

# ESTUDIO NUMÉRICO DE ESTRELLAS DE QUARKS RELATIVISTAS



Luis Alejandro García Mora

Facultad de Ciencias

Universidad Nacional Autónoma de México

Tesis sometida como requisito para obtener el grado de

*Licenciado en Física.*



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTUDIO NUMÉRICO DE  
ESTRELLAS DE QUARKS  
RELATIVISTAS

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LICENCIADO EN FÍSICA

PRESENTA

**Luis Alejandro García Mora**



DIRECTOR DEL TRABAJO:

DR. ALEJANDRO CRUZ OSORIO

Ciudad de México, Febrero 2019

A la memoria de mi tío Tony

## Agradecimientos

Quisiera empezar por agradecer particularmente a mi asesor, el Dr. Alejandro Cruz Osorio, por permitirme aprender y trabajar con él, por toda la atención y también por su paciencia entre mis desapariciones. Sin él, éste trabajo simplemente no habría sido posible.

A mis sinodales, por sus valiosos comentarios y críticas constructivas, que me ayudaron a pulir éste trabajo.

A mis profesores de la facultad, por compartir del cáliz que alimenta el alma, especialmente al Dr. Fabio Duvan Lora Clavijo, por mostrarme la física de forma clara y simple, y a la Mtra. María del Carmen Arrillaga Arjona, por permitirme ver a las matemáticas desde sus entrañas, sin pasar por sus fauces. Sin ellos, mi carrera hubiese terminado antes por fatiga.

A mi familia, por alentarme a seguir a pesar de todo, y por ayudarme a resolver los problemas que no puedo resolver con ecuaciones.

A mis hermanos Paco y Julian, por no pegarme en la cabeza “tanto” durante nuestra infancia, de tal forma que no se estropeará “tanto” mi querida máquina de pensar.

A mi padre, por preocuparse de las cosas materiales para que yo no tuviera que hacerlo, y por demostrar un cariño tácito y silencioso, pero verdadero. Descanse en paz.

A mi madre, Celia Mora, por todo el esfuerzo que producía dinero para proveerme de lo necesario como para no preocuparme de cuestiones mundanas como comer, cubrirse del frío, trasportarme, etc. Por aguantar mis vicisitudes y holgazanería. Por empujarme a continuar con el viaje, a contra corriente, y ayudarme a no perder el horizonte. Éste trabajo es un ligero presente a vuestro esfuerzo. ¡Muchas gracias amiga!, no pienso que pueda pagar nunca lo que me has