reelle Zahl (Vektorraum $\to$ Körper)

Bewegungsgleichungen:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (220)$$

Kontinuierliche Saite: Limes $\Delta x \to 0, N \to \infty$ mit

$$l = N\Delta x = \text{const.}, \quad \mu \equiv \frac{m}{\Delta x} = \text{const.}, \quad \kappa \equiv k\Delta x = \text{const.}$$

Unendlich viele Freiheitsgrade!

$$L(q_i, \dot{q}_i) \to L(\phi, \partial_\nu \phi) = \int_0^l dx \left[\frac{\mu}{2}\left(\partial_t \phi(x,t)\right)^2 - \frac{\kappa}{2}\left(\partial_x \phi(x,t)\right)^2\right] \tag{221}$$

Beachte: hängt noch von t ab, aber nicht von x

Def. Lagrangedichte: $\mathscr{L}(\phi, \partial_\nu \phi) = \frac{\mu}{2}\left(\partial_t \phi(x,t)\right)^2 - \frac{\kappa}{2}\left(\partial_x \phi(x,t)\right)^2$

Verallgemeinerung auf beliebiges Skalarfeld, Minkowskiraum:
S muss Lorentzskalar sein!

$$\Rightarrow S[\phi] = \int d^4x \, \mathscr{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \tag{222}$$

$$= \int dt \underbrace{\int d^3x \, \mathscr{L}(\phi, \partial_\mu \phi)}_{= L(\phi, \partial_\mu \phi)} \tag{223}$$

$\mathscr{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ heißt Lagrangedichte; Lorentzskalar!

4.2 Einschub Funktionalableitung:

$$\underline{\text{Def.:}} \quad \delta F[x] = \int ds\, \frac{\delta F}{\delta x(s)}\, \delta x(s) \quad \text{in Analogie zu}$$
$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial xi}\, dx_i$$

Beispiele:

1.

$$\begin{aligned} F[x] &= x(a) = \int ds\ \delta(s-a)x(s) \\ \delta F &= \int ds\ \delta x(s)\delta(s-a) \\ \frac{\delta F}{\delta x(s)} &= \frac{\delta x(a)}{\delta x(s)} = \delta(s-a) \end{aligned} \tag{224}$$

2.

$$\begin{aligned} F[x] &= \int ds\ f(s)x(s) \\ \delta F &= \int ds\ f(s)\delta x(s) \\ \frac{\delta F}{\delta x(s)} &= f(s) \end{aligned} \tag{225}$$

3.

$$\begin{aligned} F[x] &= \int ds \int dt\ f(s,t)x(s)x(t) \\ \delta F &= \int ds \int dt\ f(s,t)\Big[\delta x(s)x(t) + x(s)\delta x(t)\Big] \\ &= \int ds \int dt\ \Big[f(s,t)x(t) + f(t,s)x(t)\Big]\delta x(s) \\ \frac{\delta F}{\delta x(s)} &= \int dt\ x(t)\Big[f(s,t) + f(t,s)\Big] \end{aligned} \tag{226}$$

$$\text{"Taylorformel": } F[x] = \sum_{u=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int ds_1 ... \int ds_n\ F^{(n)}(s_1, ...s_n)x(s_1)...x(s_n)$$

4.3 Euler-Lagrange-Gleichungen für Felder

Dynamik: Hamilton'sches Prinzip $\delta S = 0$

jetzt: Variation der Felder

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= \phi(x) + \delta_0\phi(x), \qquad \delta_0\phi(x) \xrightarrow{|x|\to\infty} 0 \\ (\partial_\mu\phi)'(x) &= \partial_\mu\phi(x) + \delta_0\partial_\mu\phi(x) = \partial_\mu\phi(x) + \partial_\mu\delta_0\phi(x) \end{aligned} \tag{227}$$

Funktionalableitung:

$$\frac{\delta\phi(y)}{\delta\phi(x)} = \delta^4(x-y) \tag{228}$$

$$S' = \int d^4x\ \mathscr{L}(\phi'(x), \partial_\mu\phi'(x)) \tag{229}$$

$$= \int d^4x \left\{ (\mathscr{L}(\phi, \partial_\mu\phi) + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\delta_0\phi + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta_0\partial_\mu\phi + \ldots \right\} \tag{230}$$

$$= S + \delta S + \ldots \tag{231}$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} \int d^4x \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\ \delta_0\partial_\mu\phi &= \int d^4x \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\ \partial_\mu\delta_0\phi \\ &= \int d^4x \Big[\frac{d}{dx^\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta_0\phi\right) - \left(\frac{d}{dx^\mu}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\delta_0\phi\Big] \end{aligned}$$

1. Term: Viererdivergenz $\partial_\mu J^\mu(x)$

Satz von Gauß in 4d:

$$\int_{\partial V_4} dA_\mu\ J^\mu(x) = \int_V d^4x\ \partial_\mu J^\mu(x), \quad dA_\mu = \frac{1}{3!}\varepsilon_{\mu\nu\varrho\sigma}\ dx^\nu dx^\varrho dx^\sigma \tag{232}$$

$$\text{Hier: } J^\mu(x) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi}\delta\phi_0(x) \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{wg.} \quad \delta\phi_0(x\to\infty) = 0 \tag{233}$$

$$S' = S + \underbrace{\int d^4x \left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi} - \frac{d}{dx^\mu}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right\}\delta_0\phi(x)}_{=\delta S} + \ldots \tag{234}$$

$$\delta S \overset{!}{=} 0 \quad \text{für beliebige} \quad \delta_0\phi(x) \tag{235}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi} - \frac{d}{dx^\mu}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = 0} \quad \text{Euler-Lagrange-Feldgleichung} \tag{236}$$

Beispiel Saite:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \mu \, \partial_0 \phi, \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_1 \phi)} = -\kappa \, \partial_1 \phi \tag{237}$$

$$\mu \partial_t^2 \phi - \kappa \partial_x^2 \phi = 0 \tag{238}$$

4.4 Wirkung und Lagrangefunktion elementarer Felder

Bisher: $\mathscr{L}$ allgemein, $\phi(x)$ Lorentzskalar

Verallgemeinerung auf andere, mehrkomponentige Felder: $\phi_i(x), i = 1, \ldots N$:

Verhalten unter LTs: $\phi_i'(x') = D_{ij}(\Lambda)\phi_j(x)$
mit $D(\Lambda)$ Darstellungsmatrix der LT

- $N = 1, D(\Lambda) = 1$, Spin-0- (triviale) Darstellung, Skalarfeld
- $N = 4, D(\Lambda) = S(\Lambda)$, Spin-1/2-Darstellung, Diracspinor
- $N = 4, D(\Lambda) = \Lambda$, Spin-1-Darstellung, Vektorfeld

Postulate zur Konstruktion von $\mathscr{L}$:

- Lokalität
  $\mathscr{L}$ hängt nur von $\phi(x)$ und $\partial_\mu\phi(x)$ am *selben* Raumzeitpunkt x ab, *keine* Terme $\phi(x)\phi(y)$, etc.
- $\mathscr{L}$ ist reell
  Geht in Hamiltonfunktion/Energie des Systems ein
- Maximal quadratisch in Zeitableitung
  Konsistent mit aller Erfahrung, ansonsten akausales Verhalten von Systemen möglich
- $\mathscr{L}$ ist Lorentzskalar

Reelles Skalarfeld:

$$\text{Jetzt:} \quad \mathscr{L}(\phi, \partial_\mu\phi) = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - V(\phi) \tag{239}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi} = -\frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi}, \quad \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \partial^\mu\phi, \quad \frac{d}{dx_\mu}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \partial_\mu\partial^\mu\phi \tag{240}$$

$$\Rightarrow \quad E-L: \quad \partial_\mu\partial^\mu\phi(x) + \frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi} = 0 \quad \text{Lorentzkovariant!} \tag{241}$$

$V(\phi)$ Polynom in ϕ; höchste Potenz gerade (sonst unbeschränkt negatives H)
kein linearer Term (entspricht äußerer Quelle)

Einfachste Möglichkeit: $V(\phi) = \frac{m^2}{2}\phi^2, \quad \frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi} = m^2\phi$

$$\Rightarrow (\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi(x) = 0 \qquad \text{klassische Bewegungsgleichung!} \tag{242}$$

Def.: kanonisch konjugiertes Feld (kanonischer "Impuls")

$$\Pi(x) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\phi}(x)} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial^0 \phi \quad (\neq \text{Impulsvariable}) \tag{243}$$

$$\begin{aligned} \text{Hamiltondichte: } \mathscr{H}(\phi, \Pi) &= \Pi \dot{\phi} - \mathscr{L} && (244)\\ &= \frac{1}{2}\Big[\Pi^2(x) + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2\Big] && (245)\\ \text{Hamiltonfunktion: } H(t) &= \int d^3x\, \mathscr{H}(\phi, \Pi) && (246) \end{aligned}$$

Komplexes Skalarfeld

$$\mathscr{L} = (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi \tag{247}$$

unabhängige Variation von ϕ, ϕ^* liefert 2 Feldgleichungen

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi &= 0 && (248)\\ \partial_\mu \partial^\mu \phi^* + m^2 \phi^* &= 0 && (249) \end{aligned}$$

Diracfeld

$$\mathscr{L} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \tag{250}$$

$$\begin{aligned} \text{unabhängige Variation nach } \psi, \overline{\psi} \;\Rightarrow\; (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi &= 0 && (251)\\ i\partial_\mu \overline{\psi}\gamma^\mu + m\overline{\psi} &= 0 && (252) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_\alpha &= \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\psi}_\alpha} = i\psi_\alpha^\dagger\,, && (253)\\ \mathscr{H} &= \psi^\dagger(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + \beta m)\psi\,. && (254) \end{aligned}$$

Maxwellfeld

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu && (255)\\ \mathscr{L} &= -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} && (256) \end{aligned}$$

$$\text{Variation: } \quad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_\mu} = 0 \qquad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = F^{\mu\nu} \tag{257}$$

$$\Rightarrow \quad \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0 \tag{258}$$

"Automatisieren" der Eichfixierung:

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}\, F_{\mu\nu}\, F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}\,(\partial_\mu A^\mu)^2\,. \tag{259}$$

Separate Variation nach dem Vektorfeld, δA^μ, und dem Lagrangemultiplikator, $\delta(2\xi)^{-1}$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \quad \Rightarrow \quad \partial_\nu F^{\mu\nu} - \frac{1}{\xi}\,\partial^\mu \partial_\nu A^\nu = 0\ ,$$
$$\partial_\nu \partial^\nu A^\mu - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu(\partial_\nu A^\nu) = 0\ , \tag{260}$$
$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\frac{1}{2\xi})} \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu A^\mu = 0\ . \tag{261}$$

ξ beliebig, bezeichnet Eichklasse
$\xi = 1$: Feynmaneichung, $\xi = 0$: Landaueichung, $\xi \to \infty$: unitäre Eichung

Beachte: physikalische Größen sind von der Eichung unabhängig!

$$\begin{aligned} \mathscr{L} &= -\frac{1}{4} F^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) \\ &= -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x))\partial^\mu A^\nu(x) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2(x) - \mathbf{B}^2(x))\ . \end{aligned} \tag{262}$$

Die kanonisch konjugierten Felder sind dann

$$\Pi^0(x) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_0 A_0(x))} = 0\ , \quad \Pi^i(x) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_0 A_i(x))} = F^{i0}(x) = E^i(x)\ . \tag{263}$$

Damit folgen die Hamiltondichte und die Hamiltonfunktion zu

$$\begin{aligned} \mathscr{H} &= \Pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathscr{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) + \mathbf{E}\cdot\nabla\Phi\ , \\ H &= \int d^3x\ \mathscr{H} = \frac{1}{2}\int d^3x\ (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)\ , \end{aligned} \tag{264}$$

wobei wir über den Gradiententerm partiell integriert,

$$\int d^3x\ \mathbf{E}\cdot\nabla\Phi = -\int d^3x\ \nabla\cdot\mathbf{E}\,\Phi\ , \tag{265}$$

und dann $\nabla\cdot\mathbf{E} = 0$ ausgenutzt haben.

<u>Massives Vektorfeld</u>

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu \tag{266}$$

$$\Rightarrow \quad \partial_\nu F^{\mu\nu} + m^2 A^\mu = 0 \tag{267}$$
$$\text{Lorenzeichung:} \quad (\partial_\nu \partial^\nu + m^2)A^\mu = 0,\ \partial_\mu A^\mu = 0 \tag{268}$$

massive Spin 1-Teilchen z.B. ρ-Mesonen, W, Z-Bosonen

4.5 Symmetrien und Erhaltungssätze

Noethertheorem:
Invarianz der Wirkung unter einer Symmetrietransformation impliziert einen erhaltenen Strom → erhaltene Ladung

$$\begin{aligned} \text{e.g. Punktmechanik:} \quad \mathbf{x} &\to \mathbf{x}+\mathbf{a} \quad \text{Impulserhalung} && (269)\\ t &\to t+\tau \quad \text{Energieerhaltung} && (270)\\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Infinitesimale Transformation von Koordinaten *und* Feld (Bsp. relles Skalarfeld):

$$\begin{aligned} x'^{\mu} &= x^{\mu} + \delta x^{\mu} \\ \phi'(x') &= \phi(x) + \delta\phi(x) \\ \partial'_{\mu}\phi(x') &= \partial_{\mu}\phi(x) + \delta(\partial_{\mu}\phi(x)) \end{aligned} \tag{271}$$

$$\begin{aligned} \delta\phi &= \phi'(x') - \phi(x) \\ &= \phi'(x+\delta x) - \phi(x) \\ &= \phi'(x) - \phi(x) + \partial_{\mu}\phi'(x)\delta x^{\mu} && (272)\\ &= \delta_0\phi(x) + \Big(\partial_{\mu}\phi(x)\Big)\delta x^{\mu} + O(\delta^2) && (273) \end{aligned}$$

$$\partial'_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}\partial_{\nu} = (\delta^{\nu}_{\mu} - \partial_{\mu}\delta x^{\nu})\partial_{\nu} = \partial_{\mu} - (\partial_{\mu}\delta x^{\nu})\partial_{\nu} \tag{274}$$

$$\begin{aligned} \delta(\partial_{\mu}\phi) &= \partial'_{\mu}\phi'(x') - \partial_{\mu}\phi(x) \\ &= (\partial_{\mu} - (\partial_{\mu}\delta x^{\nu})\partial_{\nu})(\phi(x) + \delta\phi(x)) - \partial_{\mu}\phi(x) \\ &= \partial_{\mu}\delta\phi(x) - (\partial_{\mu}\delta x^{\nu})\partial_{\nu}\phi + \ldots \\ &= \partial_{\mu}\delta_0\phi + (\partial_{\mu}\partial_{\nu}\phi)\delta x^{\nu} + \ldots \end{aligned} \tag{275}$$

$$S' = \int d^4x'\ \mathscr{L}\Big(\phi'(x'), \partial'_{\mu}\phi'(x')\Big) = S + \delta S + O\left(\delta^2 S\right) \tag{276}$$

$$\begin{aligned} \text{Maß:} \quad d^4x' &= \left|\frac{\partial(x^{0'}, x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}\right| d^4x && (277)\\ &= (1 + \partial_{\mu}\delta x^{\mu} + \ldots)d^4x && (278) \end{aligned}$$

$$\delta S = \int d^4x\,(\mathscr{L}\partial_{\mu}\delta x^{\mu} + \delta\mathscr{L}) \tag{279}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(\phi'(x'),\partial'_\mu\phi'(x')) &= \mathscr{L}(\phi+\delta\phi,\partial_\mu\phi+\delta(\partial_\mu\phi)) \\ &= \mathscr{L}(\phi,\partial_\mu\phi)+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\delta\phi+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi)+\ldots \qquad (280)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{L} &= \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}\delta_0\phi+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu\delta_0\phi+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}(\partial_\nu\phi)\delta x^\nu+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(\partial_\nu\partial_\mu\phi)\delta x^\nu \\ &= \left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}-\left(\frac{d}{dx^\mu}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\right]\delta_0\phi+\frac{d}{dx^\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta_0\phi\right)+\frac{d\mathscr{L}}{dx^\mu}\delta x^\mu\,. \qquad (281)\end{aligned}$$

Mit klass. Bewegungsgleichungen wird dies

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x\left[\mathscr{L}\partial_\mu\delta x^\mu+\delta x^\mu\frac{d}{dx^\mu}\mathscr{L}+\frac{d}{dx^\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta_0\phi\right)\right] \\ &= \int d^4x\,\frac{d}{dx^\mu}\left[\mathscr{L}\delta x^\mu+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta_0\phi\right] \\ &= \int d^4x\,\frac{d}{dx^\mu}\left[\mathscr{L}\delta x^\mu+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(\delta\phi-\partial_\nu\phi\delta x^\nu)\right] \\ &= \int d^4x\,\frac{d}{dx^\mu}\left[\left(\mathscr{L}g^\mu_\nu-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\nu\phi\right)\delta x^\nu+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right] \qquad (282)\end{aligned}$$

Parametrisiere Transformation durch koordinatenunabhängige Parameter:

$$\delta\phi = \frac{\delta\phi}{\delta\omega^a}\delta\omega^a,\quad a=1,2,\ldots \qquad (283)$$

$$\delta x^\nu = \frac{\delta x^\nu}{\delta\omega^a}\delta\omega^a \qquad (284)$$

$$\delta S = \int d^4x\,\frac{d}{dx^\mu}\left[\left(\mathscr{L}g^\mu_\nu-\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\nu\phi\right)\frac{\delta x^\nu}{\delta\omega^a}+\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\frac{\delta\phi}{\delta\omega^a}\right]\delta\omega^a \qquad (285)$$

$$J^\mu_a(x) \equiv -\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\,\frac{\delta\phi}{\delta\omega^a}+\Theta^\mu{}_\nu\frac{\delta x^\nu}{\delta\omega^a} \qquad (286)$$

$$\Theta^{\mu\nu}(x) \equiv \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial^\nu\phi-g^{\mu\nu}\mathscr{L} \qquad (287)$$

Falls die Transformation S invariant lässt:

$$\delta S \;= 0 \;\Longrightarrow \partial_\mu J^\mu_a = 0 \quad \text{erhaltener Viererstrom} \tag{288}$$

$$\text{erhaltene Ladungen} \quad Q_a = \int d^3x\, J^0_a \tag{289}$$

$$\tag{290}$$

$$\boxed{\text{Erhaltungssätze} \Longleftrightarrow \text{Symmetrien der Wirkung}}$$

Beispiele: Klein-Gordon-Feld $\quad \mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi)(\partial_\mu\phi) - \frac{1}{2}m^2\phi^2$

a) Translation der Raumzeit $x'^\mu = x^\mu + b^\mu$, Poincarétrafo
Skalarfeld ist invariant, $\phi'(x') = \phi(x)$

$$\Rightarrow \delta x^\mu = b^\mu = \frac{\delta x^\mu}{\delta\omega^a}\,\delta\omega^a \;\Rightarrow\; \delta\omega^a \to b^\nu, \quad \frac{\delta x^\mu}{\delta\omega^a} \to \delta^\mu_\nu, \qquad J^\mu_\nu = \Theta^\mu_\nu \tag{291}$$

$$\Longrightarrow \quad \partial_\mu \Theta^\mu_\nu = 0 \tag{292}$$

$$\boxed{\partial_0\Theta^{0\nu} + \partial_i\Theta^{i\nu} = 0} \quad \text{4 Erhaltungsgleichungen!} \tag{293}$$

Komponenten:

$$\Theta^{00} \;=\; \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_0\phi)}\,\partial^0\phi - g^{00}\,\mathscr{L} = \Pi\,\dot{\phi} - \mathscr{L} = \mathscr{H} \tag{294}$$

$$\Theta^{0j} \;=\; \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_0\phi)}\,\partial^j\phi - g^{0j}\,\mathscr{L} = \Pi\,\partial^j\phi \tag{295}$$

Erhaltene Ladungen: $\int d^3x \;\; \partial_\mu\Theta^\mu_\nu = 0$

$$\partial_0 \int_V d^3x\; \Theta^{0\nu} \;=\; -\int_V d^3x\; \partial_j\; \Theta^{j\nu} \tag{296}$$

$$=\; -\int_{S=\partial V} dS^j \cdot \Theta^{j\nu}$$

$\uparrow$ Randfläche des Volumens V

$$=\; 0 \quad \text{falls kein Fluss durch die Oberfläche existiert}$$

$$\underline{\text{Def.:}} \quad P^\mu \equiv \int d^3x\; \Theta^{0\mu} \quad \text{Energie-Impuls-Vektor, erhalten} \tag{297}$$

b) "Innere" Symmetrien: $x'^{\mu} = x^{\mu}$
(koordinatenunabh.) $\phi'(x') = \phi(x) + \delta\phi(x)$

$$\Rightarrow \; J^{\mu} = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \frac{\delta\phi}{\delta\omega^a}$$

<u>Beispiel:</u> $\mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial^{\mu}\phi)(\partial_{\mu}\phi)$ masseloses K-G-Feld

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x) + \alpha, \; \alpha \text{ const.} \tag{298}$$

lässt $\mathscr{L}$ invariant $\delta\phi = \alpha$ $\frac{\delta\phi}{\delta\omega^a} \to 1,$

$J^{\mu} = -\partial^{\mu}\phi$ ist erhaltener Strom

Weitere innere Symmetrien: Eichsymmetrien, Isospin,...

Quantenmechanisch: Zusätzliche Überlegungen notwendig
$\Rightarrow$ Ward-Identitäten für Greenfunktionen

5 Quantentheorie freier Felder

5.1 Kanonische Quantisierung des reellen Skalarfeldes

$$\text{Lagrangedichte} \qquad \mathscr{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi(x))(\partial^\mu \phi(x)) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2(x) \tag{299}$$

$$\text{E-L:} \qquad (\Box + m^2)\phi(x) = 0 \tag{300}$$

$$\text{konjugierter Impuls:} \qquad \Pi(x) = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_0 \phi(x))} = \dot{\phi}(x), \tag{301}$$

$$\text{Hamiltonfunktion:} \qquad \mathscr{H} = \frac{1}{2}\left(\Pi^2(x) + (\nabla\phi(x))^2 + m^2\phi^2(x)\right) \tag{302}$$

Quantisierung analog zu nichtrelativistischen Quantenmechanik:

a) konjugierte Variablen $\rightarrow$ Operatoren
hier: Felder $\rightarrow$ Feldoperatoren

$$\phi(x) \quad \rightarrow \quad \hat{\phi}(x) \tag{303}$$
$$\Pi(x) \quad \rightarrow \quad \hat{\Pi}(x) \tag{304}$$

b) Kommutatoren (gleichzeitige)

$$\left[\hat{\phi}(\mathbf{x},t), \hat{\phi}(\mathbf{y},t)\right] = 0 \tag{305}$$
$$\left[\hat{\Pi}(\mathbf{x},t), \hat{\Pi}(\mathbf{y},t)\right] = 0 \tag{306}$$
$$\left[\hat{\phi}(\mathbf{x},t), \hat{\Pi}(\mathbf{y},t)\right] = i\,\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{307}$$
$$\tag{308}$$

N.B.: $\hat{\phi}, \hat{\Pi}$ sind Heisenbergoperatoren!

$$\begin{aligned}
[\hat{P}^\mu(t), \hat{\phi}(x)] &= \int d^3y\, [\hat{\Pi}(t,\mathbf{y})\partial^\mu\hat{\phi}(t,\mathbf{y}), \hat{\phi}(t,\mathbf{x})] \\
&= \int d^3y\, [\hat{\Pi}(t,\mathbf{y}), \hat{\phi}(t,\mathbf{x})]\partial^\mu\hat{\phi}(t,\mathbf{y}) \\
&= -\int d^3y\, i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\partial^\mu\hat{\phi}(t,\mathbf{y}) = -i\partial^\mu\hat{\phi}(x)
\end{aligned} \tag{309}$$

$\Rightarrow$ Heisenberggleichung:

$$\partial^\mu\hat{\phi}(x) = i\left[\hat{P}^\mu, \hat{\phi}(x)\right] \tag{310}$$

Mit $\partial_0 \hat{H} = 0$:

$$\partial_t\hat{\phi} = i[\hat{H}, \hat{\phi}], \quad \partial_t\hat{\Pi} = i[\hat{H}, \hat{\Pi}] \tag{311}$$

Analog Heisenberggleichungen für konjugierte Variable in nichtrel. QM!
$\Rightarrow$ äquivalent zur K-G-Gleichung (jetzt Operatorgleichung)

5.2 Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})} \Big[a(\mathbf{k})\, e^{-ikx} + a^*(\mathbf{k}) e^{ikx} \Big]$$

$$\phi \to \hat{\phi} \qquad\qquad a \to \hat{a}, \qquad a^* \to \hat{a}^\dagger$$

$$\Rightarrow \hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})} \Big[\hat{a}(\mathbf{k})\, e^{-ikx} + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx} \Big] \tag{312}$$

$$\hat{\Pi}(x) = \dot{\hat{\phi}}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})}\, iE(\mathbf{k}) \Big[- \hat{a}(\mathbf{k}) e^{-ikx} + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx} \Big] \tag{313}$$

Auflösen nach $\hat{a}$:

$$\begin{aligned}
\int d^3x\, \hat{\phi}(x) e^{ipx} &= \int d^3x \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})} \Big[\hat{a}(\mathbf{k}) e^{-i(k-p)x} + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) e^{i(k+p)x} \Big] \\
&= \int \frac{d^3k}{2E(\mathbf{k})} \Big[\hat{a}(\mathbf{k}) e^{-i(k^0-p^0)x} \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{p}) + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) e^{i(k^0+p^0)x} \delta^3(\mathbf{k}+\mathbf{p}) \Big] \\
&= \frac{1}{2E(\mathbf{p})} \Big[\hat{a}(\mathbf{p}) + \hat{a}^\dagger(-\mathbf{p}) e^{2ip^0x^0} \Big] \quad (1) \\
\int d^3x\, \hat{\Pi}(x) e^{ipx} &= -\frac{i}{2} \Big[\hat{a}(\mathbf{p}) - \hat{a}^\dagger(-\mathbf{p}) e^{2ip^0x^0} \Big] \quad (2)
\end{aligned}$$

$$E(\mathbf{p})(1) - \frac{(2)}{i} :\ \hat{a}(\mathbf{p}) = \int d^3x \Big[E(\mathbf{p})\hat{\phi}(x) + i\hat{\Pi}(x) \Big] e^{ipx} \tag{314}$$

$$\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) = \int d^3x \Big[E(\mathbf{p})\hat{\phi}(x) - i\hat{\Pi}(x) \Big] e^{-ipx} \tag{315}$$

N.B.: $\partial_0\, \hat{a}(\mathbf{k}) = \partial_0\, \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}) = 0$

Damit für $t = t'$: $\Big[\hat{a}(\mathbf{k}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}') \Big]$

$$\begin{aligned}
&= \int d^3x \int d^3x'\, e^{i(kx-k'x')} \Big[E(\mathbf{k})\hat{\phi}(x) + i\hat{\Pi}(x), E(\mathbf{k}')\hat{\phi}(x') - i\hat{\Pi}(x') \Big] \\
&= \int d^3x \int d^3x'\, e^{i(kx-k'x')} \Big\{ - iE(\mathbf{k}) \Big[\hat{\phi}(x), \hat{\Pi}(x') \Big] + iE(\mathbf{k}') \Big[\hat{\Pi}(x), \hat{\phi}(x') \Big] \Big\} \\
&= \int d^3x \int d^3x' \Big\{ - iE(\mathbf{k})\, i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}') + iE(\mathbf{k}')(-i)\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \Big\} e^{i(kx-k'x')} \\
&= \int d^3x\, \big(E(\mathbf{k}) + E(\mathbf{k}') \big)\, e^{i(k-k')x} \\
&= \big(E(\mathbf{k}) + E(\mathbf{k}') \big)\, e^{i(E(\mathbf{k})-E(\mathbf{k}'))t} \underbrace{\int d^3x\, e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{x}}}_{= (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} \\
&= 2E(k)(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')
\end{aligned} \tag{316}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \left[\hat{a}(\mathbf{k}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}')\right] &= 2E(\mathbf{k})(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}') &(317)\\ \left[\hat{a}(\mathbf{k}), \hat{a}(\mathbf{k}')\right] &= \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}')\right] = 0 &(318)\end{aligned}}$$

Harmonischer Oszillator für jedes $\mathbf{k}$!

Analog findet man:

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})}\, E(\mathbf{p})\left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}) + \hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\right] &(319)\\ \hat{\mathbf{P}} &= \frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})}\, \mathbf{p}\left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}) + \hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\right] &(320)\end{aligned}}$$

$\hat{H}, \hat{P}$: unendliche, kontinuierliche Summe der Energien/Impulse von 1-d harmonischen Oszillatoren!

Zur Interpretation:

$$\left[\hat{a}(\mathbf{p}), \hat{H}\right] = E(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}), \quad \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}), \hat{H}\right] = -E(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\,. \tag{321}$$

Sei $|\psi\rangle$ Eigenzustand von $\hat{H}$: $\quad \hat{H}|\psi\rangle = E_\psi|\psi\rangle$

Dann gilt:

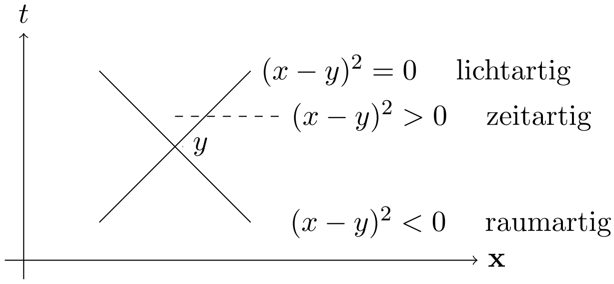
$$\begin{aligned} \hat{H}\hat{a}(\mathbf{p})|\psi\rangle &= (\hat{a}(\mathbf{p})\hat{H} - [\hat{a}(\mathbf{p}), \hat{H}])|\psi\rangle = (E_\psi - E(\mathbf{p}))\hat{a}(\mathbf{p})|\psi\rangle\,, &(322)\\ \hat{H}\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})|\psi\rangle &= (\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{H} - [\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}), \hat{H}])|\psi\rangle = (E_\psi + E(\mathbf{p}))\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})|\psi\rangle &(323)\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad \hat{a}(\mathbf{p})|\psi\rangle, \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})|\psi\rangle$ Eigenzustände von $\hat{H}$ mit um $E(\mathbf{p})$ kleinerer bzw. größerer Energie

$\Longrightarrow \quad \hat{a}(\mathbf{p}), \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})$ sind „Vernichter“ bzw. „Erzeuger“ eines Energiequants $E(\mathbf{p})$

5.3 Kausalität und Kommutatorregeln

Lichtkegel um Ereignis bei y



Nur Ereignisse mit zeitartigem Abstand sind kausal verknüpft.
Ereignisse mit raumartigem Abstand können sich nicht beeinflussen.
$\Rightarrow$ für $(x-y)^2 < 0$ muss alles kommutieren!

$$\Big[\phi(x), \phi(y)\Big] = \Big[\Pi(x), \Pi(y)\Big] = \Big[\phi(x), \Pi(y)\Big] = 0 \qquad (324)$$

für $(x-y)^2 < 0$ <u>Mikrokausalität</u>

$$(x-y)^2 = \quad (x_0 - y_0)^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 \quad < 0 \qquad (325)$$

$$\Rightarrow \quad |x_0 - y_0| < |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \qquad (326)$$

<u>Gleichzeitigkeit: $x_0 = y_0$,</u> $\quad 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$

raumartig für $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$

Für $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ können sich Ereignisse beeinflussen $\Rightarrow$ gleichzeitige Kommutatorregeln

<u>$(x-y)^2 > 0$, nichtgleichzeitig:</u> (Übung)

$$\Big[\hat{\phi}(x), \hat{\Pi}(y)\Big] = \frac{i}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \Big\{ e^{-ip(x-y)} + e^{ip(x-y)} \Big\} \qquad (327)$$

5.4 Vakuumenergie und Normalordnung

Ziel: konstruiere Basis von Zustandsvektoren, auf die die Feldoperatoren wirken
$\Rightarrow$ Hilbertraum

Postulat: Es gibt einen Vakuumzustand $|0\rangle$ mit

a) $\langle 0|0\rangle = 1$

b) $a(\mathbf{p})|0\rangle = 0$ für alle $\mathbf{p}$

Vakummenergie (Grundzustand)

$$
\begin{aligned}
E_0 = \langle 0|\hat{H}|0\rangle &= \frac{1}{4}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\Big\{\underbrace{\langle 0|\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p})|0\rangle}_{=0} + \langle 0|\hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle\Big\} \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,\langle 0|\Big[\hat{a}(\mathbf{p}),\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\Big] + \underbrace{\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p})|0\rangle}_{=0} \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\langle 0|0\rangle(2\pi)^3\delta^3(0)2E(\mathbf{p}) \\
&= \frac{1}{2}\delta^3(0)\int d^3p\,\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2} \to \infty
\end{aligned}
\tag{328}
$$

$\Rightarrow$ Das Vakuum (der Zustand niedrigster Energie) hat unendliche Energie

Grund: unendliche Anzahl von Nullpunktsenergien der einzelnen Oszillatoren

$$\sim \Big(\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}) + (2\pi)^3 2E(\mathbf{p})\delta^3(0)\Big)$$

$\Rightarrow$ "Wegargumentieren":

1. Absolute Energieskala nicht beobachtbar, lediglich E-Differenzen $(E_n - E_0)$!
2. Renormierung: Festlegen der Vakuumenergie, z.B. auf Null

$$E_0^R \equiv \langle 0|\hat{H}^R|0\rangle \stackrel{!}{=} 0 \tag{329}$$
$$\hat{H}^R \equiv \hat{H} - E_0 \tag{330}$$

Wie subtrahiert man Unendlich? Vor der Integration!

$$\begin{aligned}
\hat{H}^R &= \frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})}\; E(\mathbf{p})\Big(\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}) + \hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}) \\
&\qquad\qquad -\langle 0|\, \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}) + \hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\, |0\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})}\; E(\mathbf{p})\Big(2\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}) + \Big[\hat{a}(\mathbf{p}),\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\Big] \\
&\qquad\qquad -\langle 0|\Big[\hat{a}(\mathbf{p}),\hat{a}\dagger(\mathbf{p})\Big]|0\rangle\Big) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})}\; E(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}) \\
&\quad + \frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})} E(\mathbf{p})\Big(\Big[\hat{a}(\mathbf{p}),\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\Big] - \langle 0|\Big[\hat{a}(\mathbf{p}),\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\Big]|0\rangle\Big) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})}\; E(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}) + \hat{H}^{\mathrm{vac}}
\end{aligned} \tag{331}$$

mit

$$\hat{H}^{\mathrm{vac}} \equiv \frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})} E(\mathbf{p})\Big(\Big[\hat{a}(\mathbf{p}),\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\Big] - \langle 0|\Big[\hat{a}(\mathbf{p}),\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\Big]|0\rangle\Big) \tag{332}$$

$$\Longrightarrow \qquad \langle 0|\hat{H}^{\mathrm{vac}}|0\rangle = 0, \qquad \langle 0|\hat{H}^R|0\rangle = 0 \tag{333}$$

"Automatisieren" der Subtraktion durch "Normalordnung":
Alle Vernichter rechts von den Erzeugern

$$\begin{aligned}
:\hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}): &= \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}) \\
:\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}): &= \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}) \\
\frac{1}{2}:\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}) + \hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}): &= \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p})
\end{aligned}$$

Anwendung auf Hamiltonian:

$$\begin{aligned}
:\hat{H}: &= \frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(p)}\; E(\mathbf{p}) :\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}) + \hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}): \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})}\; E(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p})
\end{aligned} \tag{334}$$

$$\Rightarrow \hat{H}^R = :\hat{H}: + \hat{H}^{\mathrm{vac}} \tag{335}$$

Damit:

$$\langle 0|\hat{H}^R|0\rangle = \langle 0|:\hat{H}:|0\rangle \tag{336}$$

5.5 Fockraum und Teilchenzahldarstellung

Konstruktion des Hilbertraums wie beim harmonischen Oszillator:
Starte mit $|0\rangle$, benutze Leiteroperatoren zur Erzeugung der weiteren Zustände

$$\text{Def.:}\quad |\mathbf{p}\rangle \equiv \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle \tag{337}$$

Norm:

$$\begin{aligned}
\langle\mathbf{p}|\mathbf{p}'\rangle &= \langle 0|\,\hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}')|0\rangle \\
&= \langle 0|\left[\hat{a}(\mathbf{p}),\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}')\right]|0\rangle + \langle 0|\,\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}')\,\underbrace{\hat{a}(\mathbf{p})|0\rangle}_{=0} \\
&= (2\pi)^3 2E(\mathbf{p})\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')
\end{aligned} \tag{338}$$

$$\begin{aligned}
:\hat{H}:|\mathbf{p}\rangle &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})} E(\mathbf{k})\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\hat{a}(\mathbf{k})\;\; \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})} E(\mathbf{k})\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\left[\hat{a}(\mathbf{k}),\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\right]|0\rangle \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})} E(\mathbf{k})(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{k})\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle \\
&= E(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle \\
&= E(\mathbf{p})|\mathbf{p}\rangle
\end{aligned} \tag{339}$$

$$:\hat{\mathbf{P}}:|\mathbf{p}\rangle = \mathbf{p}|\mathbf{p}\rangle \tag{340}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{|\mathbf{p}\rangle \text{ ist q.m. Einteilchenzustand mit Impuls } \mathbf{p} \text{ und Energie } E=\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}\,!}$

$\Rightarrow$ $a^\dagger(\mathbf{p})$ erzeugt ein Teilchen aus Vakuum, $a(\mathbf{p})$ vernichtet ein Teilchen:

$$\hat{a}(\mathbf{p})|\mathbf{p}\rangle = \hat{a}(\mathbf{p})\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle = \left[\hat{a}(\mathbf{p}),\hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\right]|0\rangle = (2\pi)^3 2E(\mathbf{p})\delta^3(0)|0\rangle \tag{341}$$

Bedeutung Feldoperator:

$$\hat{\phi}(x)|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})}\, e^{ipx}\; \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})}\, e^{ipx}\; |\mathbf{p}\rangle \tag{342}$$

Erzeugt Überlagerung von Einteilchenzuständen=ebenen Wellen mit allen möglichen Impulsen

Skalarprodukt mit Einteilchenzustand:

$$
\begin{aligned}
\langle 0|\hat{\phi}(x)|\mathbf{k}\rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})}\, e^{-ipx}\langle \mathbf{p}|\mathbf{k}\rangle \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})}\, e^{-ipx}(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{p}) \\
&= e^{-ikx} \qquad (343)
\end{aligned}
$$

Dies ist relativistisches Analogon zur Schrödingerwellenfunktion

$$\langle \mathbf{x}|\mathbf{k}\rangle = \psi_k(\mathbf{x}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}\ , \qquad (344)$$

Zweiteilchenzustand:

$$|\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2!}}\, \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}_2)\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}_1)|0\rangle \qquad (345)$$

mit den entsprechenden Eigenwerten des Viererimpulsoperators

$$: \hat{\mathbf{P}}^\mu : |\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\rangle = (p_1^\mu + p_2^\mu)\ |\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\rangle \qquad (346)$$

Symmetrie unter Vertauschung:

$$|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2!}}\, \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}_1)\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}_2)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2!}}\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}_2)\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}_1)|0\rangle = |\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1\rangle \qquad (347)$$

$\Rightarrow$ Bosonen! (Spin 0 ✓)

Teilchenzahloperator:

$$\hat{\mathcal{N}}(\mathbf{p}) \equiv \hat{a}^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}(\mathbf{p}), \qquad \hat{N} \equiv \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})}\, \hat{\mathcal{N}}(\mathbf{p})\ . \qquad (348)$$

Die Fockzustände sind Eigenvektoren mit ganzzahligen Eigenwerten

$$
\begin{aligned}
\hat{N}|0\rangle &= 0, && (349)\\
\hat{N}|\mathbf{p}\rangle &= |\mathbf{p}\rangle, && (350)\\
\ldots &= \ldots, && (351)\\
\hat{N}|\mathbf{p}_1 \ldots \mathbf{p}_N\rangle &= N|\mathbf{p}_1 \ldots \mathbf{p}_N\rangle && (352)
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad : \hat{H} : = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})}\, E(\mathbf{p})\hat{\mathcal{N}}(\mathbf{p}) \qquad (353)$$

Für beliebigen N-Teilchenzustand:

$$: \hat{H} : |\mathbf{p}_1 \ldots \mathbf{p}_N\rangle = \Big(E(\mathbf{p}_1) + \ \ldots\ + E(\mathbf{p}_N)\Big)|\mathbf{p}_1 \ldots \mathbf{p}_N\rangle \qquad (354)$$

Quantenfeldtheorie für freie ungeladene Spin 0 Teilchen gelöst!

Bemerkung: Ebene Wellen nicht normierbar, vgl. Quantenmechanik

Wellenpakete:

$$|\psi(\mathbf{k})\rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})} \psi(\mathbf{p}, \mathbf{k}) |\mathbf{p}\rangle \tag{355}$$

mit $\psi(\mathbf{p}, \mathbf{k})$ eine um $\mathbf{k}$ zentrierte Wellenfunktion im Impulsraum

Norm:

$$\langle\psi(\mathbf{k})|\psi(\mathbf{k})\rangle = 1 \qquad \text{für} \qquad \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})} |\psi(\mathbf{p}, \mathbf{k})|^2 = 1 \tag{356}$$

5.6 Quantisierung des Diracfeldes

$$\hat{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})} \sum_{s=1}^{2} \left\{ \hat{a}_s(\mathbf{p}) u_s(\mathbf{p})\, e^{-ipx} + \hat{b}_s^\dagger(\mathbf{p}) \upsilon_s(\mathbf{p})\, e^{ipx} \right\} \tag{357}$$

Für Interpretation der Fourierkoeffizienten als Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, versuche:

$$\begin{aligned}
\left[\hat{a}_r(\mathbf{p}), \hat{a}_s^\dagger(\mathbf{p}')\right] &= \delta_{rs}(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\ , \\
\left[\hat{b}_r(\mathbf{p}), \hat{b}_s^\dagger(\mathbf{p}')\right] &= \delta_{rs}(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\ , \\
\left[\hat{a}_r^\dagger(\mathbf{p}), \hat{a}_s^\dagger(\mathbf{p}')\right] &= \left[\hat{b}_r^\dagger(\mathbf{p}), \hat{b}_s^\dagger(\mathbf{p}')\right] = 0\ , \\
\left[\hat{a}_r(\mathbf{p}), \hat{a}_s(\mathbf{p}')\right] &= \left[\hat{b}_r(\mathbf{p}), \hat{b}_s(\mathbf{p}')\right] = 0\ .
\end{aligned} \tag{358}$$

Postulat Vakuumzustand:

$$\hat{a}_s(\mathbf{p})|0\rangle = 0 \tag{359}$$

$$\hat{b}_s(\mathbf{p})|0\rangle = 0 \tag{360}$$

Analoge Rechnung wie beim Skalarfeld führt auf:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \psi^\dagger(x)(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + \beta m)\psi(x) \\
\hat{H} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})} E(\mathbf{p}) \sum_s \left[\hat{a}_s^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}_s(\mathbf{p}) - \hat{b}_s(\mathbf{p})\hat{b}_s^\dagger(\mathbf{p})\right]
\end{aligned} \tag{361}$$

Beachte Vorzeichen im zweiten Term von $\hat{H}$:
Inakzeptabel, ergibt unbeschränkt negative Energien!

Stattdessen: Antikommutatoren

$$\begin{aligned}
\left\{\hat{a}_r(\mathbf{p}), \hat{a}_s^\dagger(\mathbf{p}')\right\} &= \delta_{rs}(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \\
\left\{b_r(\mathbf{p}), \hat{b}_s^\dagger(\mathbf{p}')\right\} &= \delta_{rs}(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}') \\
\left\{\hat{a}_r^\dagger(\mathbf{p}), \hat{a}_s^\dagger(\mathbf{p}')\right\} &= \left\{\hat{b}_r^\dagger(\mathbf{p}), \hat{b}_s^\dagger(\mathbf{p}')\right\} = 0 \\
\left\{\hat{a}_r(\mathbf{p}), \hat{a}_s(\mathbf{p}')\right\} &= \left\{\hat{b}_r(\mathbf{p}), \hat{b}_s(\mathbf{p}')\right\} = 0
\end{aligned} \tag{362}$$

Damit:

$$\hat{H} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})} E(\mathbf{p}) \sum_s \left[\hat{a}_s^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}_s(\mathbf{p}) + \hat{b}_s^\dagger(\mathbf{p})\hat{b}_s(\mathbf{p}) - \{\hat{b}_s(\mathbf{p})\hat{b}_s^\dagger(\mathbf{p})\}\right]$$

Wieder Def. $\hat{H}^R \equiv \hat{H} - \langle 0|\hat{H}|0\rangle$,
subtrahiert (negativ) unendliche Vakuumenergie

Normalgeordnet ist $:\hat{H}:$ positiv definit mit verschwindender Vakuumenergie

Die Wahl von Antikommutatoren ist konsistent mit Mikrokausalität:

$$\left\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\right\} = (\gamma^0)_{\alpha\beta}\, \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \quad \text{für} \quad x^0 = y^0 \tag{363}$$

Somit analoge Konstruktion von Einteilchenzuständen für Fermion und Antifermion:

$$|f(\mathbf{p},s)\rangle \equiv \hat{a}_s^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle \tag{364}$$
$$|\bar{f}(\mathbf{p},s)\rangle \equiv \hat{b}_s^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle \tag{365}$$

Diese sind Eigenzustände des Energie-Impuls-Operators

$$:\hat{P}^\mu:|f(\mathbf{p},s)\rangle = p^\mu|f(\mathbf{p},s)\rangle \tag{366}$$
$$:\hat{P}^\mu:|\bar{f}(\mathbf{p},s)\rangle = p^\mu|\bar{f}(\mathbf{p},s)\rangle \tag{367}$$

Zweiteilchenzustand:

$$\hat{a}_r^\dagger(\mathbf{p}_1)\hat{a}_s^\dagger(\mathbf{p}_2)|0\rangle = -\hat{a}_s^\dagger(\mathbf{p}_2)\hat{a}_r^\dagger(\mathbf{p}_1)|0\rangle \tag{368}$$
$$\Leftrightarrow\ |f(\mathbf{p}_1,r)f(\mathbf{p}_2,s)\rangle = -|f(\mathbf{p}_2,s),f(\mathbf{p}_1,r)\rangle \tag{369}$$

Antisymmetrisch unter Vertauschung der beiden Teilchen $\quad\Rightarrow\quad$ Fermionen! ✓

Wenn alle Quantenzahlen gleich sind:

$$|2f(\mathbf{p},s)\rangle \sim \hat{a}_s^\dagger(\mathbf{p})\hat{a}_s^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle = 0\,. \tag{370}$$

$\Rightarrow$ Die Verwendung von Antikommutatoren führt auf das Pauliprinizp!

In der QFT lässt sich basierend auf Lokalität, nach unten beschränkter Energie und Lorentzkovarianz streng ein Spin-Statistik-Theorem beweisen, wonach ganzzahlige bzw. halbzahlige Spins der Bose-Einstein- bzw. Fermistatistik genügen

5.7 Quantisierung des Vektorfeldes

Klassisches Feld mit Hamilton-Lagrange:

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x) \\ &= -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x))\partial^\mu A^\nu(x) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2(x) - \mathbf{B}^2(x))\end{aligned} \tag{371}$$

Kanonisch konjugierte Felder:

$$\Pi^0(x) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_0 A_0(x))} = 0\ , \quad \Pi^i(x) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial(\partial_0 A_i(x))} = F^{i0}(x) = E^i(x) \tag{372}$$

Hamiltondichte und Hamiltonfunktion:

$$\begin{aligned}\mathscr{H} &= \Pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathscr{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) + \mathbf{E}\cdot\nabla\Phi\ , \\ H &= \int d^3x\, \mathscr{H} = \frac{1}{2}\int d^3x\, (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)\ ,\end{aligned} \tag{373}$$

wobei wir über den Gradiententerm partiell integriert,

$$\int d^3x\, \mathbf{E}\cdot\nabla\Phi = -\int d^3x\, \nabla\cdot\mathbf{E}\,\Phi\ , \tag{374}$$

und dann $\nabla\cdot\mathbf{E} = 0$ ausgenutzt haben

Quantisierung: mit Kommutatoren (Spin 1, bosonisch)

$$[\hat{A}^\mu(\mathbf{x},t), \hat{A}^\nu(\mathbf{y},t)] = [\hat{\Pi}^i(\mathbf{x},t), \hat{\Pi}^j(\mathbf{y},t)] = [\hat{A}^0(\mathbf{x},t)\hat{\Pi}^i(\mathbf{y},t)] = 0 \tag{375}$$

Beachte: $\hat{A}^0$ kommutiert mit allen anderen Feldern, nicht von c-Zahl zu unterscheiden!

Für nichttrivialen Kommutator, versuche:

$$[\hat{A}^i(\mathbf{x},t), \hat{\Pi}^j(\mathbf{y},t)] = [\hat{A}^i(\mathbf{x},t), \hat{E}^j(\mathbf{y},t)] = i\delta^{ij}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})\ . \tag{376}$$

Nicht konsistent mit der Maxwellgleichung $\nabla\cdot\hat{\mathbf{E}} = 0$, denn:

$$\partial_j^y[\hat{A}^i(\mathbf{x},t), \hat{E}^j(\mathbf{y},t)] = 0\ , \tag{377}$$

$$\partial_j^y\delta^{ij}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \partial_j^y\delta^{ij}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} = -i\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,k^i\,e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \neq 0 \tag{378}$$

Reparieren durch:

$$\delta_\perp^{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \equiv \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \left(\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{\mathbf{k}^2}\right) , \tag{379}$$

mit

$$\partial_j^y \delta_\perp^{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = 0 \tag{380}$$

Damit gleichzeitiger Kommutator:

$$[\hat{A}^i(\mathbf{x},t), \hat{\Pi}^j(\mathbf{y},t)] = i\delta_\perp^{ij}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{381}$$

Beachte: Nun kommutiert auch $\nabla \cdot \hat{\mathbf{A}}$ mit allen Feldern, nicht von c-Zahl zu unterscheiden
$\Rightarrow$ Zwei Freiheitsgrade des Vektorfeldes ohne Bedeutung als physikalische Observablen, Eichfreiheit!

Setze die trivialen Freiheitsgrade zu Null, Strahlungseichung:

$$\begin{aligned} A^0 &= 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \\ \text{bzw.} \quad A^0 &= 0, \quad \partial_\mu A^\mu = 0 \end{aligned} \tag{382}$$

In dieser Eichung gehorchen Feldoperatoren der Gleichung:

$$\Box \hat{A}^\mu = 0 \,. \tag{383}$$

Allgemeine Lösung

$$\hat{A}^\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})} \sum_{\lambda=1}^{2} \epsilon_\lambda^\mu(\mathbf{k}) \left[\hat{a}_\lambda(\mathbf{k}) e^{-ikx} + \hat{a}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx}\right] \tag{384}$$

mit

$$k^2 = k^\mu k_\mu = 0 \,, \tag{385}$$

$$k^0 = E(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}| \,, \tag{386}$$

$$\mathbf{k} \cdot \epsilon_\lambda^\mu(\mathbf{k}) = 0 \,. \tag{387}$$

Fourierkoeffizienten:

$$\boxed{\begin{aligned} \left[\hat{a}_\lambda(\mathbf{k}), \hat{a}_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}')\right] &= \delta_{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 2E(\mathbf{k}) \delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \,, \\ \left[\hat{a}_\lambda(\mathbf{k}), \hat{a}_{\lambda'}(\mathbf{k}')\right] &= \left[\hat{a}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}), \hat{a}_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}')\right] = 0 \,. \qquad (388) \end{aligned}}$$

Analog zu Skalarfeld $\Rightarrow$ analoge Konstruktion Fockraum

$$|\mathbf{k},\lambda\rangle \equiv \hat{a}_\lambda^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle \tag{389}$$

ist Einteilchenzustand mit

$$:\hat{P}^\mu: |\mathbf{k},\lambda\rangle = k^\mu |\mathbf{k},\lambda\rangle \tag{390}$$

Das zugehörige Teilchen ist das Photon, Spin1, $E(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}| = \omega$ mit Masse 0

6 Wechselwirkende skalare Felder

6.1 Notwendigkeit neuer formaler Entwicklungen

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L} &= \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_{\text{int}} && (391)\\
\mathscr{L}_0 &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 && (392)\\
\mathscr{H}_{\text{int}} &= -\mathscr{L}_{\text{int}} && (393)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ keine freie Wellengleichung mehr, Lösung unbekannt, keine lin. Superposition!

$$(\Box + m_0^2)\phi - \frac{\partial \mathscr{L}_{\text{int}}}{\partial \phi} = 0 \qquad (394)$$

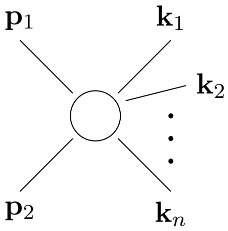
Fouriertrafo mit konstanten Koeffizienten $a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p})$ nur zu fester Zeit möglich;
$\Rightarrow$ geänderte Interpretation, i.A. Mehrteilchenzustände möglich!

Eigenzustände des freien Hamiltonians i.A. *keine* Eigenzustände des wechselwirkenden Hamiltonians; gilt auch für Vakuum:

$$
\begin{aligned}
H_0|0\rangle &= E_0|0\rangle \quad \text{Vakuum von } H_0 && (395)\\
H|\Omega\rangle &= E_\Omega|\Omega\rangle \quad \text{Vakuum von } H && (396)
\end{aligned}
$$

Ebenso:
m_0 Teilchenmasse zu H_0, m Teilchenmasse zu H mit $m^2 = m_0^2 + \delta m^2$, zu berechnen

Fall von Interesse:
Streuprozess mit Anfangs- (inital) Zustand $|i\rangle$, End- (final) Zustand $|f\rangle$



Ziel: Beschreibung in QFT

6.2 Asymptotische Zustände

Annahme: Δt für Wechselwirkung sehr kurz
$\Rightarrow$ Anfangs- und Endzustand $\widehat{=}$ freie Theorie

$$t = -\infty : \qquad |\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathrm{in}\rangle = |i; \mathrm{in}\rangle \tag{397}$$

$$t = +\infty : \qquad |\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_n; \mathrm{out}\rangle = |f; \mathrm{out}\rangle \tag{398}$$

Bemerkungen:
- $|\mathrm{in}\rangle \neq |\mathrm{out}\rangle$ im Allgemeinen;
- $|\mathrm{in}\rangle$, $|\mathrm{out}\rangle$ Heisenbergzustände, t-unabhänging,
Eigenzustände von $H = H_0 + H_{\mathrm{int}}(t)$ (im Limes $t \to \pm\infty$)
-Physikalische Zustände: normierbare Wellenpakete, hier Behandlung ebene Wellen

Annahme: Vakuumzustand eindeutig und gleich für in/out-Räume (bis auf Phase)

$$|\Omega\rangle = |\Omega; \mathrm{in}\rangle = e^{i\alpha}|\Omega; \mathrm{out}\rangle \tag{399}$$

Zu den Fockräumen gehörige Feldoperatoren:

$$(\Box + m^2)\phi_{\mathrm{in}} = 0,\ (\Box + m^2)\phi_{\mathrm{out}} = 0 \tag{400}$$

$$\phi_{\substack{\mathrm{in}\\ \mathrm{out}}} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{k})} \left(a^\dagger_{\substack{\mathrm{in}\\ \mathrm{out}}}(\mathbf{k}) e^{ikx} + a_{\substack{\mathrm{in}\\ \mathrm{out}}}(\mathbf{k}) e^{-ikx} \right) \tag{401}$$

Asymptotenbedingung: (nur realisierbar innerhalb von Erwartungswerten)

$$\sqrt{Z}\phi_{\substack{\mathrm{in}\\ \mathrm{out}}}(x) = \lim_{t \to \substack{-\infty\\ +\infty}} \phi(x) \tag{402}$$

Normierungsfaktor $\sqrt{Z} \neq 1$ für ww. Theorie notwendig:
$\langle \mathbf{p}; \mathrm{in}|\phi_{\mathrm{in}}(x)|\Omega\rangle$ zu jeder Zeit Einteilchenzustand, $\langle \mathbf{p}; \mathrm{in}|\phi(x)|\Omega\rangle$ aber nicht!

6.3 Die Streumatrix

Observablen sind unabhängig von der gewählten Zustandsbasis

$$\Rightarrow \; \langle\Psi;\mathrm{in}|\phi_{\mathrm{in}}(x)|\Psi;\mathrm{in}\rangle \stackrel{!}{=} \langle\Psi;\mathrm{out}|\underbrace{}_{S^{-1}S}\phi_{\mathrm{out}}(x)\underbrace{}_{S^{-1}S}|\Psi;\mathrm{out}\rangle \tag{403}$$

$\Rightarrow \; \exists$ unitärer Operator S, so dass

$$\boxed{\begin{aligned} \phi_{\mathrm{in}}(x) &= S\phi_{\mathrm{out}}(x)S^{-1} && (404)\\ |\Psi;\mathrm{in}\rangle &= S|\Psi;\mathrm{out}\rangle && (405)\\ |\Psi;\mathrm{out}\rangle &= S^{-1}|\Psi;\mathrm{in}\rangle && (406) \end{aligned}}$$

S heißt Streumatrix (oder -operator)

Übergangsamplitude für $|i;\mathrm{in}\rangle \to |f;\mathrm{out}\rangle$

$$\begin{aligned} \langle f;\mathrm{out}|i;\mathrm{in}\rangle &= \langle f;\mathrm{out}|S|i;\mathrm{out}\rangle && (407)\\ &= S_{fi} \quad \text{Matrixelemente} && (408) \end{aligned}$$

Wahrscheinlichkeit für Streuprozess: $w_{fi} = |S_{fi}|^2$

Unitarität:

$$\sum_f w_{fi} = \sum_f \langle f|S|i\rangle\langle i|S^\dagger|f\rangle \stackrel{!}{=} 1 = \sum_f \langle i|S^\dagger|f\rangle\langle f|S|i\rangle = \langle i|S^\dagger S|i\rangle \tag{409}$$

$$\Rightarrow \quad S^\dagger = S^{-1} \tag{410}$$

6.4 S-Matrix und Green'sche Funktionen

Wir benötigen $S_{fi} = \langle \mathbf{k}_1, \dots \mathbf{k}_n; \mathrm{out}|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathrm{in}\rangle$

S_{fi} bisher abstrakte Größe, umschreiben in Felder:

1) Drücke $|\mathrm{in}\rangle, |\mathrm{out}\rangle$-Zustände durch $a^\dagger_{\text{in,out}}$ und $|\Omega\rangle$ aus

2) Drücke $a^\dagger_{\text{in,out}}$ durch $\phi_{\text{in,out}}$ aus

3) Drücke $\phi_{\text{in,out}}$ mit der Asymptotenbedingung durch ϕ aus

$\Rightarrow$ Lehmann-Symanzik-Zimmermann-Formel

$$\boxed{\begin{aligned} S_{fi} = \quad & \text{unverbundene Terme} \\ & + \frac{i^{n+2}}{\sqrt{Z}^{n+2}} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \int d^4y_1 \cdots \int d^4y_n \; e^{-ip_1x_1 - ip_2x_2 + ik_1y_1 + \cdots + ik_ny_n} \\ & \times (\Box_{x_1} + m^2)(\Box_{x_2} + m^2)(\Box_{y_1} + m^2) \dots (\Box_{y_n} + m^2) \\ & \times \langle \Omega | T\Big[\phi(y_1) \dots \phi(y_n)\phi(x_1)\phi(x_2)\Big] |\Omega\rangle \qquad (411) \end{aligned}}$$

mit der Greenfunktion

$$G_{n+2}(x_1x_2, y_1 \dots y_n) = \langle \Omega | T\Big[\phi(y_1) \dots \phi(y_n)\phi(x_1)\phi(x_2)\Big] |\Omega\rangle \qquad (412)$$

und dem Zeitordnungsoperator:

$$T\Big(\phi(t_1) \dots \phi(t_n)\Big) \equiv \sum_P \overbrace{\Theta(t_{p_1}, t_{p_2}, \dots \quad t_{p_n})}^{t_{p_1} \geq t_{p_2} \cdots \geq t_{p_n}} \phi(t_{p_1}) \dots \phi(t_{p_n}) \qquad (413)$$

"Unverbundene Terme": mindestens ein Teilchen nimmt nicht an Streuung teil

- Berechnung von Streuquerschnitten $\Leftrightarrow$ Berechnung von Greenfunktionen
- Eigenschaften *aller* Wechselwirkungen stecken in Vakuumerwartungswerten, $\Rightarrow$ nichttriviales Vakuum!
- Dieselbe Greenfunktion bestimmt z.B. $2 \to 2$-Streuung und $1 \to 3$-Zerfall

Berechnung von G_n:

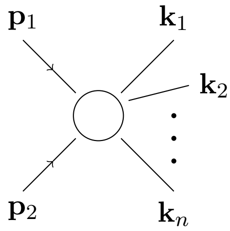
"First principles": Gitterfeldtheorien

Näherungen: Störungstheorie, gut für QED, schwache Wechselwirkung, QCD bei hohen Energien

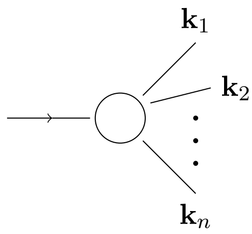
Variationsansätze: WKB-Näherung, semi-klassisch

Schwinger-Dyson-Gleichungen, Renormierungsgruppe:
Nichtperturbativ, aber Lösung ebenfalls mit Näherungen verbunden

6.5 Streuquerschnitt und Zerfallsrate



Streuung



Zerfall

Konvention: Abspalten von trivialem Fall (keine Streuung) und Energie-Impuls-Erhaltung:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \delta_{fi} + iT_{fi} \\ &= \delta_{fi} + i(2\pi)^4\delta^4(p_f - p_i) \underbrace{M_{fi}}_{\substack{= \langle f|M|i\rangle \\ = \langle \mathbf{k}_1 \ldots \mathbf{k}_n|M|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\rangle}} \prod_{\mathbf{p}_i} N(\mathbf{p}_i) \prod_{\mathbf{k}_i} N(\mathbf{k}_i) \end{aligned} \tag{414}$$

$N(\mathbf{p}_i)$ Normierungsfaktoren ebene Welle, da Fockraumzustände nicht auf eins normiert sind

$$\begin{aligned} \text{e.g. Boson} \quad \langle \mathbf{p}|\mathbf{p}'\rangle &= (2\pi)^3 2E(\mathbf{p})\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \\ &= 2E(\mathbf{p}) \int d^3x\, e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}} \\ \langle \mathbf{p}|\mathbf{p}\rangle &= 2E(\mathbf{p})V \quad \text{für endliches Volumen} \\ &= \frac{1}{N^2(\mathbf{p})} \end{aligned} \tag{415}$$

Wahrscheinlichkeit für nichttriviale Wechselwirkung:

$$w_{fi} = |T_{fi}|^2 = |i(2\pi)^4\delta^4(k_f - p_i)M_{fi}|^2 \frac{1}{2p_2^0 V}\frac{1}{2p_1^0 V}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2k_i^0 V} \tag{416}$$

Quadrat Deltafunktion divergent, regularisere durch endliches Raumzeitvolumen

$$(2\pi)^4\delta^4(k_f - p_i)\int\limits_{V,\Delta t} d^4x\, e^{-i(k_f-p_i)\cdot x} = (2\pi)^4\delta^4(k_f - p_i)V\Delta t \tag{417}$$

$$w_{fi} = (2\pi)^4\delta^4(p_f - p_i)|M_{fi}|^2 \frac{\Delta t}{V}\frac{1}{2p_2^0}\frac{1}{2p_1^0}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2k_i^0 V} \tag{418}$$

$$\begin{gathered} dW_{fi} = w_{fi}\, \underset{\uparrow}{dn_f} \\ \text{Anzahl der Zustände zwischen } \mathbf{k},\mathbf{k}+d\mathbf{k} \end{gathered} \tag{419}$$

Denn: erlaubte Impulszustände im endlichen Volumen für jede Dimension

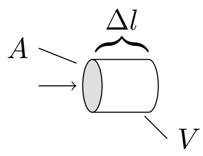
$$k^i = \frac{2\pi}{L}n^i, \quad n^i = 0,1,2,\ldots \Rightarrow dn^i = \frac{L}{2\pi}dk^i \tag{420}$$

$$dn_f = \prod_{i=1}^{n}\frac{V d^3k_i}{(2\pi)^3} \tag{421}$$

$$\Rightarrow \qquad dW_{fi} = |M_{fi}|^2 \frac{1}{2p_1^0}\frac{1}{2p_2^0}\frac{\Delta t}{V}(2\pi)^4\delta^4(p_f - p_i)\prod_{i=1}^{n}\frac{d^3k_i}{(2\pi)^3 2k_i^0} \tag{422}$$

Differenzieller Wirkungsquerschnitt:

$$d\sigma = \frac{\text{Übergangsrate}}{\text{Fluss der einlaufenden Teilchen}} = \frac{\frac{dW_{fi}}{\Delta t}}{\Phi} \tag{423}$$



$$
\begin{aligned}
\Phi &= \frac{\text{Anzahl Teilchen}}{\text{Fläche} \cdot \text{Zeit}} \\
&= \frac{N}{A \cdot \Delta t} = \overbrace{\frac{N}{V}}^{=n} \frac{\Delta l}{\Delta t} = n \cdot v_{\text{rel}}, \quad v_{\text{rel}} = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| \\
\Phi(N=1) &= \frac{v_{\text{rel}}}{V} && (424) \\
\Rightarrow [\sigma] &= \frac{\frac{1}{s}}{\frac{m}{s}\frac{1}{m^3}} = m^2 \\
d\sigma &= \frac{1}{2p_1^0} \frac{1}{2p_2^0} \frac{1}{\Phi V} |M_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(k_f - p_i) \prod_{i=1}^{n} \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3 2k_i^0} && (425)
\end{aligned}
$$

Zur Angabe des Flusses wähle Lorentzsystem, z.B. Ruhesystem Teilchen 2

$$
p_2^0 = m^2, \Phi = \frac{1}{V} \underbrace{\frac{|\mathbf{p}_1|}{p_1^0}}_{=|\mathbf{v}_1|} \tag{426}
$$

Für manifeste Lorentzinvarianz umschreiben durch Lorentzskalare

$$
|\mathbf{p}_1| = \sqrt{E_1^2 - m_1^2} = \frac{1}{2m_2} w(s, m_1^2, m_2^2) \tag{427}
$$

$$
s = (p_1 + p_2), \quad w(x, y, z) = \left[x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz\right]^{\frac{1}{2}} \tag{428}
$$

$\Rightarrow$ Insgesamt:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
d\sigma &= \frac{1}{2w(s, m_1^2, m_2^2)} (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + \dots k_n - p_1 - p_2) |M_{fi}|^2 \prod_{i=1}^{n} \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3 2k_i^0} \\
d\Gamma &= \frac{1}{2m_1} (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + \dots + k_n - p_1) \, |M_{fi}|^2 \prod_{i=1}^{n} \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3 2k_i^0} && (429)
\end{aligned}
}
$$

7 Störungstheorie

7.1 Wechselwirkungsbild (Diracbild) für Zeitentwicklung

$\phi(x), \Pi(x)$ Heisenbergoperatoren

$$\begin{aligned}\phi(x) &= e^{iH(t-t_0)}\,\phi(\mathbf{x},t_0)\,e^{-iH(t-t_0)} \equiv e^{iH(t-t_0)}\phi_S(\mathbf{x})e^{-iH(t-t_0)},\\ H &= H_0 + H_{\text{int}}\end{aligned}$$

Zeitentwicklung beschrieben durch vollen Hamiltonian - Lösung unbekannt!

Wechselwirkungsbild: Beschreibe bekannten Teil der t-Entwicklung durch H_0

$$\phi_I(x) \equiv e^{iH_0(t-t_0)}\,\phi_S\,(\mathbf{x})e^{-iH_0(t-t_0)} \tag{430}$$

Beziehung zu Heisenbergbild:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= e^{iH(t-t_0)}e^{-iH_0(t-t_0)}e^{iH_0(t-t_0)}\phi_S\,(\mathbf{x})e^{-iH_0(t-t_0)}e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)}\\ &= U^\dagger(t,t_0)\phi_I(x)U(t,t_0) \qquad (431)\end{aligned}$$

$$\text{mit}\quad U(t,t_0) \equiv e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)}, \qquad U^\dagger U = 1, \quad U(t_0,t_0) = 1 \tag{432}$$

Aus Definition von U folgt Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0) &= iH_0 e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)} - e^{iH_0(t-t_0)}iHe^{-iH(t-t_0)} \qquad (433)\\ &= iH_0 e^{iH_0(t-t_0)}e^{-iH(t-t_0)} - e^{iH_0(t-t_0)}i(H_0+H_{\text{int}})e^{-iH(t-t_0)}\end{aligned}$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0) = H_I(t)U(t,t_0), \quad \text{mit} \quad H_I(t) \equiv e^{iH_0(t-t_0)}H_{\text{int}}e^{-iH_0(t-t_0)} \tag{434}$$

Iterative Lösung: Starte mit $H_I = 0, \Rightarrow U(t,t_0) = 1$, einsetzen und iterieren

$$\begin{aligned}i\frac{\partial}{\partial t_1}U(t_1,t_0) &= H_I(t_1)\\ \Rightarrow U(t,t_0) - 1 &= -i\int_{t_0}^{t} dt_1 H_I(t_1)\\ i\frac{\partial}{\partial t_2}U(t_2,t_0) &= H_I(t_2)\left(1 - i\int_{t_0}^{t_2} dt_1 H_I(t_1)\right)\\ \Rightarrow U(t,t_0) - 1 &= -i\int_{t_0}^{t} dt_2 H_I(t_2) + (-i)^2\int_{t_0}^{t} dt_2\int_{t_0}^{t_2} dt_1\, H_I(t_2)H_I(t_1)\end{aligned}$$

n Iterationen:

$$\begin{aligned} U(t,t_0) &= 1 - i\int_{t_0}^{t} dt_n\, H_I(t_n) + (-i)^2 \int_{t_0}^{t} dt_n \int_{t_0}^{t_n} dt_{n-1} H_I(t_n) H_I(t_{n-1}) \\ &\quad + \ldots + (-i)^n \int_{t_0}^{t} dt_n\, \ldots \int_{t_0}^{t_2} dt_1\, H_I(t_n)\ldots H_I(t_1) \end{aligned} \tag{435}$$

Symmetrisierung der Integrale:

$$\int_{t_0}^{t} dt_n\, \ldots \int_{t_0}^{t_2} dt_1\, H_I(t_n)\ldots H_I(t_1) = \frac{1}{n!}\int_{t_0}^{t} dt_n\, \ldots \int_{t_0}^{t} dt_1\, T\left(H_I(t_n)\ldots H_I(t_1)\right)$$

$\Rightarrow$ Geschlossene Lösung:

$$U(t,t_0) = T \exp\Big\{ -i \int_{t_0}^{t} H_I(t')dt' \Big\} \tag{436}$$

mit zeitgeordneten Produkten:

$$T\Big(\phi(x_1)\ldots\phi(t_n)\Big) = \sum_P \Theta \overbrace{(t_{p_1}, t_{p_2}, \ldots \qquad t_{p_n})}^{t_{p_1} \geq t_{p_2} \cdots \geq t_{p_n}} \phi(t_{p_1})\ldots\phi(t_{p_n}) \tag{437}$$

$$\Theta(t_1,t_2,t_3) = \Theta(t_1 - t_2)\Theta(t_2 - t_3) \quad \text{etc.} \tag{438}$$

Eigenschaften:

$$U^\dagger(t_1,t_2) = U^{-1}(t_1,t_2) = U(t_2,t_1) \tag{439}$$

$$U(t_1,t_2)U(t_2,t_3) = U(t_1,t_3)\,, \quad \text{für} \quad t_1 \geq t_2 \geq t_3 \tag{440}$$

Asymptotenbedingungen:

$$t \to +\infty : \quad \phi_{\rm in}(x) = U(t,-t)\phi_{\rm out}(x)U^\dagger(t,-t) \tag{441}$$

Aus Definition S-Matrix folgt: $\boxed{\lim_{t\to\infty} U(t,-t) = S}$

7.2 Störungstheorie um freie Felder

0. Näherung Freie Felder ϕ_I, $(\Box + m_0^2)\phi_I(x) = 0$
1. Näherung Iterieren mit schwacher Wechselwirkung

$\Rightarrow$ Drücke $\phi(x)$ durch $\phi_I(x)$ und $|\Omega\rangle$ durch $|0\rangle$ aus; wähle $t_0 = 0$

$$\text{Def.:} \quad U(t) \equiv U(t,0) \tag{442}$$

Vollst. System von Eigenzuständen von H: $H|n\rangle = E_n|n\rangle$

$$e^{-iHt}|0\rangle = \sum_n |n\rangle e^{-iE_nt}\langle n|0\rangle = |\Omega\rangle e^{-iE_\Omega t}\langle\Omega|0\rangle + \sum_{n\neq\Omega}|n\rangle e^{-iE_nt}\langle n|0\rangle \tag{443}$$

Trick zur Unterdrückung angeregter Zustände:

$$\lim_{t\to\infty_-} \equiv \lim_{\varepsilon\to 0} \quad \lim_{t\to\infty(1-i\varepsilon)} \tag{444}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad |\Omega\rangle &= \lim_{t\to\infty_-} \frac{1}{e^{-iE_\Omega t}\langle\Omega|0\rangle} e^{-iHt}|0\rangle \\
&= \lim_{t\to\infty_-} \frac{1}{e^{-i(E_\Omega - E_0)t}\langle\Omega|0\rangle} e^{-iHt}e^{iH_0t}|0\rangle \\
&= \lim_{t\to\infty_-} \frac{1}{e^{-i(E_\Omega - E_0)t}\langle\Omega|0\rangle} U^\dagger(-t)|0\rangle
\end{aligned} \tag{445}$$

Ebenso:

$$\langle\Omega| = \lim_{t\to\infty_-} \frac{1}{e^{-i(E_\Omega - E_0)t}\langle 0|\Omega\rangle}\langle 0|U(t) \tag{446}$$

Betrachte n-Punktfunktion für $t_1 > t_2 > \cdots > t_n$:

$$\begin{aligned}
G_n &= \langle\Omega|\phi(x_1)\ldots\phi(x_n)|\Omega\rangle \\
&= \langle\Omega|\underbrace{\qquad}_{U^{-1}(t)U(t)} U^{-1}(t_1)\phi_I(x_1)U(t_1)\ldots U^{-1}(t_n)\phi_I(x_n)U(t_n)\underbrace{\qquad}_{U^{-1}(-t)U(-t)}|\Omega\rangle
\end{aligned}$$

mit $t \gg t_1$, $-t \ll t_n$

Mit den Gleichungen (445,446) erhalten wir

$$G_n = \lim_{t\to\infty_-} \frac{\langle 0|U(t,t_1)\phi_I(x_1)U(t_1,t_2)\ldots U(t_{n-1},t_n)\phi_I(x_n)U(t_n,-t)|0\rangle}{e^{-2i(E_\Omega - E_0)t}|\langle\Omega|0\rangle|^2} \tag{447}$$

Alles in Zeitordnung; Umschreiben mit Verwendung von "T":

$$\begin{aligned}
G_n &= \lim_{t\to\infty_-}(e^{-2i(E_\Omega - E_0)t}|\langle\Omega|0\rangle|^2)^{-1} \\
&\quad \times\langle 0|T\Big\{\phi_I(x_1)\ldots\phi_I(x_n)\underbrace{U(t,t_1)U(t_1,t_2)\ldots U(t_n,-t)}_{=U(t,-t)}\Big\}|0\rangle
\end{aligned} \tag{448}$$

Benutze

$$1 = \langle \Omega | \Omega \rangle = \lim_{t \to \infty_-} \frac{1}{e^{-2i(E_\Omega - E_0)t} |\langle 0 | \Omega \rangle|^2} \langle 0 | U(t, -t) | 0 \rangle \tag{449}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} G_n(x_1, \dots x_n) &= \langle \Omega | T \Big\{ \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \Big\} | \Omega \rangle \\ &= \frac{\langle 0 | T \Big\{ \phi_I(x_1) \dots \phi_I(x_n) S \Big\} | 0 \rangle}{\langle 0 | S | 0 \rangle} && (450) \\ S &= \lim_{t \to \infty_-} T \exp \Big\{ -i \int_{-t}^{t} dt' \, H_I(t') \Big\} && (451) \end{aligned}}$$

Beispiel: ϕ^4-Theorie

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_{\text{int}} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - m_0^2 \phi^2 \underbrace{- \frac{\lambda_0}{4!} \phi^4}_{= -\mathscr{H}_{\text{int}}} \tag{452}$$

Störungstheorie: Entwicklung von S in Potenzen von λ_0
$\lambda_0 =$ Kopplungskonstante

7.3 Das Wick'sche Theorem

In diesem Abschnitt: alle Felder im Diracbild, weglassen von Index "I"

Ziel: Vereinfachung von $G_n \quad \rightarrow \quad$ Produkt von 2-Punktfunktionen

Es gilt:

$$\phi(x_1)\phi(x_2) = :\phi(x_1)\phi(x_2): + \langle 0|\phi(x_1)\phi(x_2)|0\rangle \tag{453}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})} \Big[a(\mathbf{p})e^{-ipx} + a^\dagger(\mathbf{p})e^{ipx}\Big] \equiv \phi^- + \phi^+ \\
\phi(x_i) &\equiv \phi_i \\
\\
\phi_1\phi_2 &= \phi_1^+\phi_2^+ + \phi_1^+\phi_2^- + \phi_1^-\phi_2^+ + \phi_1^-\phi_2^- \\
:\phi_1\phi_2: &= \phi_1^+\phi_2^+ + \phi_1^+\phi_2^- + \phi_2^+\phi_1^- + \phi_1^-\phi_2^-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_1^-\phi_2^+ &= \Big[\phi_1^-, \phi_2^+\Big] + \phi_2^+\phi_1^- \\
&= \langle 0|\Big[\phi_1^-, \phi_2^+\Big]|0\rangle + \phi_2^+\phi_1^- \\
&= \langle 0|\phi_1\phi_2|0\rangle + \phi_2^+\phi_1^-
\end{aligned} \tag{454}$$

Damit folgt (453)

$\Rightarrow$ Umschreiben zeitgeordnete Produkte:

$$\begin{aligned}
T\Big((\phi(x_1)\phi(x_2)\Big) &= \phi(x_1)\phi(x_2)\Theta(t_1-t_2) + \phi(x_2)\phi(x_1)\Theta(t_2-t_1) \\
&= :\phi(x_1)\phi(x_2): \Big[\Theta(t_1-t_2) + \Theta(t_2-t_1)\Big] \\
&\quad + \langle 0|\phi(x_1)\phi(x_2)\Theta(t_1-t_2) + \phi(x_2)\phi(x_1)\Theta(t_2-t_1)|0\rangle
\end{aligned} \tag{455}$$

$$\text{wegen} \qquad :\phi(x_1)\phi(x_2): = :\phi(x_2)\phi(x_1): \tag{456}$$

$$\Rightarrow T\Big(\phi(x_1)\phi(x_2)\Big) = :\phi(x_1)\phi(x_2): + \langle 0|T\Big(\phi(x_1)\phi(x_2)\Big)|0\rangle \tag{457}$$

$$\begin{aligned}
T\Big[\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\Big] &= + :\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3): \\
&\quad + :\phi(x_1): \langle 0|T\Big(\phi(x_2)\phi(x_3)\Big)|0\rangle \\
&\quad + :\phi(x_2): \langle 0|T\Big(\phi(x_1)\phi(x_3)\Big)|0\rangle \\
&\quad + :\phi(x_3): \langle 0|T\Big(\phi(x_1)\phi(x_2)\Big)|0\rangle
\end{aligned} \tag{458}$$

usw.

n gerade:

$$
\begin{aligned}
& T\Big[\phi(x_1)\dots\phi(x_n)\Big] \\
= \quad & + :\phi(x_1)\dots\phi(x_n): \\
& + :\phi(x_1)\dots\cancel{\phi(x_i)}\dots\cancel{\phi_I(x_j)}\dots\phi(x_n): \\
& \times\langle 0|T\Big(\phi(x_i)\phi(x_j)\Big)|0\rangle + \text{Permutationen} \\
& + :\phi(x_1)\dots\cancel{\phi(x_i)}\dots\cancel{\phi(x_j)}\dots\cancel{\phi(x_k)}\dots\cancel{\phi(x_l)}\dots\phi(x_n): \\
& \times\langle 0|T\Big(\phi(x_i)\phi(x_j)\Big)|0\rangle\langle 0|T\Big(\phi(x_k)\phi(x_l)\Big)|0\rangle + \text{Permutationen} \\
& + \dots \\
& +\langle 0|T\Big(\phi(x_1)\phi(x_2)\Big)|0\rangle\dots\langle 0|T\Big(\phi(x_{n-1})\phi(x_n)\Big)|0\rangle \\
& +\text{Permutationen.}
\end{aligned}
\tag{459}
$$

$$
\text{Def. Wick-Kontraktion:} \quad \wick{\c1\phi(x_i)\c1\phi(x_j)} \equiv \langle 0|T\Big[\phi(x_i)\phi(x_j)\Big]|0\rangle \tag{460}
$$

<u>Theorem:</u>

$$
\langle 0|T\Big[\phi(x_1)\dots\phi(x_n)\Big]|0\rangle \begin{cases} = \text{Summe aller Wick-Kontraktionen für } n \text{ gerade} \\ = 0 \text{ für } n \text{ ungerade} \end{cases} \tag{461}
$$

<u>Beispiel:</u>

$$
\begin{aligned}
& \langle 0|T\Big(\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\Big)|0\rangle \qquad (462) \\
= \quad & \wick{\c1\phi(x_1)\c1\phi(x_2)\c2\phi(x_3)\c2\phi(x_4)} + \wick{\c1\phi(x_1)\c2\phi(x_2)\c1\phi(x_3)\c2\phi(x_4)} + \wick{\c1\phi(x_1)\c2\phi(x_2)\c2\phi(x_3)\c1\phi(x_4)}
\end{aligned}
$$

7.4 Der Feynmanpropagator

$$\Delta_F(x,y) \equiv \langle 0|T(\phi_I(x)\phi_I(y))|0\rangle \tag{463}$$

Sei $t_x > t_y$

$$\begin{aligned}
\Delta_F(x,y) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})} \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{q})} \\
&\quad \times \langle 0| \left(a^\dagger(\mathbf{p})e^{ipx} + a(\mathbf{p})e^{-ipx}\right)\left(a^\dagger(\mathbf{q})e^{iqx} + a(\mathbf{q})e^{-iqx}\right)|0\rangle \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})} \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{q})} \langle 0|a(\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{q})|0\rangle e^{-i(px-py)} \qquad (464)
\end{aligned}$$

Physikalische Interpretation dieser Zweipunktfunktion:
Erzeugung Teilchen bei y, Propagation nach x, Vernichtung bei x

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})} \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{q})} e^{-i(px-qy)} \langle 0| \underbrace{\left[a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{q})\right]}_{(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{q})} |0\rangle \tag{465}$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})} e^{-ip(x-y)} \tag{466}$$

Allgemeine t_x, t_y:

$$\Delta_F(x,y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(p)} \left[e^{-ip(x-y)}\Theta(t_x - t_y) + e^{ip(x-y)}\Theta(t_y - t_x)\right] \tag{467}$$

$$\boxed{\Delta_F(x,y) = i\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m_0^2 + i\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \qquad (468)}$$

$\varepsilon \to 0$, kleiner Parameter zur Vermeidung der Singularität bei $p_0 = E(\mathbf{p})$

$$(\Box + m_0^2)\Delta_F(x-y) = -i\delta^4(x-y) \tag{469}$$

$\Rightarrow$ Δ_F ist Greenfunktion zum K.-G.-Operator

Symbolisch:

$$\Delta_F(x,y) \quad = \quad x \,\text{———}\, y \tag{470}$$

7.5 Streuung zur Ordnung $O(\lambda_0)$ in ϕ^4-Theorie

Betrachte Streuung zweier Spin-0-Teilchen "ϕ":

$$\phi(p_1) + \phi(p_2) \longrightarrow \phi(p_3) + \phi(p_4) \tag{471}$$

LSZ-Formel: Benötige Vierpunktfunktion

$$G_4(x_1 \dots x_4) = \langle\Omega|T\Big(\phi(x_1)\dots\phi(x_4)\Big)|\Omega\rangle = \frac{\langle 0|T\Big\{\phi_I(x_1)\dots\phi_I(x_4)S\Big\}|0\rangle}{\langle 0|S|0\rangle} \tag{472}$$

mit der Streumatrix

$$S = T\exp\Big\{-i\int d^4x\,\frac{\lambda_0}{4!} :\phi_I^4(x):\Big\} \tag{473}$$

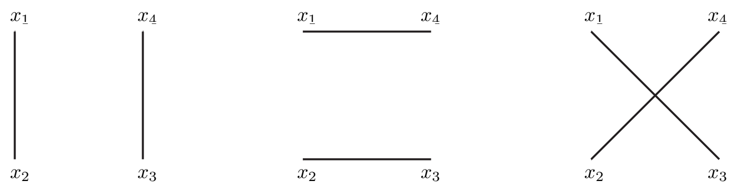
: : vermeidet Vakuumdivergenzen, Rechtfertigung später

$$\Rightarrow G_4(x_1\dots x_4) = \frac{\sum\limits_{r=0}^{\infty}(\frac{-i\lambda_0}{4!})^r(\frac{1}{r!})\,\langle 0|T\Big[\phi_I(x_1)\dots\phi_I(x_4)\Big(\int d^4y :\phi_I^4(y):\Big)^r\Big]|0\rangle}{\sum\limits_{r=0}^{\infty}(\frac{-i\lambda_0}{4!})^r(\frac{1}{r!})\,\langle 0|T\Big(\int d^4y :\phi_I^4(y):\Big)^r|0\rangle} \tag{474}$$

Nenner	=	1	+	0 (Normalordnung)
Term:		$r=0$		$r=1$

Zähler:

$$\begin{aligned} \text{Term } r=0: \quad & \langle 0|T\Big(\phi_I(x_1)\dots\phi_I(x_4)\Big)|0\rangle \\ = \quad & \Delta_F(x_1-x_2)\Delta_F(x_3-x_4) + \Delta_F(x_1-x_3)\Delta_F(x_2-x_4) \\ & +\Delta_F(x_1-x_4)\Delta_F(x_2-x_3) \end{aligned} \tag{475}$$

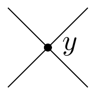


Unverbundene oder "disconnected" Beiträge

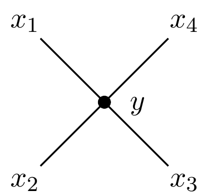
$$\text{Term } r=1: \qquad \frac{-i\lambda_0}{4!}\,\langle 0|T\Big[\phi_I(x_1)\ldots\phi_I(x_4):\int d^4y\,\phi_I^4(y):\Big]|0\rangle \tag{476}$$
$$= \frac{-i\lambda_0}{4!}\int d^4y\ 4!\ \Delta_F(x_1-y)\Delta_F(x_2-y)\Delta_F(x_3-y)\Delta_F(x_4-y)$$

(Wickkontraktionen der $\phi^4(y)$ innerhalb der Normalordnung ergeben null)

Wechselwirkungsterm, grafische Darstellung durch "Vertex":

$-i\lambda_0\int d^4y \quad =$ 

Grafische Darstellung des Gesamtausdrucks (476):



Damit Beginn Störungsreihe für Vierpunktfunktion:

$$\begin{aligned} G_4(x_1\ldots x_4) &= \Delta_F(x_1-x_2)\Delta_F(x_3-x_4)+\Delta_F(x_1-x_3)\Delta_F(x_2-x_4)\\ &\quad +\Delta_F(x_1-x_4)\Delta_F(x_2-x_3)\\ &\quad -i\lambda_0\int d^4y\ \Delta_F(x_1-y)\Delta_F(x_2-y)\Delta_F(x_3-y)\Delta_F(x_4-y)\\ &\quad +O(\lambda_0^2) \end{aligned} \tag{477}$$

- Verbundener ("connected") Anteil (für nichttriviale Streuung): lediglich ein Term
- Verbindung des Wechselwirkungspunktes mit den äußeren Punkten durch einfache Linien, d.h. ausschließlich Propagatoren der freien Theorie
  $\Rightarrow \quad Z=1+O(\lambda_0^2), \quad \delta m^2=O(\lambda_0^2)$, d.h. $m_0=m$ in dieser Ordnung

Einsetzen in LSZ:

$$\begin{aligned}
& \langle \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4; \mathrm{out}|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathrm{in}\rangle_c \\
= \; & i^4 \int d^4x_1 \ldots d^4x_4 \; e^{-ip_1x_1 - ip_2x_2 + ip_3x_3 + \cdots + ip_4x_4} \\
& \times(\Box_{x_1} + m^2)(\Box_{x_2} + m^2)(\Box_{x_3} + m^2)(\Box_{x_4} + m^2) \\
& \times(-i\lambda_0) \int d^4y \; \Delta_F(x_1 - y)\Delta_F(x_2 - y)\Delta_F(x_3 - y)\Delta_F(x_4 - y) \; . \\
& + O(\lambda_0^2) \\
= \; & -i\lambda_0 \int d^4x_1 \ldots d^4x_4 \; e^{-ip_1x_1 - ip_2x_2 + ip_3x_3 + \cdots + ip_4x_4} \\
& \times(-i)^4 \int d^4y \; \delta^4(x_1 - y)\delta^4(x_2 - y)\delta^4(x_3 - y)\delta^4(x_4 - y) + O(\lambda_0^2) \\
= \; & -i\lambda_0 \int d^4y \; e^{-i(p_1+p_2-p_3-p_4)y} + O(\lambda_0^2) \\
= \; & \underbrace{-i\lambda_0(2\pi)^4\delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}_{=i(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4)M_{fi}} + O(\lambda_0^2)
\end{aligned} \tag{478}$$

$\Rightarrow$ Identifiziere $M_{fi} = -\lambda_0$

Anwendung auf Streuproblem:
Aus allgemeiner Formel für differenziellen Wirkungsquerschnitt folgt für $2 \to 2$-Streuung von Teilchen gleicher Masse im Schwerpunktsystem (Übung)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s}|M_{fi}|^2 \tag{479}$$

Damit Endresultat zum direkten Vergleich mit Experiment:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\lambda_0^2}{64\pi^2 s} \tag{480}$$

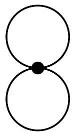
Beobachtungen:

- Streuquerschnitt erwartungsgemäß von Kopplungsstärke abhängig
- $1/s$-Verhalten typisch für strukturlose Punktteilchen
- Keine Winkelabhängikeit: Spin-0-Teilchen

7.6 Vakuumdiagramme

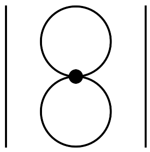
Wie ändert sich die Rechnung ohne Normalordnung $: H_I :$?

Zusätzlicher Beitrag zum Nenner von G_4, d.h. $\langle 0|S|0\rangle$, $r = 1$ Term:

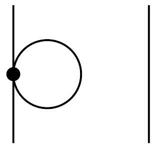


$$\phi_I(y)\phi_I(y)\phi_I(y)\phi_I(y) = \Delta_F(y,y)\Delta_F(y,y)$$

Zusätzliche Beiträge zum Zähler:



$$\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\phi_I(x_3)\phi_I(x_4)\phi_I(y)\phi_I(y)\phi_I(y)\phi_I(y)$$



$$\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)\phi_I(x_3)\phi_I(x_4)\phi_I(y)\phi_I(y)\phi_I(y)\phi_I(y)$$

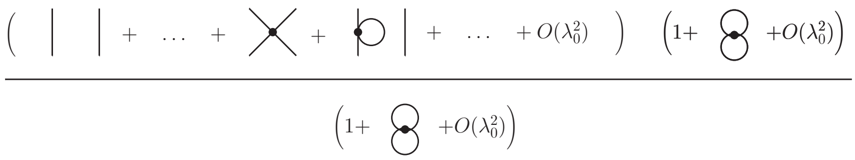
Physikalische Interpretation dieser Beiträge:

- Vakuumfluktuationen, d.h. kurzfristige Paarbildung und -vernichtung
- Schleifenteilchen unbeobachtbar, d.h. virtuell, da Anfangs- und Endzustand des Prozesses gleich
- Teilchen in Vakuumschleifen sind “off-shell”, d.h. $p^2 \neq m_0^2$

$$\Delta_F(y,y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \tag{481}$$

- Quanteneffekt, konsistent mit Heisenberg’scher Unschärferelation
- Integrand bei großen Impulsen $\sim d^4p/p^2$, divergent!

Vierpunktfunktion ohne Normalordnung:

$G_4(x_1, \ldots, x_4) =$ 

Alle unverbundenen Diagramme mit reinen Vakuumblasen kürzen sich aus Greenfunktionen heraus; gültig für alle G_n zu allen Ordnungen

7.7 Feynmandiagramme am Beispiel der Zweipunktfunktion

Grafische Darstellung zur Vereinfachung der Rechnung, Bsp. Zweipunktfunktion:

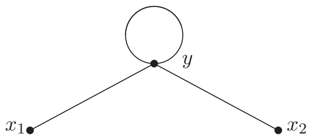
$$G_2(x_1, x_2) = \frac{\langle 0|T\Big\{\phi_I(x_1)\phi_I(x_2)S\Big\}|0\rangle}{\langle 0|S|0\rangle} \tag{482}$$

Betrachte Störungsreihe Term für Term:

Ordnung $\sim \lambda_0^0$ freie Theorie:

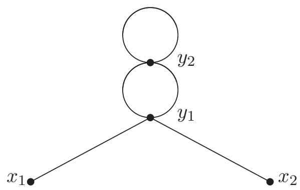
$= \Delta_F(x_1, x_2)$

Ordnung $\sim \lambda_0$: "Tadpole-" (Kaulquappen-) Diagramm

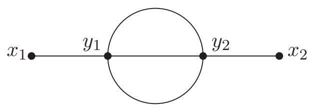


verschwindet in Normalordnung

Ordnung $\sim \lambda_0^2$:



verschwindet in Normalordnung



Beitrag auch bei Normalordnung

Berechnung Diagramm statt expliziter Wickkontraktion:
Schreibe mathematischen Ausdruck für jeden Propagator und Vertex

$$\begin{aligned} &= C\left(\frac{-i\lambda_0}{4!}\right)^2 \int d^4y_1 \int d^4y_2 \Delta_F(x_1 - y_1)\Delta_F^3(y_1 - y_2)\Delta_F(y_2 - x_2) \\ = \; & \frac{1}{S}(-i\lambda_0)^2 \int d^4y_1 \int d^4y_2 \Delta_F(x_1 - y_1)\Delta_F^3(y_1 - y_2)\Delta_F(y_2 - x_2) \end{aligned} \tag{483}$$

Kombinatorischer Faktor C: Anzahl der Wickkontraktionen mit gleichem Resultat

$$\phi(x_1)\phi(x_2) : \phi(y_1)\phi(y_1)\phi(y_1)\phi(y_1) :: \phi(y_2)\phi(y_2)\phi(y_2)\phi(y_2) : \tag{484}$$

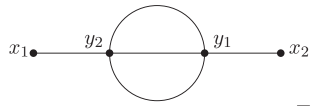
Ununterscheidbarkeit von Feldern mit gleichem Argument:

$$C = 4 \times 4 \times 3! = 4 \cdot 4! \tag{485}$$

Symmetriefaktor des Diagramms:

$$\frac{1}{S} = \frac{C}{(4!)^2} = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6} \tag{486}$$

Weiteres Diagramm:



Topologisch verschieden, aber gleicher Wert

Feynmanregeln zur Berechnung der m-ten Ordnung von n-Punktfunktionen

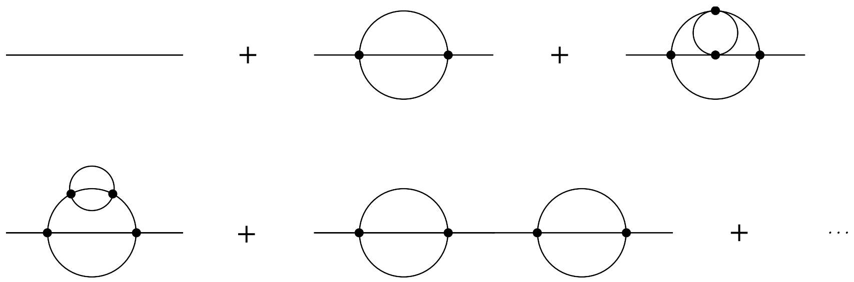
1. Man zeichne alle topologisch verschiedenen Diagramme mit n äußeren Punkten $x_1, \dots, x_n$ und m Vierervertizes bei $y_1, \dots, y_m$, die keine unverbundenen Vakuumblasen enthalten
2. Jede Linie zwischen zwei (äußeren und/oder inneren) Punkten z_i und z_j erhält einen Faktor $\Delta_F(z_i - z_j)$
3. Jeder Vertex erhält einen Faktor $-i\lambda_0 \int d^4y_i$
4. Jedes Diagramm erhält einen zugehörigen Symmetriefaktor S^{-1}
5. Man addiere die Ausdrücke für alle Diagramme

Feynmanregeln zur Berechnung der m-ten Ordnung von n-Punktfunktionen im Impulsraum

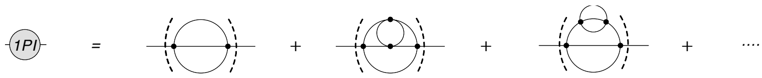
1. Man zeichne alle topologisch verschiedenen Diagramme mit n äußeren Linien und m Vierervertizes, die keine unverbundenen Vakuumblasen enthalten.
2. Äußere Linien erhalten Impulse $p_1, \dots, p_n$, innere Linien erhalten Impulse k_j
3. Äußere Linien erhalten einen Faktor $\frac{i}{p_j^2 - m_0^2 + i\varepsilon}$
4. Innere Linien erhalten einen Faktor $\displaystyle\int \frac{d^4k_j}{(2\pi)^4} \frac{i}{k_j^2 - m_0^2 + i\varepsilon}$
5. Jeder Vertex erhält einen Faktor: $-i\lambda_0 (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum \text{Impulse}\right)$
6. Jedes Diagramm erhält einen zugehörigen Symmetriefaktor S^{-1}
7. Man addiere die Ausdrücke für alle Diagramme

7.8 Die volle Zweipunktfunktion

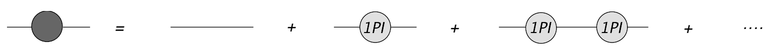
Zweipunktfunktion bis zur Ordnung λ_0^4, mit normalgeordnetem $: H_I :$



Selbstenergie $\Pi(p^2)$: Summe aller "einteilchenirreduziblen" Zweipunktdiagramme ohne äußere Beine

$-i\Pi(p^2) =$ 

Volle Zweipunktfunktion:



$$\begin{aligned}
G_2(p^2) &= \Delta_F + \Delta_F(-i\Pi)\Delta_F + \Delta_F(-i\Pi)\Delta_F(-i\Pi)\Delta_F + \dots \\
&= \frac{\Delta_F}{1 + i\Pi\Delta_F} = \frac{1}{\Delta_F^{-1} + i\Pi} = \frac{i}{p^2 - m_0^2 - \Pi(p^2) + i\varepsilon}
\end{aligned} \tag{487}$$

Beachte: Selbstwechselwirkung über Vakuum verschiebt den Pol!

$$p^2 = m_0^2 + \Pi(p^2) \quad \Rightarrow m^2 = m_0^2 + \Pi(m^2) = m_0^2 + \delta m^2(\lambda_0) \tag{488}$$

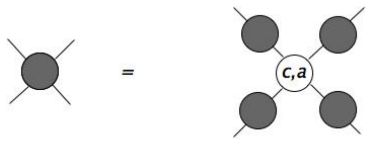
Lange vor (entsprechend nach) einer Streuung mit Asymptotenbedingung:

$$\begin{aligned}
\lim_{t_1,t_2\to-\infty} G_2(x_1,x_2) &= \lim_{t_1,t_2\to-\infty} \langle\Omega|T\phi(x_1)\phi(x_2)|\Omega\rangle \\
&= Z\langle\Omega|T\phi_{\text{in}}(x_1)\phi_{\text{in}}(x_2)|\Omega\rangle \\
&= i\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, e^{-ip(x_1-x_2)}\frac{Z}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}
\end{aligned} \tag{489}$$

$$\Rightarrow \text{Für} \quad t \to \pm\infty : \quad (\Box + m^2)G_2(x-y) = -iZ\delta^4(x-y) \tag{490}$$

7.9 Die volle Vierpunktfunktion

Analog zur nackten und physikalischen Masse sind auch die nackte und physikalische Kopplung verschieden:



Im Zentrum die volle verbundene und amputierte Vierpunktfunktion (ohne äußere Beine), die Beine sind volle Propagatoren

Def. amputierte Greenfunktionen:

$$G_n^c(x_1 \dots x_n) \equiv \int d^4z_1 \dots d^4z_n \, G_2(x_1 - z_1) \dots G_2(x_n - z_n) \, G_n^a(z_1 \dots z_n) \qquad (491)$$

Korrektur der Kopplung:

$$\lambda = \lambda_0 + \delta\lambda(\lambda_0) \qquad (492)$$

7.10 Von den Greenfunktionen zur S-Matrix

S-Matrixelemente sind im Impulsraum definiert $\Rightarrow$ direkt im Impulsraum rechnen

Damit Umschreiben der (verbundenen) S-Matrixelemente:

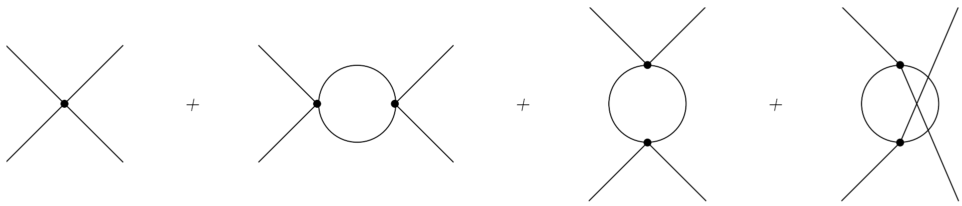
$$\begin{aligned}
S_{fi}|_{\mathrm{c}} &= \langle \mathbf{k}_1, \ldots \mathbf{k}_n, \mathrm{out}|\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathrm{in}\rangle_{\mathrm{c}} \\
&= \left(\frac{i}{\sqrt{Z}}\right)^{n+2} \int \prod_{i=1}^{2} d^4x_i \prod_{j=1}^{n} d^4y_j \;\; e^{-i\sum\limits_{i=1}^{2} p_i x_i + i\sum\limits_{j=1}^{n} k_j y_j} \\
&\quad \times \prod_{i=1}^{2}(\Box_{x_i} + m^2) \prod_{j=1}^{n}(\Box_{y_j} + m^2)\; G^c_{n+2}(x_1, x_2, y_1, \ldots, y_n) \\
&= \left(\frac{i}{\sqrt{Z}}\right)^{n+2} \int \prod_{i=1}^{n} d^4x_i \prod_{j=1}^{n} d^4y_j \;\; e^{-i\sum\limits_{i} p_i x_i + i\sum\limits_{S} k_j y_j} \\
&\quad \times (-iZ)^{n+2} \int d^4z_1 \ldots d^4z_{n+2}\, \delta^4(x_1 - z_1) \ldots \delta^4(y_n - z_{n+2}) \\
&\quad \times G^a_{n+2}(z_1, \ldots, z_{n+2}) \\
&= (\sqrt{Z})^{n+2} \int \prod_{i=1}^{2} d^4x_i \prod_{j=1}^{n} dy_i^4 \; e^{-i\sum\limits_{i=1}^{2} p_i x_i + i\sum\limits_{j=1}^{n} k_j y_j} \; G^a_{n+2}(x_1, x_2, y_1, \ldots, y_n) \\
&= (\sqrt{Z})^{n+2} \int \prod_{i=1}^{n+2} d^4x_i \; e^{-i\sum\limits_{i=1}^{n+2} p_i x_i} \; G^a_{n+2}(x_1, \ldots x_{n+2}) \\
&= (\sqrt{Z})^{n+2}\; \bar{G}^a_{n+2}(p_1 \ldots, p_{n+2})(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \ldots + p_n)
\end{aligned} \tag{493}$$

$\Rightarrow$ Streumatrixelemente direkt aus amputierten, verbundenen Greenfunktionen im Impulsraum

7.11 Diagramme höherer Ordnung und Renormierung

„Strahlungskorrekturen“, Emission und Absorption von (virtuellen) Teilchen

Vierpunktfunktion bis zur Ordnung $O(\lambda_0^2)$ mit Normalordnung:



$$I \sim \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(k - p_1 - p_2)^2 - m^2 + i\varepsilon} \,. \tag{494}$$

$$I \sim \int d^4k \, \frac{1}{k^4} \sim \ln |k| \, \Big|_0^\infty \,, \quad \text{divergent!} \tag{495}$$

- **Regularisierung**

  Endlich machen durch Abschneiden der Impulsintegration:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^4k \frac{k^2}{k^6} \to \int_{-\Lambda}^{\Lambda} d^4k \frac{k^2}{k^6} \sim \ln \Lambda \,. \tag{496}$$

  Am Ende der Rechnung $\Lambda \to \infty$

- **Renormierung**

$$\begin{aligned} m^2 &= m_0^2 + \delta m^2 = m^2(\lambda_0, m_0, \Lambda) \\ \lambda &= \lambda_0 + \delta\lambda = \lambda(\lambda_0, m_0, \Lambda) \end{aligned} \tag{497}$$

  Limes $\Lambda \to \infty$ führt auf divergierende Messgrößen λ und m, sinnlos!
  Lösung: Unterscheidung zwischen physikalischen und rechentechnischen Größen:

  λ_0, m_0 prinzipiell nicht beobachtbar, λ, m unabhängig von Rechendetails!

$$\begin{aligned} \Rightarrow m_0 &= m_0(\lambda, m, \Lambda) \\ \lambda_0 &= \lambda_0(\lambda, m\Lambda) \end{aligned} \tag{498}$$

  Limes $\Lambda \to \infty$ bei festen λ, m führt zu $m_0, \lambda_0 \to \infty$, na und?

Renormierungstheorie:

$$\begin{aligned} G_n^R(\lambda, m) \quad &\equiv \quad \lim_{\Lambda\to\infty} \Big(Z(\lambda_0(\lambda, m, \Lambda), m_0(\lambda, m, \Lambda), \Lambda) \Big)^{-\frac{n}{2}} \\ &\qquad \cdot G_n(\lambda_0(\lambda, m, \Lambda), m_0(\lambda, m, \Lambda), \Lambda) \end{aligned} \tag{499}$$

$$G_n^{aR}(\lambda, m) = \lim_{\Lambda\to\infty} \Big(Z(\lambda, m, \Lambda) \Big)^{\frac{n}{2}} G_n^a(\lambda, m, \Lambda) \tag{500}$$

Renormierte Greenfunktionen ergeben Ordnung für Ordnung endliche Resultate!

Festlegen der physikalischen Parameter durch Vergleich mit Experiment:

$$\begin{aligned} m^2: & \qquad \text{Pol von } G_2 \\ \lambda|_{s_0} \quad = & \quad \sqrt{Z}^4\, G_4^a(s_0) = \lambda_0 + \delta\lambda(s_0) \end{aligned} \tag{501}$$

Zusammenfassung Schleifendiagramme:

- Selbstwechselwirkung von Teilchen über das Vakuum
- Grund für das Verschieben des Pols in G_2 verglichen mit Δ_F
- Grund für das Auftreten der Feldrenormierung $\sqrt{Z}$
- Erzeugt laufende Kopplung, $\lambda = \lambda(p)$!
  $\Rightarrow$ Generische Vorhersage der QFT, experimentell nachweisbar
- Praktische Durchführung aufwendig: Regularisierung+Renormierung $\Rightarrow$ QFT2

Im Folgenden nur Baumgraphen: $Z = 1, \lambda = \lambda_0, m = m_0$

8 Quantenelektrodynamik (QED)

8.1 QED als lokale $U(1)$ Eichtheorie

Betrachte freie Elektronen und Positronen

Freies Diracfeld: $\mathscr{L}_0 = \bar{\psi}(x)\,(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi(x)$

Globale $U(1)$ Phasentransformation: $\psi'(x) = e^{-i\alpha q}\,\psi(x)$, $\alpha \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow$ $\mathscr{L}_0$ invariant

$U(N)$: Gruppe der unitären $N \times N$ Matrizen, $UU^\dagger = 1 = U^\dagger U$

$$\begin{aligned} \text{Invarianz von } \mathscr{L}_0 \;&\Rightarrow\; \text{Noetherstrom} \quad j^\mu = q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \\ &\Rightarrow\; \text{erhaltene Ladung} \quad Q = \int d^3x\, j^0(x) \end{aligned}$$

Identifiziere mit elektrischer Ladung

Kann die Invarianz auf lokale Phasentransformationen ausgedehnt werden?

$$\psi' = e^{-iq\alpha(x)}\,\psi(x) \quad \alpha(x) \in \mathbb{R} \tag{502}$$

$$\partial_\mu\psi'(x) = e^{-iq\alpha(x)}\,\partial_\mu\psi(x) - iq\partial_\mu\alpha(x)\,e^{iq\alpha(x)}\,\psi(x) \neq e^{-iq\alpha(x)}\,\partial_\mu\psi(x) \tag{503}$$

$$\Rightarrow\; m\bar{\psi}'(x)\,\psi'(x) \;\text{ invariant, aber}$$

$$i\bar{\psi}'(x)\,\gamma^\mu\partial_\mu\,\psi'(x) = i\bar{\psi}(x)\,\gamma^\mu\,\partial_\mu\,\psi(x) + q\bar{\psi}(x)\,\gamma^\mu\,\partial_\mu\,\alpha(x)\,\psi(x)$$

$\Rightarrow$ $\mathscr{L}_0$ nicht invariant unter lokalen Trafos:

$$\mathscr{L}_0' = \mathscr{L}_0 + q\bar{\psi}\,\gamma^\mu\,\psi\,\partial_\mu\,\alpha(x) \tag{504}$$

Bisher noch ohne Photonen $\Rightarrow$ An Maxwellfeld koppeln

Lorentzinvariante Wechselwirkung: $\mathscr{L}_{\text{int}} = -j^\mu A_\mu$

$$\begin{aligned} \mathscr{L} &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - j^\mu A_\mu \\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - q\,\bar{\psi}\,\gamma^\mu\,\psi A_\mu \end{aligned}$$

$$\mathscr{L} = \bar{\psi}\Big(i\gamma^\mu\left[\partial_\mu + iqA_\mu\right] - m\Big)\psi \tag{505}$$

Transformationsgesetz:

$$\psi'(x) = e^{-i\alpha(x)q}\,\psi(x) \tag{506}$$

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x) \tag{507}$$

$$\Rightarrow \mathscr{L}' = \mathscr{L} + q\bar{\psi}\,\gamma^\mu\,\psi\,\partial_\mu\alpha - q\bar{\psi}\,\gamma^\mu\,\psi\,\partial_\mu\alpha = \mathscr{L} \tag{508}$$

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_{\text{int}} \quad \text{invariant unter lokalen } U(1) \text{ Trafos!} \tag{509}$$

<u>Def.</u> kovariante Ableitung $\quad D_\mu \equiv \partial_\mu + iqA_\mu(x)$

$$\Rightarrow \mathscr{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\,D_\mu - m)\psi \tag{510}$$

Transformationsgesetz für kovariante Ableitung:

$$\begin{aligned}
(D_\mu\psi)'(x) = D'_\mu\psi'(x) &= (\partial_\mu + iqA'_\mu)\psi'(x) \\
&= (\partial_\mu + iqA_\mu + iq\partial_\mu\alpha)\,e^{-iq\alpha(x)}\,\psi(x) \\
&= e^{-iq\alpha(x)}(\partial_\mu + iqA_\mu)\,\psi(x) = e^{-iq\alpha(x)}\,D_\mu\psi(x) \\
\Rightarrow\ (D_\mu\psi)' &= e^{-iq\alpha(x)}\,D_\mu\psi \qquad (511)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Invarianz von $\mathscr{L}$ manifest

Vektorfeld bisher ohne Dynamik (entsprechend einem äußeren Feld), übernehmen aus Maxwelltheorie:

$$\mathscr{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x), \quad F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \tag{512}$$

Zusammenhang zwischen kovarianter Ableitung und Feldstärketensor:

$$\begin{aligned}
\Big[D_\mu, D_\nu\Big]f(x) &= (D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)f(x) \\
&= \Big[(\partial_\mu + iqA_\mu)(\partial_\nu + iqA_\nu) - (\partial_\nu + iqA_\nu)(\partial_\mu + iqA_\mu)\Big]f(x) \\
&= \Big[\partial_\mu\partial_\nu + iq(A_\mu\partial_\nu + \partial_\mu A_\nu + A_\nu\partial_\mu) - q^2A_\mu A_\nu \\
&\quad -\partial_\nu\partial_\mu - iq(A_\nu\partial_\mu + \partial_\nu A_\mu + A_\mu\partial_\nu) + q^2A_\nu A_\mu\Big]f(x) \\
&= iq(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)f(x) \qquad (513)
\end{aligned}$$

Identifiziere

$$[D_\mu, D_\nu] = iqF_{\mu\nu} \tag{514}$$

Insgesamt Theorie für Photonen, Elektronen und Positronen:

$$\boxed{\mathscr{L}_{\mathrm{QED}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \qquad (515)}$$

Beachte Auswirkungen der Symmetrien:

- globale $U(1) \Longleftrightarrow$ Noetherstrom j^μ
- lokale $U(1) \Longleftrightarrow j^\mu$ koppelt an A^μ
- Photon masselos, da ein Term $m^2 A^\mu A_\mu$ nicht eichinvariant ist
- Kein Vertex für Photonwechselwirkung aus demselben Grund
- Form der Photon-Elektron-Wechselwirkung durch Lorentz- und Eichinvarianz festgelegt

8.2 Der Elektronpropagator

Modifikation wg. Antivertauschung:

$$T\big(\psi_\alpha(x)\,\bar{\psi}_\beta(y)\big) = \Theta(x^0 - y^0)\,\psi_\alpha(x)\,\bar{\psi}_\beta(y) - \Theta(y^0 - x^0)\,\bar{\psi}_\beta(y)\,\psi_\alpha(x) \tag{516}$$

Damit Anwendung Wick'sches Theorem auch für Fermionfelder;

Def. Feynmanpropagator als Zweipunktfunktion der freien Theorie im WW-Bild:

$$S_{F_{\alpha\beta}}(x-y) \equiv \langle 0| T\big(\psi_{I;\alpha}(x)\bar{\psi}_{I;\beta}(y)\big)|0\rangle \tag{517}$$

Greenfunktion zur Diracgleichung

$$(i\not{\partial} - m) S_F(x-y) = +i\,\delta^4(x-y) \tag{518}$$

Wechsel in den Impulsraum und ausschreiben Deltafunktion

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} (\not{p} - m)\,\tilde{S}_F(p)\,e^{-ip(x-y)} &= +i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,e^{-ip(x-y)} \\ \Rightarrow\ (\not{p} - m)\,\tilde{S}_F(p) &= +i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\not{p} + m)(\not{p} - m)\,\tilde{S}_F(p) &= +i(\not{p} + m) \\ \tilde{S}(p) &= i\,\frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} = \frac{i}{(\not{p} - m)} \end{aligned}$$

$$S_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\frac{i}{(\not{p} + m)}\,e^{-ip(x-y)} \tag{519}$$

Beschreibt Bewegung eines freien Fermions oder Antifermions

$$S_F(x,y) = \qquad x \longrightarrow y \tag{520}$$

8.3 Der Photonpropagator

$$T\big(A^\mu(x)\,A^\nu(y)\big) = \Theta(x^0 - y^0) A^\mu(x)\,A^\nu(y) + \Theta(y^0 - x^0)\,A^\nu(y)\,A^\mu(x)$$

Def. Feynmanpropagator für das Photon

$$D_F^{\mu\nu}(x,y) = \langle 0 | T\big(A_I^\mu(x)\,A_I^\nu(y)\big) | 0 \rangle \tag{521}$$

“Automatisierung” der Lorenzeichbedingung:

$$\mathscr{L}_A = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2 \tag{522}$$

Analog Zwangsbedingung in klass. Mechanik mit Lagrangemultiplikator $(2\xi)^{-1}$;
Variation nach $(2\xi)^{-1}$ ergibt $\partial_\mu A^\mu = 0$; Wert für ξ beliebig

$\Rightarrow$ Greenfunktion zum Maxwelloperator in Lorenzeichung

$$\left(\partial^\sigma \partial_\sigma g^\mu_\rho - \frac{\xi - 1}{\xi} \partial^\mu \partial_\rho \right) D_F^{\rho\nu}(x,y) = i g^{\mu\nu} \delta(x-y) \tag{523}$$

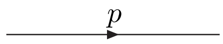
Impulsraum

$$D_F^{\mu\nu}(x,y) \quad = \quad \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \, \frac{-i}{p^2 + i\varepsilon} \left(g^{\mu\nu} + (\xi - 1)\, \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right) e^{-ip(x-y)} \tag{524}$$

Reelles Feld, Teilchen und Antiteilchen identisch

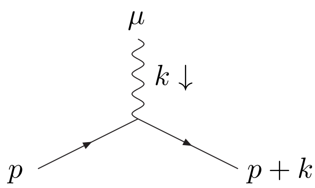
$D_F^{\mu\nu}(x,y) =$ x  y (525)

8.4 Feynmanregeln für die QED im Impulsraum



$$\frac{i}{\not{p} - m} \tag{526}$$

$$\frac{-i}{p^2 + i\varepsilon}\left(g^{\mu\nu} + (\xi - 1)\frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right) \tag{527}$$



$$-i\, e\, \gamma^\mu \tag{528}$$

$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$ für jeden freien inneren Impuls

(-1) für jede geschlossene Fermionschleife

(-1) zwischen Graphen, die durch Vertauschung von Fermionlinien auseinander hervorgehen

Für die äußeren Beine zusätzliche Faktoren wg. mehrkomponentigen Spinor- bzw. Vektorfeldern :

$u(p)\big(v(p)\big)$	für Fermionen (Antifermionen), die mit Impuls p einlaufen
$\bar{u}(p)\big(\bar{v}(p)\big)$	für auslaufende Fermionen (Antifermionen)
$\epsilon^\mu_\lambda(\mathbf{p})\big(\epsilon^{\nu *}_\lambda(\mathbf{p})\big)$	für einlaufende (auslaufende) Vektorbosonen

8.5 Elektron-Myon-Streuung

Die geladenen Leptonen:

$$\begin{aligned} m_e &= 0,511 \text{ MeV} \\ m_\mu &= 105,66 \text{ MeV} \\ m_\tau &= 1776,8 \text{ MeV} \end{aligned}$$

μ, τ instabil ($10^{-6}, 10^{-9}$s), z.B.

$$\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \tag{529}$$

Schwache WW (aufgrund "langer" Lebensdauer, Neutrinos)
In QED-Prozessen ist μ in guter Näherung stabil

Nicht beobachtet: $\mu^- \to e^- + \gamma \quad \Rightarrow$ erhaltene Leptonzahl für jede Leptonsorte
Nicht beobachtet: $p \to e^+ \gamma \quad \Rightarrow$ erhaltene Leptonzahl und Baryonzahl

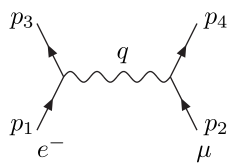
QED für $e^\pm, \mu^\pm$:

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \sum_{l=e,\mu} \bar{\psi}_l \left(i\gamma^\mu D_\mu - m_l\right) \psi_l \tag{530}$$

Betrachte Elektron-Myon-Streuung

$$e^- + \mu^- \to e^- + \mu^- \tag{531}$$

Zu führender Ordnung Störungstheorie:



Viererimpulsübertrag zwischen Teilchen:

$$q^2 = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 = t \tag{532}$$

Reaktion "im t-Kanal"

Auswertung Feynmandiagramm: Fermionlinien rückwärts abarbeiten

$\bar{u}_{s_3}(p_3)(-ie\gamma^\mu)\, u_{s_1}(p_1)$ Elektronstrom; $\quad \bar{u}_{s_4}(p_4)\,(-ie\gamma^\nu)\, u_{s_2}(p_2)$ Myonstrom

Rechnung vereinfacht in Feynmaneichung: $\xi = 1$

$$iM_{fi} = \bar{u}_{s_3}(p_3)(-ie\gamma^\mu)\, u_{s_1}(p_1) \quad \tfrac{-i\, g_{\mu\nu}}{q^2+i\varepsilon} \quad \bar{u}_{s_4}(p_4)\,(-ie\gamma^\nu)\, u_{s_2}(p_2) \tag{533}$$

Beachte Lorentzinvarianz!

Für das Betragsquadrat benötigen wir:

$$\begin{aligned} & \left[\bar{u}(p_3)\,\gamma^\mu\, u(p_1)\right]^* = \left[\bar{u}(p_3)\,\gamma^\mu\, u(p_1)\right]^\dagger = \left[u^\dagger(p_3)\,\gamma^0\gamma^\mu\, u(p_1)\right]^\dagger \\ = \; & \left[u^\dagger(p_1)\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0\, u(p_3)\right] = \bar{u}(p_1)\,\gamma^\mu\, u(p_3)\,, \quad \text{mit} \;\; \gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 = \gamma^\mu \end{aligned} \tag{534}$$

Def. Leptontensoren:

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu}(e) &= \bar{u}(p_3)\,\gamma^\mu\, u(p_1)\,\bar{u}(p_1)\,\gamma^\nu\, u(p_3) \\ L^{\mu\nu}(\mu) &= \bar{u}(p_4)\,\gamma^\mu\, u(p_2)\,\bar{u}(p_2)\,\gamma^\nu\, u(p_4) \end{aligned} \tag{535}$$

$$|iM_{fi}|^2 = \frac{e^4}{q^4}\, L_{\mu\nu}(e)\, L^{\mu\nu}(\mu) \tag{536}$$

Unpolarisierte Teilchenstrahlen, keine Beobachtung der Polarisation:
Mitteln über Anfangs- und Summieren über Endzustandspins

$$\overline{|M_{fi}|^2} \equiv \frac{1}{4}\sum_{s_1,s_2}\sum_{s_3,s_4} |M_{fi}|^2 \tag{537}$$

Vollständigkeitsrelationen:

$$\begin{aligned} \sum_{s_1,s_3} L^{\mu\nu}(e) &= \sum_{s_1,s_3} \bar{u}_{s_3}(p_3)\,\gamma^\mu\, \underbrace{u_{s_1}(p_1)\,\bar{u}_{s_1}(p_1)}_{\not{p_1}+m_e}\,\gamma^\nu\, u(p_3) \\ &= \Big(\gamma^\mu(\not{p_1}+m_e)\gamma^\nu\Big)_{\alpha\beta}(\not{p_3}+m_e)_{\beta\alpha} \\ &= \mathrm{Tr}\Big(\gamma^\mu(\not{p_1}+m_e)\gamma^\nu(\not{p_3}+m_e\Big) \end{aligned} \tag{538}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{4}\sum_{s_1,s_3}\sum_{s_2,s_4} |M_{fi}|^2 &= \frac{e^4}{4q^4}\,\mathrm{Tr}\Big(\gamma^\mu(\not{p_1}+m_e)\gamma^\nu(\not{p_3}+m_e)\Big) \\ &\quad \times \mathrm{Tr}\Big(\gamma_\mu(\not{p_2}+m_\mu)\gamma_\nu(\not{p_4}+m_\mu)\Big) \end{aligned} \tag{539}$$

Sätze über Spuren:

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{1}) = 4 \tag{540}$$

$$\mathrm{Tr}(\gamma^{\mu_1}\ldots\gamma^{\mu_n}) = 0 \quad \text{für } n \text{ ungerade} \tag{541}$$

$$\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}) = 4ab = 4a_\mu b^\mu \tag{542}$$

$$\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}\not{c}\not{d}) = 4(ab)(cd) + 4(ad)(bc) - 4(ac)(bd) \tag{543}$$

Elektronfaktor:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\Big(\gamma^\mu(\not{p_1}+m_e)\gamma^\nu(\not{p_3}+m_e)\Big) &= \mathrm{Tr}(\gamma^\mu\not{p_1}\gamma^\nu\not{p_3}) + m_e^2\,\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) \\
&= 4\Big(p_1^\mu p_3^\nu + p_3^\mu p_1^\nu - g^{\mu\nu}(p_1\cdot p_3)\Big) + m_e^2\,4g^{\mu\nu} \\
&= 4\Big(p_1^\mu p_3^\nu + p_3^\mu p_1^\nu + \frac{q^2}{2}\,g^{\mu\nu}\Big) \qquad (544)\\
\text{mit } q^2 &= (p_1-p_3)^2 = 2m_e^2 - 2(p_1\cdot p_3) \qquad (545)
\end{aligned}$$

Myonfaktor:

$$\mathrm{Tr}\Big(\gamma^\mu(\not{p_2}+m_\mu)\gamma^\nu(\not{p_4}+m_\mu)\Big) = 4\Big(p_2^\mu\,p_4^\nu + p_4^\mu\,p_2^\nu + \frac{q^2}{2}\,g^{\mu\nu}) \qquad (546)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\quad \overline{|M_{fi}|^2} = \frac{1}{4}\,\frac{e^4}{q^4}\quad & 16\Big[2(p_1\cdot p_2)(p_3\cdot p_4) + 2(p_1\cdot p_4)(p_2\cdot p_3) \\
& +q^2\Big(q^2 + (p_1\cdot p_3) + (p_2\cdot p_4)\Big)\Big] \qquad (547)
\end{aligned}$$

Auswertung im Schwerpunktsystem:

$$\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}, \quad \mathbf{p}_3 = -\mathbf{p}_4 = \mathbf{p}' \qquad (548)$$

Betrachte Hochenergielimes $|\mathbf{p}_{1,2}| \gg m_{e,\mu}$, d.h. $E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E$
Damit

$$\begin{aligned}
(p_1\cdot p_2) = (p_3\cdot p_4) &= E_1E_2 + \mathbf{p}^2 = 2E^2 \qquad (549)\\
(p_1\cdot p_4) = (p_2\cdot p_3) &= E_1E_4 + \mathbf{p}\cdot\mathbf{p}' = E^2(1+\cos\theta) \\
&= 2E^2\cos^2\frac{\theta}{2} \qquad (550)\\
q^2 = -2(p_1\cdot p_3) = -2((p_2\cdot p_4) &= -2(E_1E_3 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{p}') = -2E^2(1-\cos\theta) \\
&= -4E^2\sin^2\frac{\theta}{2}\,. \qquad (551)
\end{aligned}$$

Im Schwerpunktsystem gilt für $2\to 2$ mit Massen Null:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(8\pi)^2}\,\frac{1}{s}\,|M_{fi}|^2 \qquad (552)$$

Damit erhalten wir insgesamt:

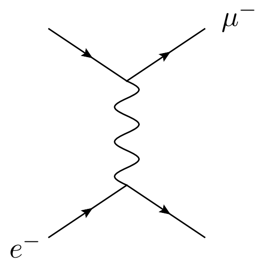
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{2s}\,\frac{1+\cos^4\frac{\theta}{2}}{\sin^4\frac{\theta}{2}} \qquad (553)$$

mit der Feinstrukturkonstanten

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi} \qquad (554)$$

8.6 Myonpaarerzeugung in Elektron-Positron-Streuung

$$e^+ + e^- \longrightarrow \mu^+ + \mu^- \tag{555}$$



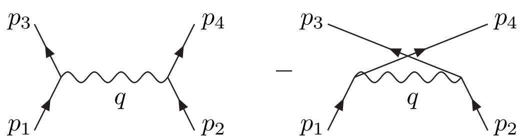
Wenige Modifikationen gegenüber der vorigen Rechnung, Übung

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{\alpha^2}{4s}(1+\cos^2\theta) \\ \sigma &= \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \end{aligned} \tag{556}$$

8.7 Elektron-Elektron-Streuung

$$e^- + e^- \longrightarrow e^- + e^- \tag{557}$$

Ersetze Myonlinie aus Kap. 8.5 durch Elektronlinie, plus 2. Diagramm



QM: Teilchenpfade nicht unterscheidbar! Pauliprinzip $\Rightarrow$ relatives Minuszeichen

$$iM_1 = \tfrac{ie^2}{t}\,\bar{u}(p_3)\,\gamma^\mu\,u(p_1)\,\bar{u}(p_4)\,\gamma_\mu\,u(p_2)\ , \tag{558}$$

$$iM_2 = -\tfrac{ie^2}{u}\,\bar{u}(p_4)\,\gamma^\mu\,u(p_1)\,\bar{u}(p_3)\,\gamma_\mu\,u(p_2)\ , \tag{559}$$

mit den Mandelstamvariablen $t = (p_1 - p_3)^2$ und $u = (p_1 - p_4)^2$

Beachte QM: Amplituden addiert, dann Betragsquadrat für Übergangswahrscheinlichkeit $\Rightarrow$ Interferenzterm

$$|M_{fi}|^2 = |M_1 + M_2|^2 = |M_1|^2 + |M_2|^2 + 2\mathrm{Re}\,M_1^* M_2 \tag{560}$$

Rechnung als Übung, Ergebnis mit $m_e \simeq 0$:

$$\frac{1}{4}\sum_{s_1,\ldots,s_4}|M_{fi}|^2 = 2e^4\left(\frac{s^2+u^2}{t^2}+\frac{s^2+t^2}{u^2}+\frac{2s^2}{tu}\right) \tag{561}$$

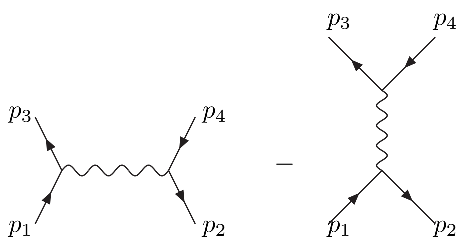
Beachte Beiträge im t-Kanal, im u-Kanal sowie Interferenzterm

Vergleich mit dem Experiment, detailliertes Studium von Quanteneffekten möglich!

8.8 Elektron-Positron-Streuung

$$e^- + e^+ \longrightarrow e^- + e^+ \tag{562}$$

Ersetze Myonlinie aus Kap. 8.5 durch Positronlinie, plus 2. Diagramm



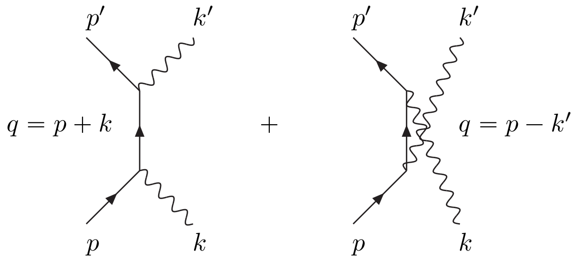
In n-Punktfunktionen kein Unterschied zwischen ein- und auslaufenden Teilchen
$\Rightarrow$ zweites Diagramm durch Vertauschung der ununterscheidbaren „auslaufenden Elektronen“ $p_3 \longleftrightarrow -p_2$

Diagrammpaar direkt aus Elektron-Elektron-Streuung durch $p_2 \longleftrightarrow p_4, \quad s \longleftrightarrow u$

$$\frac{1}{4}\sum_{s_1,\ldots,s_4}|M_{fi}|^2 = 2e^4\left(\frac{s^2+u^2}{t^2}+\frac{u^2+t^2}{s^2}+\frac{2u^2}{ts}\right) \tag{563}$$

8.8 Comptonstreuung

$$e^- + \gamma \longrightarrow e^- + \gamma \tag{564}$$



Hier treten Polarisationsvektoren der Photonen auf

$$M_{fi} = M_{\alpha\beta}(k, k', \ldots)\epsilon_\lambda^\alpha(k)\epsilon_{\lambda'}^{\beta*}(k') \ . \tag{565}$$

Bei Spinmittelung

$$\sum_{\lambda=1}^{2} \epsilon_\lambda^{\mu*}(k)\epsilon_\lambda^\nu(k) = -\left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right) \tag{566}$$

Auswirkung der Eichsymmetrie: Stromerhaltung, im Impulsraum

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_\mu j^\mu(k) = 0 \ . \tag{567}$$

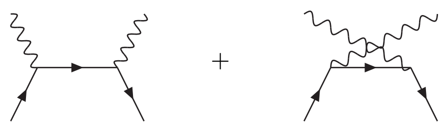
Konsequenz: wegen $M_{\alpha\beta}(k, k' \ldots) \sim j_\alpha(k) j_\beta(k)$ ist beim Ausführen der Polarisationssumme $k^\alpha M_{\alpha\beta} = k^\beta M_{\alpha\beta} = 0$.

8.9 Paarvernichtung

Achtung, $e^+ + e^- \to \gamma$ kinematisch verboten!

$$e^+ + e^- \ \to \gamma + \gamma \tag{568}$$

Diagramme aus Comptonstreuung durch Vertauschung der Impulsargumente



Zusätzliche Photonen im Endzustand ebenso möglich, diese Prozesse sind aber durch einen jeweils zusätzlichen Faktor α unterdrückt

9 Abelsche und nichtabelsche Eichtheorien

9.1 Globale und lokale $SU(N)$-Symmetrie

Betrachte komplexes Skalarfeld

$$\mathscr{L}_0 = \partial_\mu \phi^*(x) \partial^\mu \phi(x) - m^2 \phi^*(x)\phi(x) \tag{569}$$

Globale $U(1)$-Symmetrie $\Rightarrow$ Ausdehnung auf lokale Symmetrie wie bei Fermionen

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu \tag{570}$$

$\Rightarrow$ Kopplung an elektromagnetisches Feld, beschreibt geladene Spin-0-Teilchen in WW mit äußerem Feld

Erweiterung der Symmterie: Mehrkomponentiges komplexes Skalarfeld

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_N(x) \end{pmatrix} \tag{571}$$

Skalarprodukt:

$$\phi^\dagger(x)\phi(x) = \sum_{i=1}^{N} \phi_i^*(x)\phi_i(x) \tag{572}$$

Theorie für N komplexe Skalarfelder gleicher Masse

$$\mathscr{L}_0 = \partial_\mu \phi^\dagger(x) \partial^\mu \phi(x) - m^2 \phi^\dagger(x)\phi(x) \tag{573}$$

Invarianz unter Phasentrafos und unter Rotationen in den Feldkomponenten:

$$\phi'(x) = U\phi(x), \quad U \in SU(N) \tag{574}$$

mit speziell (Determinante 1) unitären $N \times N$ Matrizen U, denn

$$\phi'^\dagger(x)\phi'(x) = \phi^\dagger(x)\phi(x) \tag{575}$$

$$\partial_\mu \phi'^\dagger(x)\partial^\mu \phi'(x) = \partial_\mu \phi^\dagger(x)\partial^\mu \phi(x) \tag{576}$$

Eigenschaften $SU(N)$ Matrizen:

$$UU^\dagger = U^\dagger U = 1 \tag{577}$$

Darstellung mit Exponentialfunktion $U = e^{iA}$, $\quad \Rightarrow A = A^\dagger$

$$1 = \det(e^{iA}) = e^{i\mathrm{Tr}A}, \quad \Rightarrow \mathrm{Tr}A = 0 \tag{578}$$

Es gibt $N^2 - 1$ lin. unabh. $(N \times N)$-Matrizen mit Spur 0

$$\Rightarrow \text{Parametrisierung} \quad U = e^{-i\theta^a T^a}, \quad a = 1, \dots, N^2 - 1 \tag{579}$$

T^a Erzeugermatrizen, θ^a Parameter; die Erzeuger erfüllen die Lie-Algebra

$$[T^a, T^b] = i f_{abc} T^c \tag{580}$$

Die f_{abc} heißen Strukturkonstanten

$$\begin{array}{ll} SU(2): & T^a = \sigma^a \quad \text{Paulimatrizen}, f_{abc} = \varepsilon_{abc} \\ SU(3): & T^a = \lambda^a \quad \text{Gell-Mann-Matrizen} \end{array} \tag{581}$$

Noetherströme zur Invarianz unter globalen $SU(N)$-Trafos:

$$j_a^\mu(x) = i\phi^\dagger(x) T^a \partial^\mu \phi(x), \qquad a = 1, \dots, N^2 - 1 \tag{582}$$

Wieder Versuch Ausdehnung auf lokale Symmetrietransformationen

$$U(x) = e^{-i\theta^a(x) T^a} \in SU(N) \tag{583}$$

$\mathscr{L}' \neq \mathscr{L}$ denn

$$\begin{aligned} \partial_\mu \phi'(x) &= U(x)\partial_\mu \phi(x) + (\partial_\mu U(x))\phi(x) \\ &= U(x)\partial_\mu \phi(x) - i\partial_\mu \theta^a(x) T^a U \phi(x) \end{aligned} \tag{584}$$

Def. Kovariante Ableitung in Analogie zur QED:

$$D_\mu \phi(x) \equiv \partial_\mu \phi(x) - igT^a A_\mu^a(x)\phi(x) \tag{585}$$

$N^2 - 1$ Vektorfelder, g Kopplung analog e in der QED

Achtung Notation: $A_\mu(x) = T^a A_\mu^a(x)$ matrixwertiges Feld!

Wie muss A_μ transformieren, damit D_μ eine kovariante Ableitung ist?

$$\begin{aligned} D'_\mu \phi'(x) &\stackrel{!}{=} U(x) D_\mu \phi(x)\,, \\ (\partial_\mu - igA'_\mu(x))U(x)\phi(x) &= U(x)(\partial_\mu - igA_\mu(x))U^{-1}(x)U(x)\phi(x) \end{aligned} \tag{586}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A'_\mu(x) &= U(x)A_\mu(x)U^{-1}(x) + \frac{i}{g}U(x)\partial_\mu U^{-1}(x) \\ &= \frac{i}{g} U D_\mu U^{-1} \end{aligned} \tag{587}$$

Damit Theorie für N komplexe Skalarfelder, N^2-1 Vektorfelder $A_\mu^a(x)$

$$\mathscr{L} = D_\mu\phi^\dagger(x)D^\mu\phi(x) - m^2\phi^\dagger(x)\phi(x) \tag{588}$$

Invariant unter der kombinierten lokalen Eichtransformation

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= U(x)\phi(x) \,, \\ A'_\mu(x) &= U(x)A_\mu(x)U^{-1}(x) + \frac{i}{g}U(x)\partial_\mu U^{-1}(x) \,. \end{aligned} \tag{589}$$

Symmetrieeigenschaften bestimmen Form der Wechselwirkung!

Spezialfall $U(1)$: $T^a \to q$, $\theta^a \to \alpha$

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= e^{-iq\alpha(x)}A_\mu(x)e^{iq\alpha(x)} - \frac{i}{q}e^{-iq\alpha(x)}\partial_\mu e^{iq\alpha(x)} \\ &= A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x) \end{aligned} \tag{590}$$

Für infinitesimale Eichtransformationen mit $\theta^a \ll 1$:

$$\begin{aligned} U(x) &= 1 - i\theta^a(x)T^a + \dots \\ \phi'(x) &= \phi(x) - i\theta^a(x)T^a\phi(x) \\ A'_\mu(x) &= A_\mu(x) - i\theta^a(x)[T^a, A_\mu(x)] - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a(x)T^a \\ A_\mu^{a'}(x) &= A_\mu^a(x) + f_{abc}\theta^b(x)A_\mu^c(x) - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a(x) \end{aligned} \tag{591}$$

Bisher $A_\mu^a(x)$ ohne Dynamik: kinetischer Term analog Maxwelltheorie (Yang und Mills 1954)

$$\text{Def.:} \quad F^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{g}[D^\mu, D^\nu] \tag{592}$$

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}(x) &= \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) - ig[A_\mu(x), A_\nu(x)] \\ &= \partial_\mu A_\nu^a(x)T^a - \partial_\nu A_\mu^a(x)T^a + gf_{abc}A_\mu^b(x)A_\nu^c(x)T^a \\ &= F_{\mu\nu}^a(x)T^a \,, \quad a = 1,\dots,N^2-1 \end{aligned} \tag{593}$$

Verhalten unter Eichtransformationen:

$$F'_{\mu\nu} = U(x)F_{\mu\nu}(x)U^{-1}(x) \qquad \text{(adjungierte Darstellung)} \tag{594}$$

Beachte Unterschied zu $U(1)$-Eichfeld, Feldstärken *nicht* invariant, d.h. unphysikalisch!

Damit Konstruktion Yang-Mills-Theorie oder Reine Eichtheorie:

$$\boxed{\mathscr{L}_{YM} = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \qquad (595)}$$

- YM-Theorie beschreibt $N^2 - 1$ Vektorbosonen mit Spin 1
- Enthält Terme mit 3 und 4 Vektorfeldern $\Rightarrow$ Selbstwechselwirkung!
- Kein quadratischer Term (Eichinvarianz!), $\Rightarrow$ Vektorbosonen masselos

$SU(N)$-Eichtheorie mit skalaren geladenen Teilchen:

$$\mathscr{L} = D_\mu \phi^\dagger(x) D^\mu \phi(x) - m^2 \phi^\dagger(x)\phi(x) - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \tag{596}$$

N skalare Teilchen (plus Antiteilchen) gekoppelt an $N^2 - 1$ Eichbosonen;
analog ebenso mit Fermionen möglich

Klassische Feldgleichungen:

$$\begin{aligned} (D_\mu D^\mu - m^2)\phi(x) &= 0 && (597)\\ \partial_\mu F^{\mu\nu} - ig[A_\mu, F^{\mu\nu}] &= j^\nu\,, \quad j_\mu(x) = j_\mu^a(x) T^a && (598)\\ \text{bzw.}\quad [D_\mu, F^{\mu\nu}] &= j^\nu \end{aligned}$$

$F^{\mu\nu}$ antisymmetrisch, d.h.

$$[D^\rho, F^{\mu\nu}] + [D^\nu, F^{\rho\mu}] + [D^\mu, F^{\nu\rho}] = 0 \tag{599}$$

9.2 Spontane Brechung einer globalen Symmetrie

Verbreitetes Phänomen in kondensierter Materie und Teilchenphysik

Beispiel: betrachte komplexes Skalarfeld

$$\mathscr{L} = \partial_\mu \phi^*(x) \partial^\mu \phi(x) - V(\phi) \tag{600}$$

Potenzial:

$$V(\phi) = m^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2, \quad \lambda > 0 \tag{601}$$

Globale $U(1)$-Symmetrie:

$$\phi'(x) = e^{-i\alpha} \phi(x) \tag{602}$$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2), \quad \phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R} \tag{603}$$

$$V(\phi) = \frac{m^2}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 \tag{604}$$

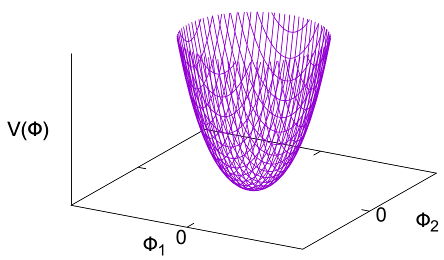
Bedingung für Extrema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \phi_1} &= \phi_1 m^2 + \lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2)\phi_1 = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \phi_2} &= \phi_2 m^2 + \lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2)\phi_2 = 0 \end{aligned} \tag{605}$$

$\phi_1 = \phi_2 = 0$ ist Extremum der potenziellen Energie

1. $m^2 > 0$:

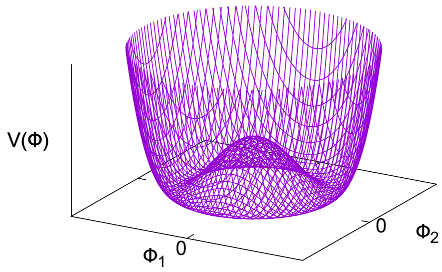
$\phi = 0$ Minimum, $\Rightarrow \langle 0|\phi(x)|0\rangle = 0$



2. $m^2 < 0$:

$\phi = 0$ lokales Maximum; entartete Mimima:

$$|\phi|^2 = \frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) = \frac{-m^2}{2\lambda} \equiv \frac{v^2}{2}, \Rightarrow \langle\Omega||\phi||\Omega\rangle = \frac{v}{\sqrt{2}} \tag{606}$$



$m^2 < 0$: Interpretation als Masse nicht möglich, dennoch physikalisch sinnvoll

Wähle aus entarteten Minima eines aus (entlang ϕ_1-Achse):

$$\langle 0|\phi_1|0\rangle = v, \quad \langle 0|\phi_2|0\rangle = 0 \tag{607}$$

Fluktuationen um das klassische Minimum:

$$\phi_1'(x) \equiv \phi_1(x) - v \tag{608}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu \phi_1'(x)\partial^\mu \phi_1'(x) + \frac{1}{2}\partial_\mu \phi_2(x)\partial^\mu \phi_2(x) \\ &\quad -\lambda v^2 {\phi_1'}^2(x) - \lambda v\, \phi_1' \left({\phi_1'}^2(x) + \phi_2^2(x)\right) - \frac{\lambda}{4}\left({\phi_1'}^2(x) + \phi_2^2(x)\right)^2\end{aligned} \tag{609}$$

(feldunabhängige Konstante weggelassen)

ϕ_1' massiv mit $m_1^2/2 = \lambda v^2 > 0$, ϕ_2 masselos

Reparametrisierung Skalarfeld in Polardarstellung:

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \rho(x))e^{i\frac{\varphi(x)}{v}} \tag{610}$$

Quantenfluktuationen um das klassische Minimum klein, $\frac{\varphi}{v}, \frac{\rho}{v} \ll 1$

$$\Rightarrow \phi(x) = \frac{v}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{\rho(x)}{v} + i\frac{\varphi(x)}{v} + \dots\right) \tag{611}$$

Identifiziere $\rho = \phi_1', \varphi = \phi_2$

Massives $\rho(x)$ beschreibt radiale Anregungen, V wird erhöht
Masseloses $\varphi(x)$ beschreibt azimuthale Anregungen, V bleibt konstant

Spontane Symmetriebrechung: Potenzial V (und damit $\mathscr{L}$) in *beiden* Fällen rotationssymmetrisch, *nicht* aber der zugehörige Grundzustand!

Verallgemeinerbar auf andere Systeme und Symmetrien:
Bleistift balanciert auf Spitze, Ferromagnetismus, chirale Symmetrie der QCD, ...

Für die Erzeuger T^a einer Symmetrietransformation:

$$[T^a, H] = 0, \qquad \text{aber} \qquad T^a|\Omega\rangle \neq |\Omega\rangle \tag{612}$$

Goldstonetheorem: Die spontane Brechung einer kontinuierlichen, globalen Symmetrie impliziert ein masseloses Feld oder Teilchen, ein sogenanntes „Goldstoneboson“, für jeden spontan gebrochenen Erzeuger einer Symmetrietransformation.

9.3 Abelsches Higgsmodell

Übertragung auf lokale Symmetrien, betrachte skalare $U(1)$-Eichtheorie

$$\mathscr{L} = (D_\mu\phi)^*(x) D^\mu\phi(x) - V(\phi) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x)\ , D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu \tag{613}$$

$U(1)$-Eichtransformationen:

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= e^{-i\alpha(x)q}\phi(x)\ , \\ A'_\mu(x) &= A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x)\ . \end{aligned} \tag{614}$$

$V(\phi)$ unverändert, betrachte $m^2 < 0$ in Polardarstellung

$$\begin{aligned} \mathscr{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu\rho(x)\partial^\mu\rho(x) + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi(x)\partial^\mu\varphi(x) + qvA_\mu(x)\partial^\mu\varphi(x) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x) \\ &\quad -\lambda v^2\rho^2(x) - \lambda v(\rho^3(x) + \rho(x)\varphi^2(x)) - \frac{\lambda}{4}(\rho^2(x) + \varphi^2(x))^2 \\ &\quad +\frac{1}{2}q^2v^2A_\mu(x)A^\mu(x) \end{aligned} \tag{615}$$

⇒ Massenterm für das Eichboson mit $m_A = qv$!

Mischterm $A_\mu\partial_\mu\varphi$ kann durch Wahl einer Eichbedingung eliminiert werden:

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= e^{-i\frac{\varphi(x)}{v}}\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \rho(x)) \\ A'_\mu(x) &= A_\mu(x) + \frac{1}{qv}\partial_\mu\varphi(x) \end{aligned} \tag{616}$$

⇒ unitäre Eichung, in der nur physikalische Freiheitsgrade in $\mathscr{L}$ auftauchen

$$\begin{aligned} \mathscr{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu\rho(x)\partial^\mu\rho(x) - \lambda v^2\rho^2(x) - \lambda v\rho^3(x) - \frac{\lambda}{4}\rho^4(x) \\ &\quad -\frac{1}{4}F'^{\mu\nu}(x)F'_{\mu\nu}(x) + \frac{1}{2}q^2v^2{A'}_\mu(x){A'}^\mu(x) \end{aligned} \tag{617}$$

Aus dem Goldstoneboson wird im Higgsmechanismus einer lokalen Symmetrie ein unphysikalisches, sogenannntes „Would-be-Goldstoneboson“, das “weggeeicht” werden kann

Resultat: Theorie mit einem massiven skalaren Boson (Higgsboson) und einem massiven Photon

Beachte: lediglich Umparametrisierungen, Theorie bleibt insgesamt völlig gleich

Erste Form: komplexes Skalarfeld mit zwei Freiheitsgraden + masseloses Eichfeld mit zwei physikalischen Freiheitsgraden
Letze Form: Higgsfeld mit einem Freiheitsgrad + massives Eichboson mit drei Polarisationszuständen

9.4 Nichtabelsches Higgsmodell

Ausdehnung auf $SU(2)$: Betrachte komplexes skalares Dublett

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad \phi_1, \phi_2 \in \mathbb{C} \tag{618}$$

mit der Lagrangedichte

$$\begin{aligned} \mathscr{L} &= (D_\mu \phi)^\dagger(x) D^\mu \phi(x) - V(\phi) - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \\ V(\phi) &= m^2 \phi^\dagger \phi + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2, \quad D_\mu\phi = (\partial_\mu - igT^a A^a_\mu)\phi \end{aligned} \tag{619}$$

Für $m^2 < 0$:

$$\langle\Omega|\phi^\dagger\phi|\Omega\rangle = \frac{v^2}{2}, \quad v = \sqrt{-\frac{m^2}{\lambda}} \tag{620}$$

Invariant unter Eichtransformationen, im Gegensatz zum Erwartungswert eines einzelnen Skalarfeldes. Wähle Eichung, in der

$$\langle\Omega|\phi|\Omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} . \tag{621}$$

Fluktuationen um Vakuumerwartungswert

$$\bar{\phi} \equiv \phi - \langle\Omega|\phi|\Omega\rangle, \quad \Rightarrow \quad \langle\Omega|\bar{\phi}|\Omega\rangle = 0 \tag{622}$$

Kinetischen Term

$$(D_\mu\phi)^\dagger D^\mu\phi = \left(D_\mu(\bar{\phi} + \langle\Omega|\phi|\Omega\rangle)\right)^\dagger D^\mu(\bar{\phi} + \langle\Omega|\phi|\Omega\rangle) \, , \tag{623}$$

enthält

$$g^2\langle\Omega|\phi|\Omega\rangle^\dagger T^a A^a_\mu T^b A^{b\mu}\langle\Omega|\phi|\Omega\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{gv}{2}\right)^2 A^a_\mu A^{a\mu} \tag{624}$$

d.h., alle Eichfelder $a = 1, 2, 3$ haben eine Masse $m_A = \frac{gv}{2}$

Wieder Polardarstellung

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \rho(x) \end{pmatrix} e^{i \frac{\varphi^a(x)}{v} T^a} \tag{625}$$

mit $\langle 0|\varphi^a|0\rangle = \langle 0|\rho|0\rangle = 0$. Durch die Wahl $\theta^a(x) = \varphi^a(x)/v$ erhalten wir Skalar- und Eichfelder in unitärer Eichung mit der Transformationsmatrix

$$U(x) = e^{-i \frac{\varphi^a(x)}{v} T^a} \tag{626}$$

zu

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= U(x)\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \rho(x) \end{pmatrix} \\ A'_\mu(x) &= U(x)A_\mu(x)U^{-1}(x) - \frac{i}{g}(\partial_\mu U(x))U^{-1}(x) \end{aligned} \tag{627}$$

Lagrangedichte in unitärer Eichung

$$\begin{aligned} \mathscr{L} &= (D_\mu\phi)'^\dagger (D^\mu\phi)' - \frac{m^2}{2}(v+\rho)^2 - \frac{\lambda}{4}(v+\rho)^4 - \frac{1}{4}F'^a_{\mu\nu}F'^{a\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}\partial_\mu\rho\,\partial^\mu\rho + \frac{1}{2}\frac{g^2v^2}{4}\left(1+\frac{\rho}{v}\right)^2 A'^a_\mu A'^{a\mu} - \frac{1}{4}F'^a_{\mu\nu}F'^{a\mu\nu} \\ &\quad -\lambda v^2\rho^2 - \lambda v\rho^3 - \frac{\lambda}{4}\rho^4 \,. \end{aligned} \tag{628}$$

Alle $\varphi^a(x)$ wurden weggeeicht, unphysikalisch;
ein reelles, massives Skalar- oder Higgsfeld ρ mit der Masse $m_H = \sqrt{2\lambda}v$ und drei massive Eichfelder A'^a_μ mit Masse $m_A = gv/2$

10 Phänomenologie der starken Wechselwirkung

Rutherford: Wechselwirkung in Kernphysik verschieden von Atomphysik (QED)

- Stabile Kerne trotz Coulombabstoßung zwischen den Protonen
  $\Rightarrow$ neue, *starke* Wechselwirkung!
- Starke WW ist kurzreichweitig $\lesssim 1$ fm
- Starke WW produziert "Teilchenzoo" der stark wechselwirkenden Teilchen: Hadronen

Kernbausteine: Protonen u. Neutronen mit Spin 1/2

$$\frac{m_n - m_p}{m_n + m_p} \simeq 10^{-3} \tag{629}$$

Kernkräfte ladungsunabhängig:

1.) Gleiche Bindungsenergie pro Nukleon in Kernen für p, n
2.) Streuung: nahezu gleiche Wirkungsquerschnitte für

$$\begin{aligned} p + p &\longrightarrow p + n + \pi^+ \\ &\longrightarrow p + p + \pi^0 \end{aligned}$$

Pionen instabil:

$$\pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu$$

Zerfallsraten *wesentlich* niedriger als Produktionsraten in Nukleonstreuung
$\Rightarrow$ Zerfall durch "schwache" Wechselwirkung
$\Rightarrow$ betrachte Pion als stabil für starke Wechselwirkung

10.1 Der Isospin

Heisenberg: "Isotopenspin"

Analogie: Spin $\frac{1}{2}$ des Elektrons in nichtrel. QM

$$|\uparrow\rangle,\ |\downarrow\rangle \quad \Rightarrow \quad \text{Zweierspinor } \psi = \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} \tag{630}$$

Ohne Magnetfeld: $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$ haben gleiche Energieeigenwerte
$\Rightarrow$ H invariant unter Rotationen, $\psi \to U(\alpha)\psi, \quad U(\alpha) \in SU(2)$

Nukleonen sind Fermionen $\Rightarrow$ Diracspinoren

$$p(x) \equiv \psi_p(x), \quad n(x) \equiv \psi_n(x) \tag{631}$$

Def. Nukleonfeld als Isospin-Dublett analog Spin-Dublett:

$$N(x) \equiv \begin{pmatrix} p(x) \\ n(x) \end{pmatrix} \tag{632}$$

Insgesamt acht Komponenten, aber verschiedene Räume

$$N_{i,\alpha} \ , \qquad i = 1,2, \text{Isospinindex} \quad \alpha = 1,\ldots,4 \ , \text{Diracindex} \tag{633}$$

Proton- bzw. Neutronfeld:

$$N_p(x) = \begin{pmatrix} p(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N_n(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ n(x) \end{pmatrix} \tag{634}$$

Def. Isospinoperator:

$$\mathbf{I} \equiv \underbrace{\hbar}_{=1} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \quad \text{Paulimatrizen} \tag{635}$$

$$\mathbf{I}^2 N_{p,n} = \frac{3}{4} N_{p,n} \tag{636}$$

$$I^3 N_p = +\frac{1}{2} N_p \tag{637}$$

$$I^3 N_n = -\frac{1}{2} N_n \tag{638}$$

$\Rightarrow$ neue Quantenzahlen:

	I	I^3	Q
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
n	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

$\Rightarrow$ Elektrische Ladung:

$$Q = \frac{1}{2} + I_3 \tag{639}$$

Transformation im Isospinraum:

$$N' = U \cdot N$$

$$N'_{i\alpha} = U_{ij} \cdot N_{j\alpha} \tag{640}$$

$$U = e^{-iT^a\theta^a} \in SU(2), \quad a = 1,2,3 \tag{641}$$

d.h. (2×2)-Matrix mit Erzeugern $T^a = \frac{\sigma^a}{2}$

Achtung: $SU(2)$-Rotationen des Spins und $SU(2)$-Isospinrotationen sind völlig unabhängig, unterschiedliche Räume!

Starke WW gleich für $p, n \quad \Rightarrow \quad H_\mathrm{s}$ invariant unter Isospintrafos!

$$\Rightarrow [T^a, H_\mathrm{s}] = 0\ , \quad a = 1,2,3 \tag{642}$$

Elektromagnetische WW bricht die Isospinsymmetrie

$$\Rightarrow [T^a, H_\mathrm{QED}] \neq 0 \tag{643}$$

Natur: Isospinsymmetrie nicht exakt, aber nur schwach gebrochen

$$\text{“}H_\mathrm{QED} \ll H_\mathrm{s}'' \tag{644}$$

Im Sinne von Störungstheorie: Matrixelemente von H_QED klein gegen Matrixelementen von H_s zwischen gleichen Nukleonzuständen

Ausdehnung auf weitere Hadronen: i.A. $I = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$ möglich

Bsp. Pionen:

$$\frac{m_{\pi^\pm} - m_{\pi^0}}{m_{\pi^\pm} + m_{\pi^0}} \simeq 10^{-2} \tag{645}$$

$\Rightarrow$ Isospin-Triplett: (π^+, π^-, π^0)
analog Spin 1 Darstellung (adjungierte D.) der $SU(2) : (j = 1, m = -1, 0, 1)$

$$U_\mathrm{ad}^{ab} = 2\mathrm{Tr}[U^\dagger\, T^a\, U T^b], \quad a, b = 1,2,3 \tag{646}$$

(3×3)-Matrizen; damit Isospinrotation:

$$\phi'^a = U_\mathrm{ad}^{ab}\, \phi^b \tag{647}$$

Ebenso:
$I = \frac{1}{2}$ Dubletts $(K^+, K^0), (\bar{K^0}, K^-)$
$I = 1$ Tripletts $(\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-), (\rho^+, \rho^0, \rho^-)$

10.2 Theorie für Pion-Nukleon-Wechselwirkung

Hier: Beschränkung auf starke WW zwischen Nukleonen und Pionen

Forderungen an Lagrangedichte (aus Experiment):

- Lorentzinvarianz
- Isospininvarianz
- Baryonzahlerhaltung
- Paritätsinvarianz

Freie Diractheorie für p, n erfüllt die Punkte 1,3,4

Konstruiere Isospininvarianten:

$$N^\dagger N = p^\dagger p + n^\dagger n \tag{648}$$

wegen

$$N'^\dagger N' = N^\dagger \underbrace{U^\dagger U}_{=1} N \quad = N^\dagger N \tag{649}$$

Ebenso

$$N^\dagger \gamma^\mu N = p^\dagger \gamma^\mu p + n^\dagger \gamma^\mu n \tag{650}$$

denn

$$N'^\dagger \gamma^\mu N' = N^\dagger \underbrace{U^\dagger \gamma^\mu}_{=\gamma^\mu U^\dagger} UN = N^\dagger \gamma^\mu N \tag{651}$$

Damit Theorie für freie Nukleonen mit $m_N = m_p = m_n$:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{0,pn} &= \bar{N}\Big(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_N\Big)N \\ &= \bar{p}\Big(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_N\Big)p + \bar{n}\Big(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_N\Big)n \end{aligned} \tag{652}$$

Baryonzahl: Invarianz unter

$$N' = e^{-i\alpha B} N \tag{653}$$

Achtung: diese $U(1)$ nicht mit derjenigen aus QED zu verwechseln!
Ladung ist hier Baryonzahl: $B(p) = B(n) = 1$, schreibe auch $U(1)_B$

Pionen Pseudoskalare, d.h. $J = 0, P = -1$
$\Rightarrow$ Klein-Gordon-Felder ϕ^a mit intrinsischer Parität -1

Geladene Pionen $\pi^\pm$ komplexe Skalarfelder, neutrales Pion π^0 reelles Skalarfeld:

$$\pi^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi^1 + i\phi^2), \quad \pi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi^1 - i\phi^2), \quad \pi^0 = \phi^3, \quad \phi^a \in \mathbb{R} \tag{654}$$

Invertieren:

$$\phi^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\pi^+ + \pi^-\right), \quad \phi^2 = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\pi^+ - \pi^-\right) \quad \phi^3 = \pi^0 \tag{655}$$

Beachte: ϕ ist Lorentzskalar aber Isovektor!

Invariante (unter Isospin) durch Skalarproduktbildung:

$$\boldsymbol{\phi}' \cdot \boldsymbol{\phi}' = \phi^a U_{\mathrm{ad}}^{-1\,ab} U_{\mathrm{ad}}^{bc} \phi^c = \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\phi} \tag{656}$$

Lagrangedichte für freie Pionen:

$$\mathscr{L}_{0,\pi} \quad = \quad \frac{1}{2}\partial_\mu \boldsymbol{\phi} \cdot \partial^\mu \boldsymbol{\phi} - \frac{1}{2} m_\pi^2 \, \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\phi} \, . \tag{657}$$

Terme quadratisch in Pseudoskalarfeldern sind gerade unter Parität ✓
Pionen sind Mesonen, d.h. Baryonzahl 0 (Singulett) ✓

Konstruktion Nukleon-Pion-Wechselwirkung:

Offener Index des Pionisotripletts muss kontrahiert werden

$$\bar{N} i \gamma_5 \, T^a N \tag{658}$$

Damit (nicht die einzige Möglichkeit)

$$\mathscr{L}_{\mathrm{int}} = \bar{N} i \gamma_5 T^a N \, \phi^a = \bar{N} i \gamma_5 \boldsymbol{T} N \cdot \boldsymbol{\phi} \tag{659}$$

Theorie der starken Wechselwirkung für Pionen und Nukleonen:

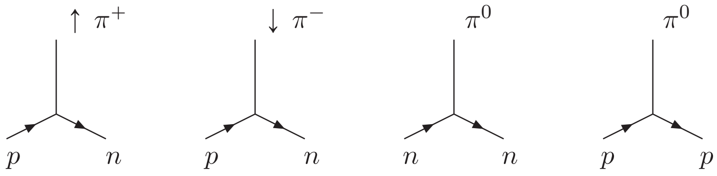
$$\begin{aligned} \mathscr{L} &= \mathscr{L}_{0,pn} + \mathscr{L}_{0,\pi} + \mathscr{L}_{\mathrm{int}} \\ &= \bar{N}\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_N\right) N + \partial_\mu \boldsymbol{\phi} \cdot \partial^\mu \boldsymbol{\phi} - \frac{1}{2} m_\pi^2 \, \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\phi} \\ &\quad + \underbrace{g \, \bar{N} i \gamma_5 \boldsymbol{T} N \boldsymbol{\phi}} \\ &= \frac{ig}{2} \, \bar{N} \gamma_5 \begin{pmatrix} \pi^0 & \sqrt{2}\pi^- \\ \sqrt{2}\pi^+ & -\pi^0 \end{pmatrix} N \\ &= \frac{ig}{2} \left\{ \left(\bar{p}\gamma_5 p - \bar{n}\gamma_5 n\right) \pi^0 + \sqrt{2} \bar{n} \gamma_5 p \pi^- + \sqrt{2} \bar{p} \gamma_5 n \pi^+ \right\} \end{aligned} \tag{660}$$

Quantisierung und Störungstheorie wie bisher

Feynmanregeln

$$\pi: \quad a \;\rule[0.5ex]{4em}{0.4pt}\; b \qquad \frac{i\,\delta_{ab}}{p^2 - m_\pi^2 + i\varepsilon}$$

$$N: \quad a \;\longrightarrow\; b \qquad \frac{i\,\delta_{ab}(\not{p} + m_N)}{p^2 - m_N^2 + i\varepsilon}$$



$i\frac{g}{2}\gamma_5 \quad \times$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	-1	1

10.3 $SU(3)$ Flavour-Symmetrie und Quarkmodell

Höhere Energien $\Rightarrow$ neue Teilchen werden produziert:

Λ, K : Produktionsrate $\gg$ Zerfallsrate

$\Rightarrow$ WW zur Produktion, starke WW

$$p + p \longrightarrow p + \Lambda^0 + K^+ , \tag{661}$$
$$\pi^- + p \longrightarrow \Lambda^0 + K^0 . \tag{662}$$

WW zum Zerfall schwach (Lebensdauer lang), z.B.

$$\Lambda^0 \longrightarrow p + \pi^-,\ n + \pi^0 \tag{663}$$
$$K^0 \longrightarrow \pi^+ + \pi^- \tag{664}$$

Nicht beobachtet:

$$\text{z.B. } \pi^- + p \not\longrightarrow K^- + p \tag{665}$$

Hypothese: neue Quantenzahl "Strangeness" S
in starker WW erhalten, in schwacher WW verletzt

	p	π	K^0	Λ^0
S	0	0	1	-1
B	1	0	0	1

S-Erhaltung in starker WW $\Rightarrow$ $U(1)_S$-Symmetrie!

$$\text{Def. Hyperladung} \quad Y \equiv B + S \tag{666}$$
$$\text{Man beobachtet:} \quad Q = I_3 + \frac{Y}{2} \tag{667}$$

$\Rightarrow$ erweiterte Symmetrie der starken WW:

$$\underset{\text{Isospin}}{\underset{\uparrow}{SU(2)}} \times \underset{S}{\underset{\uparrow}{U(1)}} \quad \subset \quad \underset{\text{Hypothese}}{\underset{\uparrow}{SU(3)}} \tag{668}$$

Versuch Erweiterung von Nukleondublett auf Baryontriplet (p, n, Λ^0)

$$\frac{m_\Lambda - m_p}{m_\Lambda + m_p} \simeq 0.2 , \tag{669}$$

$\Rightarrow$ $SU(3)$ schlechtere Symmetrie als $SU(2)$-Flavour

Unzählige neue hadronische Teilchen bei höheren Energien
$\Rightarrow$ Suche nach gemeinsamer Unterstruktur

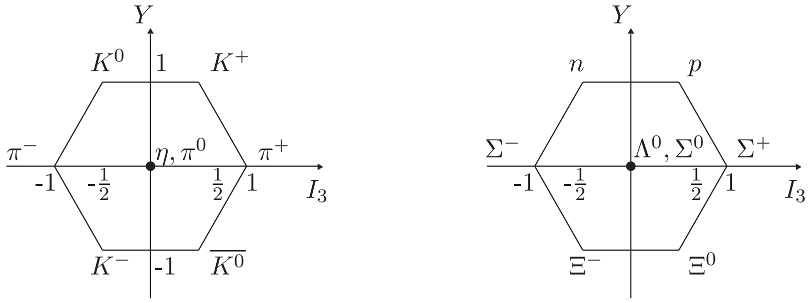


Abbildung 1: Links: Das $J^P = 0^-$ Mesonoktett. Rechts: Das $J^P = \frac{1}{2}^+$ Baryonoktett

Hadronen=Bindungszustände aus p, n, Λ^0?
Zu viele Widersprüche im Massenspektrum

Gell-Mann, Ne'eman 1961

Klassifikation der Mesonen und Baryonen als Multipletts von $SU(3)$-Darstellungen möglich $\rightarrow$ Gruppentheorie $SU(3)$

$J^P = 0^-$ Mesonoktett
$J^P = \frac{1}{2}^+$ Baryonoktett
$J^P = 1^-$ Mesonoktett
$J^P = \frac{3}{2}^+$ Baryondekuplett

Teilchenmultipletts $\stackrel{\wedge}{=}$ höhere Darstellungen $SU(3)$
fundamentale Darstellung Triplett

$\Rightarrow$ Hypothese Quarks $q = \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \leftarrow$ Flavours

Flavour-Transformationen:

$$q \longrightarrow \; = \; U \cdot q \tag{670}$$

$$\downarrow$$

$$3 \times 3 \text{ Matrix, } U = e^{-i\,\theta^a T^a} \in SU(3) \tag{671}$$

Basis: Gell-Mann-Matrizen $T^a = \lambda^a/2$

Hadronen $\stackrel{\wedge}{=}$ Produktdarstellungen, gebildet aus der fundamentalen

Spin:

Vgl. Spin von Mehrelektronatomen, $L + S$ in QM etc.

Baryonen fermionisch $\Rightarrow$ drei Quarks Spin 1/2

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2} \tag{672}$$

Mesonen bosonisch $\Rightarrow$ zwei Quarks

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1 \tag{673}$$

Flavour:

$$\text{Baryonen}, qqq \quad : \quad 3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \tag{674}$$

$$\text{Mesonen}, \bar{q}q \quad : \quad 3^* \otimes 3 = 1 \oplus 8 \tag{675}$$

Quantenzahlen:

	Q	I	I_3	Y	S	B
u	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
d	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
s	$-\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	-1	$\frac{1}{3}$

Quantenzahlen für $\bar{q}$: $\quad (-1)\times$ Quantenzahlen von q
Quantenzahlen für Hadronen additiv aus Quarks

Meson-Oktett:

$$\pi^+ \sim \bar{d}u \quad \pi^0 \sim \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{u}u - \bar{d}d), \quad \pi^- \sim d\bar{u}$$

$$K^+ \sim \bar{s}u \quad K^0 \sim \bar{s}d \quad \overline{K^0} \sim \bar{d}sK^- \sim \bar{u}s$$

$$\eta^0 \sim \frac{1}{\sqrt{6}}\,(\bar{u}u + \bar{d}d - 2\bar{s}s)$$

Baryonen: $p \sim udu$, $n \sim udd$ etc.

Exakte $SU(3)$-Invarianz $\Rightarrow$ Teilchen im Multiplett entartet, nur grob richtig
$\Rightarrow$ $SU(3)$ Flavour "schlechtere" Symmetrie als Isospin

Erklärung:

$$m_{n,d} \sim 2/5\,\text{MeV} \qquad m_s \sim 100\,\text{MeV} \tag{676}$$

10.4 Probleme des Quarkmodells ⇒ Farbhypothese

- Entdeckung neuer Quantenzahl “Charm” (D-Mesonen)
- Entdeckung des J/ψ $\quad \bar{c}c$ - Bindungszustand

$$SU(3) \to SU(4) \text{ Flavour} \quad \text{keine Symmetrie, } c \sim 1.5\,\text{GeV} \tag{677}$$

- Nur $\bar{q}q$, qqq-Zustände beobachtet, warum nicht qq, $qqqq$?
- $N^{*++} \sim uuu \quad J^P = \frac{3}{2}^+$

  $l = 0$ Zustand, $3 \times$ Spin $+\frac{1}{2}, 3 \times$ Isospin $+\frac{1}{2}$ ⇒ Widerspruch Pauliprinzip!

⇒ Postulat: verborgene zusätzliche Quantenzahl: ”Farbe”

3 Farben ⇒ $SU(3)$ Triplett

$$\begin{aligned} u &= (u_r, u_g, u_b) \\ d &= (d_r, d_g, d_b) \qquad N_f \text{ Farbtripletts} \\ s &= (s_r, s_g, s_b) \\ \dots \end{aligned}$$

Farbe nicht beobachtbar ⇒ physikalische Zustände Farbsingulett!

$$3 \otimes 3^* = 1 \oplus 8 \qquad\qquad 3 \otimes 3 = 3^* \oplus 6 \tag{678}$$

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \tag{679}$$

⇒ nur $\bar{q}q$ und qqq enthalten Farbsinguletts!

11 Quantenchromodynamik QCD

11.1 Lagrangedichte und Symmetrien

Quarks: Diracfelder, Anzahl Flavours: $N_f = 6$

u, d, s, c, b, t

Colour: r, b, g bzw. $1, 2, 3$

$$\Rightarrow \quad \text{Spinor} \quad q(x) = q_{\underset{\text{Dirac}}{\underset{\uparrow}{\alpha}} \ \underset{\text{flavour}}{\underset{\uparrow}{f}} \ \underset{\text{colour}}{\underset{\uparrow}{c}}}(x) \tag{680}$$

$$\text{Freie Lagrangedichte:} \quad \mathscr{L}_0 = \sum_{c=1}^{N_c} \sum_{f=1}^{N_f} \bar{q}_{fc}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_f) q_{fc} \tag{681}$$

Symmetrien:

- globale $SU(3)$-Colour
- Flavourerhaltung, bzw. Baryonzahl $U(1)$
- $SU(N_f)$-Flavours für $m_1 = m_2 = \dots m_{N_f}$

Wechselwirkung: nur Farbsinguletts beobachtbar!
$\Rightarrow$ Kraft ist farbabhängig $\Rightarrow$ Eichen der $SU(3)$-Farbsymmetrie

Fordere lokale $SU(3)$-Invarianz

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - ig\, A_\mu^a T^a, \; T^a = \frac{\lambda^a}{2} \tag{682}$$

$$A_\mu^a: \ \text{Gluonfelder} \quad a = 1, \dots 8$$

$$\text{Dynamische Eichfelder, Feldstärke:} \quad F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\, f_{abc}\, A_\mu^b\, A_\nu^c$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathscr{L}_{QCD} = \sum_{c,f} \bar{q}_{fc}\, (i\gamma^\mu D_\mu - m_f) q_{fc} - \tfrac{1}{4}\, F_{\mu\nu}^a\, F^{a\mu\nu}} \tag{683}$$

Globale Symmetrien

- $U(1)$-Baryon: Phasentrafo *aller* Quarkfelder; exakt

$$
\begin{aligned}
q'(x) &= e^{-i\frac{B}{3}\alpha} q(x) \\
j^\mu(x) &= \sum_f \bar{q}_f(x)\,\gamma^\mu\, q_f(x) \\
\frac{B}{3} &= \int d^3x\; j^0(x)
\end{aligned}
\tag{684}
$$

- $SU(N_{fe})$-Flavour

  Für N_{fe} entartete Quarkmassen

$$
\underbrace{m_i = m_j = \cdots = m_k}_{N_{fe}}
\tag{685}
$$

$$
\begin{aligned}
q'_{f'} &= U_{f'f} q_f, \qquad U = e^{-i\theta^a T^a} \in SU(N_{fe}) \\
j^{a\mu}(x) &= \sum_{f,f'} \bar{q}_f(x)\,\gamma^\mu\, T^a_{ff'}\, q_{f'}(x), \quad a = 1,\ldots,N_{fe}^2 - 1
\end{aligned}
\tag{686}
$$

  Natur: $m_u \approx m_d \quad \Rightarrow SU(2)_V$ Isospin, schlechter $m_u \approx m_d \sim m_s \quad \Rightarrow SU(3)$-Flavour

- Separate $U(1)$-Flavour für s, c, b, t Quarks
- axiale $U(1)$

  Für jeden masselosen Flavour, $m_f = 0$,

$$
\begin{aligned}
q'(x) &= e^{-i\alpha\gamma_5}\, q(x) \\
j_5^\mu(x) &= \bar{q}(x)\,\gamma^\mu\gamma^5\, q(x)
\end{aligned}
\tag{687}
$$

  Anomal: durch Quantenkorrekturen gebrochen

- axiale $SU(N_{f0})$

  Für

$$
\underbrace{m_i = m_j = \cdots = m_k = 0}_{N_{f0}}
\tag{688}
$$

$$
\begin{aligned}
q'(x) &= e^{-i\omega^a T^a \gamma_5}\, q(x) \\
j_5^{a\mu}(x) &= \sum_{f,f'} \bar{q}_f(x)\,\gamma^\mu\gamma^5\,(T^a)_{ff'}\, q_{f'}(x)
\end{aligned}
\tag{689}
$$

  Natur: $m_u, m_d \approx 0 \quad \Rightarrow SU(2)_A$

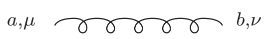
11.2 Störungstheorie

<u>Feynman-Regeln:</u>

Quark-Propagator

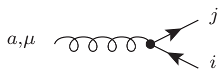
$$\frac{i\,\delta^{ij}}{\not{p} - m + i\varepsilon}$$

Gluon-Propagator



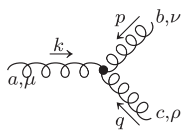
$$\frac{-i\,\delta^{ab}}{p^2 + i\varepsilon}\left[g^{\mu\nu} + (\xi - 1)\frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right]$$

Quark-Gluon-Vertex



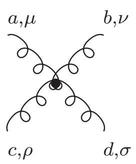
$$+ig\gamma^\mu\,(T^a)_{ij}$$

3-Gluon-Kopplung



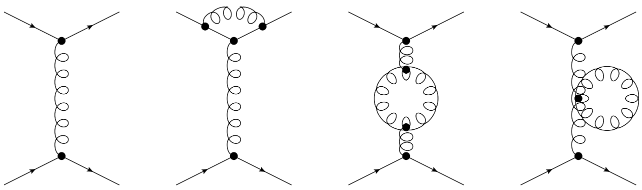
$$ig\,f^{abc}\left[g^{\mu\nu}(k-p)^\rho + g^{\nu\rho}(p-q)^\mu + g^{\rho\mu}(q-k)^\nu\right]$$

4-Gluon-Kopplung



$$-ig^2\left[f^{abe}f^{cde}(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) + f^{ace}f^{bde}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) + f^{ade}f^{bce}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\sigma}\right]$$

Elementare Diagramme: Beachte Analogien und Unterschiede zur QED!



11.3 Laufende Kopplung und asymptotische Freiheit

Entwicklungsparameter der starken Kopplung in Störungstheorie, analog QED:

$$\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi} \tag{690}$$

Renormierungsprogramm in höheren Ordnungen führt wie in QED zur laufenden Kopplung

$$\frac{\partial \alpha_s(Q^2)}{\partial \ln Q^2} = \beta\left(\alpha_s(Q^2)\right) \tag{691}$$

In Störungsentwicklung findet man:

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{4\pi}{\left(11 - \frac{2}{3}\,N_f\right) \ln \frac{Q^2}{\Lambda^2_{QCD}}} \tag{692}$$

Λ_{QCD}: QCD Skalenparameter aus Renormierungsgruppe und Experiment
$\simeq 200$ MeV (abhängig vom Renormierungsschema)

$\Rightarrow \quad \beta(\alpha_s) < 0$ 1) für <u>alle</u> Yang-Mills-Theorien
2) für QCD mit $N_f < 17$

$\Rightarrow$ Kopplung wird beliebig schwach für $Q^2 \to \infty$

"Asymptotische Freiheit" (UV-Freiheit) Gross, Wilczek, Politzer 1973, Nobel 2004

Andererseits: Kopplung wächst für kleine Q^2, divergiert für $Q^2 = \Lambda^2_{QCD}$
Hadronskala! "Infrarotsklaverei"

Schwierigkeit: Zustände der Störungstheorie (Quarks, Gluonen) für sich <u>nicht</u> physikalisch
Störungstheorie versagt bei niedrigen Energien, Hadronspektrum nicht perturbativ berechenbar

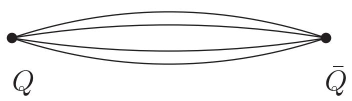
Aber: konsistent mit Confinement-Hypothese, Unbeobachtbarkeit von freien Quarks!

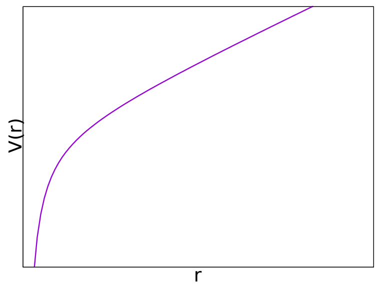
Hadronspektrum + nichtperturbative Phänomene:
$\Rightarrow$ Gittereichtheorie, numerische Simulationen

11.4 Confinement, Hadronisierung und Fragmentierung

Nichtstörungstheoretisches Problem, strenger Beweis fehlt
Qualitativ und numerisch (Gittereichtheorie): String-Bild

Betrachte statisches $Q\bar{Q}$-Paar im Abstand r

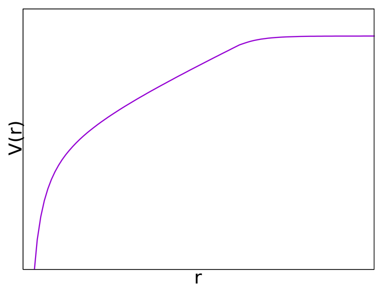




Ausbildung chromoelektrische Flussröhre: String

Potential $$V \sim \underbrace{\frac{a}{r}}_{\substack{\text{Coulomb-Anteil} \\ \text{bei kurzen Abständen}}} + \underbrace{k \cdot r}_{\substack{\text{Confinement} \\ \text{Potential}}}$$

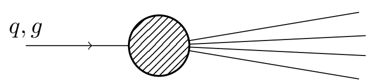
String Breaking durch Paarproduktion, wenn $E_{\text{string}} > 2m_q \;\Rightarrow\;$ Abschirmung



$\Rightarrow$ Hadronisierung auch bei hochenergetischen Reaktionen, z.B.:

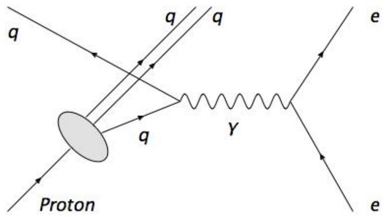
$$\text{e.g.} \quad e^+ + e^- \;\rightarrow\; q + \bar{q},\; q + \bar{q} + g \tag{693}$$
$$q,\, g \;\rightarrow\; \text{Jets} \tag{694}$$

q, g im Endzustand nicht beobachtbar, "holen sich" aus dem Vakuum Partner zum Binden



Hadronen innerhalb eines Kegels um $\mathbf{p}_{q,g}$, nichtstörungstheoretischer Vorgang!

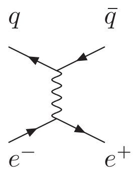
Analog: tief inelastische Streuung, e.g. $p + e \to e +$ Hadronen:



11.5 Experimentelle Tests

Test des Teilcheninhalts der QCD: $e^+ + e^- \to$ Hadronen

$$e^- + e^+ \longrightarrow q + \bar{q} \longrightarrow 2 \text{ Jets} \tag{695}$$



Vergleiche mit $e^- + e^+ \longrightarrow \mu^- + \mu^+$:

$$|M_{fi}(e^- + e^+ \to q + \bar{q})|^2 = Q_f^2 \, |M_{fi}(e^- + e^+ \to \mu^- + \mu^+)|^2 \tag{696}$$

$$\sigma(e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \,, \tag{697}$$

$$\sigma(e^+ + e^- \to 2 \text{ Jets}) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \cdot N_c \cdot \sum_{f=1}^{N_f} Q_f^2 \tag{698}$$

$\Rightarrow$ Test auf Quarkladungen:

$$R = \frac{\sigma(e^+ + e^- \to 2 \text{ Jets})}{\sigma(e^+ + e^- \to \mu^+ + \mu^-)} \tag{699}$$

12 Phänomenologie der schwachen Wechselwirkung

a) Leptonische Prozesse

$$\begin{aligned} &\text{Myon-Zerfall} & \mu^- &\to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu && (700)\\ &\text{Streuung} & e^- + \nu_\mu &\to \mu^- + \nu_e && (701) \end{aligned}$$

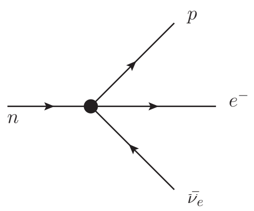
b) Semi-leptonische Prozesse

$$\begin{aligned} &\beta\text{-Zerfall} & n &\to p + e^- + \bar{\nu}_e && (702)\\ && \pi^- &\to \mu^- + \bar{\nu}_\mu && (703)\\ && K^+ &\to e^+ + \nu_e,\ \mu^+ + \nu_\mu \quad \underline{s\text{-Verletzung!}} && (704)\\ && \text{etc.} &&& (705) \end{aligned}$$

c) Nicht-leptonische Prozesse

$$\begin{aligned} \Lambda &\to p + \pi^- && (706)\\ K^- &\to \pi^- + \pi^0 \quad \underline{\text{s-Verletzung}} && (707)\\ \text{etc.} &&& (708) \end{aligned}$$

12.1 Die Fermi-Theorie



$$\mathscr{L}_w = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \left(\bar{e}_{(x)}\gamma^\mu \nu_{e(x)}\right)\left(\bar{p}(x)\gamma_\mu n(x)\right) \tag{709}$$

Strom-Strom-Kopplung mit $G_F \sim 10^{-5}\ \text{GeV}^{-2}$

<u>Universalität:</u>
Fülle von Hadronzerfällen mit schwacher WW; neue Fermi-WW für jedes Teilchen?
$\Rightarrow$ Universelle Beschreibung durch Quarkbild:

$$\begin{aligned} &\beta\text{-Zerfall} & d &\to u + e^- + \bar{\nu}_e && (710)\\ && n(ddu) &\to p(duu) + e^- + \bar{\nu}_e && (711) \end{aligned}$$

Derselbe Prozess beschreibt $\pi^-(\bar{u}d) \to e^- + \bar{\nu}_e$!
Man beobachtet weiter: G_F für μ, e-Ströme gleich, für Quarkströme nahezu gleich:

$$\frac{G_F\ (\beta\text{-Zerfall})}{G_F\ (\mu, e)} \simeq 0.98 \tag{712}$$

$\Rightarrow$ Quarks und Leptonen koppeln in nahezu gleicher Weise unter schwacher WW!

$\mathscr{L}_\omega$ invariant unter Spiegelungen (Parität P)

Aber experimentell:

1) $m_\nu \simeq 0$
2) Paritätsverletzung!

K-Zerfall	1956, Lee-Yang
β-Zerfall ^{60}Co	1957 Wu

$\Rightarrow$ ν_e ist immer linkspolarisiert
$\bar{\nu}_e$ ist immer rechtspolarisiert
e^- vorzugsweise linkspolarisiert

12.2 V-A Theorie

Erinnerung Chiralität

$$\begin{aligned} P_L &= \frac{1-\gamma_5}{2}, \quad P_R = \tfrac{1+\gamma_5}{2} \quad \text{Projektoren} \\ P_L + P_R &= 1, \quad P_L^2 = P_L, \quad P_R^2 = P_R, \quad P_L P_R = 0 \\ \psi_{L,R} &= P_{L,R}\psi\,, \quad \psi_L + \psi_R = \psi \end{aligned}$$

$$\text{z.B.} \quad \bar{\psi}\,(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\,\psi = \bar{\psi}_L i\gamma_\mu\partial_\mu\psi_L + \bar{\psi}_R i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R - m\left(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L\right) \tag{713}$$

$\Rightarrow$ für $m = 0$ $\quad L, R$ Anteile entkoppeln

$$\frac{\mathbf{\Sigma}\cdot\mathbf{k}}{2|\mathbf{k}|}\,\psi_{R,L} = \pm\frac{1}{2}\,\psi_{R,L} \tag{714}$$

Helizität $\lambda = \pm\frac{1}{2}$, lorentzinvariant für masselose Fermionen

$$\text{Neutrinospinor:} \quad \psi_\nu \quad = \psi_{\nu_L} = \frac{1}{2}\,(1-\gamma_5)\,\psi_\nu \tag{715}$$

$$\text{Anti-}\nu \quad \psi_{\bar{\nu}} \quad = \psi_{\bar{\nu_R}} = \frac{1}{2}\,(1+\gamma_5)\,\psi_{\bar{\nu}} \tag{716}$$

$\Rightarrow$ Konstruiere Theorie mit verschiedenen Kopplungen für links- und rechtshändige Felder

Gell-Mann, Feynman 1958

$$\begin{aligned}
\bar{e}(x)\gamma_\mu \nu_e(x) &\rightarrow \bar{e}(x)\gamma_\mu \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\,\nu_e(x) &(717)\\
&= \bar{e}_L(x)\gamma_\mu \nu_{eL} &(718)\\
&= \frac{1}{2}\,\bar{e}(x)\gamma_\mu\nu_e(x) - \frac{1}{2}\,\bar{e}(x)\gamma_\mu\gamma_5\nu_e(x) &(719)\\
&=: \frac{1}{2}\,(V_\mu(x) - A_\mu(x)) &(720)
\end{aligned}$$

V-A: Vektor-Axialvektoren

⇒ Leptonstrom:

$$J_\mu^{(e)}(x) = 2\bar{e}_L(x)\gamma_\mu\nu_{eL}(x) + 2\bar{\mu}_L(x)\gamma_\mu\nu_{\mu L} + 2\bar{\tau}_L(x)\gamma_\mu\,\nu_{\tau L}(x) \qquad (721)$$

ebenso für Hadronen:

$$J_\mu^{(h)}(x) = 2\bar{u}_L(x)\gamma_\mu d_L(x) \quad \text{bzw.} \quad 2\bar{p}_L(x)\gamma_\mu n_L(x) \qquad (722)$$

$$J_\mu(x) = J_\mu^{(l)}(x) + J_\mu^{(h)}(x) \qquad (723)$$

$$\mathscr{L}_w = \frac{G_F}{\sqrt{2}}\,J_\mu(x)J^{\mu^\dagger}(x) \qquad (724)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & J_\mu^{(l)}\,J^{\mu(l)^\dagger} && \text{leptonisch} &(725)\\
& J_\mu^{(l)}\,J^{\mu(h)^\dagger} + J_\mu^{(h)}\,J^{\mu(l)^\dagger} && \text{semileptonisch} &(726)\\
& J_\mu^{(h)}\,J^{\mu(h)} && \text{nichtleptonisch} &(727)
\end{aligned}$$

Modifikationen, Anpassung ans Experiment: $G_\beta/G_{e\mu}$

a) für Nukleonen

$$J_\mu^{(h)} = g_V\,V_\mu^{(h)} - g_A\,A_\mu^{(h)} \qquad (728)$$

$$g_V = 1,\ g_A = 1.24 \qquad (729)$$

b) für u, d, s, c Quarks

$$\begin{aligned}
d' &= d\cdot\cos\Theta_c + s\cdot\sin\Theta_c &(730)\\
s' &= s\cdot\cos\Theta_c - d\cdot\sin\Theta_c &(731)
\end{aligned}$$

Cabibbo-Winkel $\Theta_c \simeq 13°$

$$J_\mu^{(h)} = 2\bar{u}_L\gamma_\mu d'_L + 2\bar{c}_L\gamma_\mu s'_L \tag{732}$$

Strangeness-ändernde V-A-Theorie; erfolgreich für zahlreiche Prozesse bei niedrigen Energien
N.B.: geladene Ströme $\Rightarrow$ immer Ladungsänderung entlang Fermionstrom

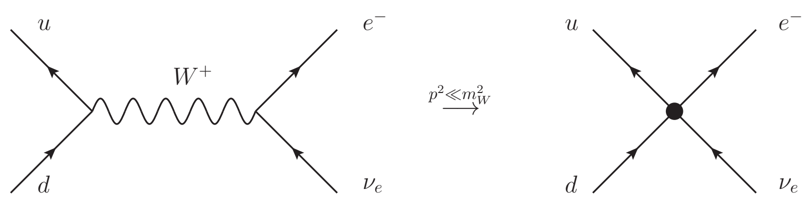
Probleme:
- WW nicht renormierbar
- schlechtes Hochenergieverhalten $\sigma \sim G_F^2 \cdot s$ verletzt Unitarität bei großen s!
- Entdeckung neutraler Ströme

$$\begin{aligned}
\bar{\nu}_\mu + e^- &\rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^- && (733)\\
\nu_\mu + N &\rightarrow \nu_\mu + X \qquad X_F \text{ Hadronen} && (734)\\
\bar{\nu}_\mu + N &\rightarrow \bar{\nu}_\mu + X && (735)\\
& && (736)
\end{aligned}$$

Postulat:
Intermediäre Bosonen
Vektorteilchen wie γ, g aber massiv für kurze Reichweite (4-Punkt-WW)
$\Rightarrow$ Schwachheit der WW
Außerdem: Ladung zur Kopplung an geladene Ströme W^-, W^+

Z.B.:

$$\mathscr{L}_w = g\, J_\mu W^{(-)\mu} + \text{h.c.} \tag{737}$$



12.3 Massive Eichbosonen und Renormierbarkeit

Schleifendiagramme $\Rightarrow$ UV-Divergenzen

Renormierbare Theorie: Divergenzen können in nackten Parametern der Theorie absorbiert werden

Notwendige Bedingung: Propagatoren $\to \frac{1}{p^2}$ für $p \to \infty$, sonst unrenormierbar

Massiver Vektorbosonpropagator:

$$\frac{i}{p^2 - m^2} \left(-g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{m^2} \right) \longrightarrow const. \quad \text{für } p \to \infty \tag{738}$$

In QED, QCD: Eichsymmetrie verbietet $m^2 A_\mu A^\mu$ $\Rightarrow$ schützt Renormierbarkeit

Frage:	Gibt es eine renormierbare Theorie mit intermediären, massiven Eichbosonen?
Lösung:	Higgsmechanismus!

13 Das Glashow-Weinberg-Salam-Modell der elektroschwachen Wechselwirkung

1961-

$$
\begin{array}{llll}
\text{Forderung:} & W_\mu^+,\, W_\mu^-,\, Z_\mu^0,\, A_\mu & & \text{Eichbosonen, } m_W, m_Z > 0 \\
 & & & \Rightarrow \text{ Higgsmechanismus} \\
\text{Eichgruppe:} & \underset{\text{schwacher Isospin}}{\underset{\uparrow}{SU(2)}} \quad \times \quad \underset{\text{Hyperladung}}{\underset{\uparrow}{U(1)_Y}} & &
\end{array}
$$

$$
\text{Quantenzahlen:} \quad \underset{\text{e.m. Ladung}}{\underset{\uparrow}{Q}} = \underset{\text{schwacher Isospin}}{\underset{\uparrow}{I_3}} + \underset{\text{Hyperladung}}{\underset{\uparrow}{\tfrac{Y}{2}}} \tag{739}
$$

13.1 Das Modell für eine Leptonfamilie

Zunächst: betrachte ein Lepton, e.g. e^-

Schwache WW: nur linkshändige Anteile koppeln an Eichfelder

$$
\begin{array}{lll}
SU(2) \text{ Dublett:} & L_L(x) = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix} & \text{ebenso für } \mu, \tau \\
\text{Quantenzahlen:} & \text{"schwacher" Isospin } I = \frac{1}{2},\ I_3 = \pm\frac{1}{2} & \\
SU(2) \text{ Singlett:} & (e^-)_R & \text{ebenso für } \mu, \tau
\end{array}
$$

$$
I = 0,\ I_3 = 0
$$

$U(1)_Y$ Hyperladung Y:

	ν_e	e_L	e_R
Y	-1	-1	-2
Q	0	-1	-1

$$
\begin{array}{lll}
\text{Transformationen:} & SU(2): & {e_R}'(x) = e_R(x) \\
 & & {L_L}'(x) = e^{-i\,\Theta^a(x)T^a}\, L_L(x) \\
 & U(1)_Y: & \psi' = e^{-i\alpha(x)Y(\Psi)}\,\psi \\
 & & \psi = e_L, \nu_L, e_R
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{Eichfelder:} & SU(2): & W_\mu^e \quad \text{Feldstärke } W_{\mu\nu}^a \\
 & U(1)_Y: & B_\mu \quad \text{Feldstärke } B_{\mu\nu}
\end{array}
$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_f &= \bar{L}_L\, i\gamma^\mu \left(\partial_\mu - i\frac{g'}{2}\,Y\,B_\mu - igT^a W_\mu^a\right) L_L \\
&\quad + \bar{e}_R\, i\gamma^\mu \left(\partial_\mu - i\frac{g'}{2}\,Y\,B_\mu\right) e_R \qquad (740) \\
\mathscr{L}_g &= -\frac{1}{4}\,W^{a\mu\nu}\,W^a_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\,B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} \qquad (741)
\end{aligned}$$

Bisher Eichfelder masselos $\Rightarrow$ Higgsfeld, aber Brechung nur für schwache WW!
$\Rightarrow$ komplexes $SU(2)$ Dublett

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Quantenzahlen: } I = \frac{1}{2},\ I_3 = \pm\frac{1}{2},\ Y = 1$$

$$\begin{aligned}
D_\mu\phi &= \left(\partial_\mu - i\frac{g'}{2}\,YB_\mu - ig\,T^a W_\mu^a\right)\phi \\
\Rightarrow \mathscr{L}_H &= (D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) - \mu^2\phi^\dagger\phi - \lambda(\phi^\dagger\phi)^2; \qquad \lambda > 0, \mu^2 < 0 \qquad (742)
\end{aligned}$$

Gesamte Lagrangedichte:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_g + \mathscr{L}_f + \mathscr{L}_H \qquad (743)$$

13.2 Das bosonische Massenspektrum

$\mu^2 < 0 \Rightarrow$ Symmetriebrechung

$$\begin{aligned} \text{unitäre Eichung: } \phi(x) &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v+\rho(x) \end{pmatrix} \\ v^2 &= -\frac{\mu^2}{\lambda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_H &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\rho)^2 - \frac{1}{2}\,m_\rho^2\,\rho^2 - \lambda v\rho^3 - \frac{\lambda}{4}\,\rho^4 \\ &\quad \frac{1}{2}\,m_W^2(W_\mu^1 W^{1\mu} + W_\mu^2 W^{2\mu}) \\ &\quad \frac{v^2}{8}(g'B_\mu - gW_\mu^3)(g'B^\mu - gW^{3\mu}) \\ &\quad +\text{Wechselwirkungsterme} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho(x): &\qquad \text{massives, neutrales Higgsfeld } m_\rho^2 = 2\lambda v^2 \qquad (744) \\ Q &= I_3 + \frac{Y}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \\ m_W &= \frac{gv}{2} \end{aligned}$$

Umschreiben der Eichfelder:

$$\begin{aligned} W_\mu^1 W^{1\mu} + W_\mu^2 W^{2\mu} &= 2W_\mu^+ W^{-\mu} \\ \text{mit } W_\mu^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2) \end{aligned} \qquad (745)$$

B_μ, W_μ^3 gemischt $\Rightarrow$ Diagonalisieren

$$Z_\mu \equiv \frac{gW_\mu^3 - g'B_\mu}{\sqrt{g^2+g'^2}},\ A_\mu = \frac{g'W_\mu^3 + gB_\mu}{\sqrt{g^2+g'^2}} \qquad (746)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow &\quad \frac{v^2}{8}(g'B_\mu - gW_\mu^3)(g'B^\mu - gW^{3\mu}) \\ = &\quad \tfrac{1}{2}\,m_Z^2\,Z_\mu Z^\mu \quad , \qquad m_Z = \frac{1}{2}\,v\,\sqrt{g'^2+g^2} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad m_A = 0 \quad \text{Photon} \end{aligned}$$

<u>Def.:</u> Weinbergwinkel $\tan\Theta_W = \frac{g'}{g}$

$$\Rightarrow \frac{m_W}{m_Z} = \cos\Theta_W \qquad (747)$$

$$Z_\mu = \cos\Theta_W W_\mu^3 - \sin\Theta_W B_\mu \quad \text{massiv} \qquad (748)$$

$$A_\mu = \cos\Theta_W B_\mu + \sin\Theta_W W_\mu^3 \quad \text{masselos!} \qquad (749)$$

13.3 Die elektroschwachen Wechselwirkungsterme

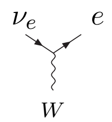
Wie in QED, QCD vollständig durch Eichinvarianz bestimmt!

Ausschreiben der kovarianten Ableitungen

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_f &= \bar{e}_L i\gamma^\mu \partial_\mu e_L + \bar{\nu}_{eL} i\gamma^\mu \partial_\mu \nu_{eL} + \bar{e}_R i\gamma^\mu \partial_\mu e_R \\
&\quad + \frac{g}{2}\left(\bar{\nu}_{eL}, \bar{e}_L\right)\gamma^\mu \left[\underbrace{\begin{pmatrix} W^3_\mu & \sqrt{2}W^+_\mu \\ \sqrt{2}W^-_\mu & -W^3_\mu \end{pmatrix}}_{=W^a T^a} - \tan\theta_W\, B_\mu\right]\begin{pmatrix}\nu_{eL} \\ e_L\end{pmatrix} \\
&\quad - g\,\tan\theta_W\,\bar{e}_R\,\gamma^\mu B_\mu\, e_R \\
&= \bar{e}_L i\gamma^\mu \partial_\mu e_L + \bar{\nu}_{eL} i\gamma^\mu \partial_\mu \nu_{eL} + \bar{e}_R i\gamma^\mu \partial_\mu e_R + \underbrace{\mathscr{L}_{CC}}_{\text{charged,}} + \underbrace{\mathscr{L}_{NC}}_{\text{neutral current}} \qquad (750)
\end{aligned}$$

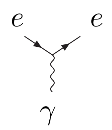
Einzelne Beiträge zu den Wechselwirkungen:

-
$$\mathscr{L}_{CC} = \frac{g}{2\sqrt{2}}\,\bar{\nu}_e\,\gamma^\mu(1-\gamma_5)e\,W^+_\mu \quad + \quad \text{hermitesch konjugiert} \qquad (751)$$



V-A, geladener Leptonstrom

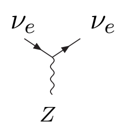
-
$$\mathscr{L}_{NC} = \quad -g\sin\theta_W\,\bar{e}\gamma^\mu e\,A_\mu \qquad (752)$$



Elektronspinor $e = e_L + e_R$ koppelt als Vektor; $\Rightarrow$ QED-Vertex mit

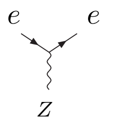
$$e \equiv g\sin\theta_W \qquad (753)$$

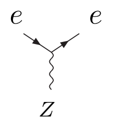
-
$$+\frac{g}{4\cos\theta_W}\,\bar{\nu}_e\gamma^\mu\left(1-\gamma_5\right)\nu_e Z_\mu \qquad (754)$$



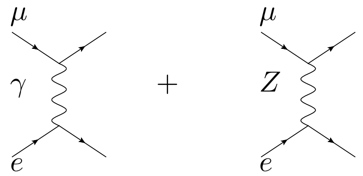
V-A-Kopplung ohne Ladungsänderung, neutraler Strom

- $$-\frac{g}{4\cos\theta_W}\quad \bar{e}\left(\gamma^\mu\left(1-\gamma_5\right)-4\sin^2\theta_W\gamma^\mu\right)eZ_\mu \tag{755}$$





V-A-Kopplung, neutraler Strom + V-Kopplung, elektromagnetischer Beitrag!



Elektrische Ladung:

$$e=g\cdot\sin\Theta_W=g'\cos\Theta_W=\frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}} \tag{756}$$

aus kovarianter Kopplung an A_μ

Aus Strom-Strom-Kopplung der V-A-Wechselwirkung:

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}}=\frac{g^2}{m_W^2}=\frac{4}{v^2} \tag{757}$$

$$\Rightarrow\ v\simeq 246\,\mathrm{GeV}\ \Rightarrow\ \text{Vorhersage für } m_W! \tag{758}$$

$$\begin{aligned} \text{exp.:}\qquad \sin^2\Theta_W &= 0.231\\ m_W &= 80.42\,\mathrm{GeV}\\ m_Z &= 91.19\,\mathrm{GeV} \end{aligned}$$

13.4 Leptonmassenspektrum

Beachte: Diracmassenterm für Elektron verboten!

$$m_e(\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L) \tag{759}$$

Eichinvarianz $\Rightarrow$ nackte Fermionmassen $= 0$

$\Rightarrow$ Massen aus Higgs-VeV(vacuum expectation value), ähnlich wie Bosonen

Yukawa-Kopplungen:

$$\mathscr{L}_Y = -G_e\,\bar{L}_L\,\phi\,e_R + \text{h.c.} \tag{760}$$

$$\bar{L}_L\,\phi\,e_R = \underbrace{(\bar{\nu}_L, \bar{e}_L)\begin{pmatrix}\phi^+ \\ \phi^0\end{pmatrix}}_{SU(2)-\text{Singulett}} e_R \tag{761}$$

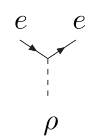
In unitärer Eichung:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 \\ v+\rho(x)\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_Y &= -\frac{G_e}{\sqrt{2}}\,(\bar{\nu}_L, \bar{e}_L)\begin{pmatrix}0 \\ v+\rho(x)\end{pmatrix} e_R + \text{h.c.} \\ &= -\frac{G_e}{\sqrt{2}}\Big(\underset{\text{Massenterm}}{\underset{\uparrow}{v\,\bar{e}_L e_R}} \quad + \quad \underset{\text{Yukawa-Kopplung}}{\underset{\uparrow}{\bar{e}_L e_R\;\rho(x)}}\Big) \quad + \text{h.c.}\end{aligned} \tag{762}$$

$$m_e = \frac{G_e v}{\sqrt{2}} \quad \text{oder} \quad G_e = \frac{g}{\sqrt{2}}\frac{m_e}{m_W} \tag{763}$$

"Nebenwirkung": neuer Vertex, Yukawakopplung



Ebenso für μ, τ

Vollständige elektroschwache Theorie für Leptonen:

$$\mathscr{L}_{ew} = \mathscr{L}_g + \mathscr{L}_f + \mathscr{L}_H + \mathscr{L}_Y \tag{764}$$

13.5 Das elektroschwache Modell für eine Quarkfamilie

Quarks und Leptonen koppeln in nahezu gleicher Weise an e.m. und schwache WW

$$Q_L \equiv \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L , \quad I = \frac{1}{2}, I_3 = \pm\frac{1}{2} \tag{765}$$

$$u_R, d_R, \quad I = 0 \tag{766}$$

Quantenzahlen für Y folgen wieder $Q = I_3 + Y/2$

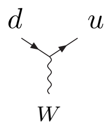
	u_L	d_L	u_R	d_R
I_3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0
Y	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$
Q	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$

Fermionische Lagrangedichte

$$\mathscr{L}_f = \bar{Q}_L \gamma^\mu \tilde{D}_\mu Q_L + \bar{u}_R \gamma^\mu D_\mu u_R + \bar{d}_R \gamma^\mu D_\mu d_R + \mathscr{L}_{CC} + \mathscr{L}_{NC} \tag{767}$$

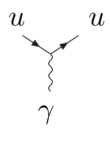
Analog der Leptonen sind dies kintetische Terme plus Wechselwirkungen geladener und neutraler Ströme Im Einzelnen:

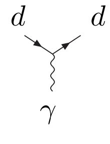
- $$\mathscr{L}_{CC} \quad = \frac{g}{2\sqrt{2}}\, \bar{u}\, \gamma^\mu (1 - \gamma_5)\, d\, W_\mu^+ + \text{h.k.} \tag{768}$$

  V-A-Quarkstrom mit Ladungsänderung (β-Zerfall)

- $$\mathscr{L}_{NC} \quad = \frac{2}{3} \underbrace{g \sin\theta_W}_{=e} \bar{u}\gamma^\mu u\, A_\mu + \frac{1}{3} \underbrace{g \sin\theta_W}_{=e} \bar{d}\gamma^\mu d\, A_\mu \tag{769}$$

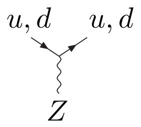
  

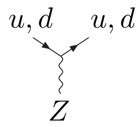
  

  Neutrale Vektorströme, elektromagnetische Wechselwirkung der Quarks

•

$$+\tfrac{g}{2\cos\theta_W}\,\bar{q}_i\left(I_3(q_i)\gamma^\mu(1-\gamma_5)-Q(q_i)\sin^2\theta_W\gamma^\mu\right)q_i\,Z_\mu \tag{770}$$





(771)

$q_1 = u, q_2 = d$ mit den zugehörigen Isospin- und Ladungsquantenzahlen

V-A-Kopplung, neutraler Strom + V-Kopplung, Beitrag zur elektromagnetischen Wechselwirkung

Quarkmassen analog Leptonmassen aus Yukawaterm:

$$\mathscr{L}_{Y,d} = -G_d\,\bar{Q}_L\,\phi\,d_R + \text{h.k.} \tag{772}$$

In unitärer Eichung Masse der unteren Dublettkomponente

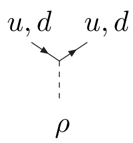
$$m_d = \frac{G_d}{\sqrt{2}}\,\upsilon = \sqrt{2}\,\frac{G_d m_W}{g} \tag{773}$$

u als obere Dublettkomponente immer noch masselos

Zusätzlicher Yukawaterm

$$\mathscr{L}_{Y,u} = -G_u\,\bar{Q}_L\,\tilde{\phi}\,u_R, \quad \text{mit} \quad \tilde{\phi} = i\tau^2\phi^* \quad Y(\tilde{\phi}) = -1 \tag{774}$$

$$m_u = \frac{G_u}{\sqrt{2}}\,\upsilon = \sqrt{2}\,\frac{G_u m_W}{g} \tag{775}$$



13.6 Drei Quarkfamilien

Nächste Quarkfamilie:

$$Q_L = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \quad c_R, s_R \tag{776}$$

Aber nun zusätzliche Möglichkeiten für Singuletts unter Eichgruppe durch Mischung der Familien, z.B.

$$(\bar{u}, \bar{d})_L \, \phi \, s_R \tag{777}$$

Phänomenologisch erwünscht $\Rightarrow$ S-Verletzung und Cabbibowinkel!

Verallgemeinerung auf drei Familien, ersetze jeweils untere Komponente durch gemischtes Feld

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = V_{CKM} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \tag{778}$$

Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix (unitär, enthält Cabibbowinkel)

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \tag{779}$$

Neutrale Ströme diagonal in Quarkfeldern $\Rightarrow$ nicht betroffen von Mischung

$\Rightarrow$ alle Vertizes $\bar{q}q\gamma, \bar{q}qZ$ und $\bar{q}q\rho$ sowie Massenterme unverändert

Modifikation geladene Ströme:

$$\mathscr{L}_{CC} = \frac{g}{2\sqrt{2}} \, (\bar{u}, \bar{c}, \bar{t}) \, \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \, V_{CKM} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} W_\mu^\dagger \quad + \text{h.k.} \tag{780}$$

Wieviele zusätzliche Parameter?

$3 \times 3 \Rightarrow 9$ komplexe Einträge=18 reelle Parameter;
Unitarität: 9 Bedingungen $V^\dagger_{\alpha\beta} V_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\gamma}$
6 beteiligte Quarkfelder $\Rightarrow$ 5 beliebige relative Phasen, wegtransformieren

$\Rightarrow$ 4 freie reelle Parameter

Parametrisierung von Kobayashi und Maskawa durch drei Mischungswinkel $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ und eine Phase δ,

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} c_1 & s_1 c_3 & s_1 s_3 \\ -s_1 c_2 & c_1 c_2 c_3 - s_2 s_3 \, e^{i\delta} & c_1 c_2 s_3 + s_2 c_3 \, e^{i\delta} \\ -s_1 s_2 & c_1 s_2 c_3 + c_2 s_3 \, e^{i\delta} & c_1 s_2 s_3 - c_2 c_3 \, e^{i\delta} \end{pmatrix} \tag{781}$$

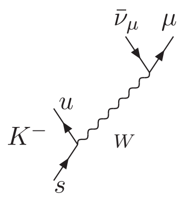
mit

$$c_i = \cos\theta_i, \quad s_i = \sin\theta_i \tag{782}$$

Einer der Winkel ist der bereits bekannte Cabbibo-Winkel, $\theta_1 = \theta_C$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_{CC} &= \frac{g}{2\sqrt{2}}\,\bar{u}\,(1-\gamma^5)\,d' W_\mu^+ + \frac{g}{2\sqrt{2}}\,\bar{c}\,\gamma^\mu(1-\gamma^5)\,s' W_\mu^+ \;+\text{h.k.} \\
&= \frac{g}{2\sqrt{2}}\Big(\cos\theta_C\,\bar{u}\,\gamma^\mu(1-\gamma_5)d + \sin\theta_C\,\bar{u}\,\gamma^\mu(1-\gamma_5)s \\
&\quad +\cos\theta_C\,\bar{c}\,\gamma^\mu(1-\gamma_5)\,s - \sin\theta_C\,\bar{c}\,\gamma^\mu(1-\gamma_5)\,d\Big)\,W_\mu^+ \\
&\quad +\text{h.k.}
\end{aligned} \tag{783}$$

Damit richtiges Verhältnis $G_F(\beta-\text{Zerfall})/G_F(\text{Lepton})$ und S-Verletzung, z.B.:



Komplexe Matrixeinträge nur durch $\delta \neq 0$, verantwortlich für CP-Verletzung in Kaonsystem $K^0, \bar{K^0}$

Matrixelemente durch Messung der schwachen Kopplungen festgelegt, man findet

Diagonale	:	$O(1)$
Nebendiagonale	$\ll$	Diagonale

$\Rightarrow$ alle Mischungswinkel θ_i klein
$\Rightarrow$ dominante Zerfallskette $\quad t \to b \to c \to s$

<u>Beachte</u>:

- keine Leptonmischung für masselose Neutrinos!
- Einbau Neutrinomassen wie für obere Einträge in Quarkdubletts
(andere Möglichkeit: Majorananeutrinos!)
- $m_\nu \neq 0 \Rightarrow$ Mischung auch im Leptonsektor! (Neutrinooszillationen)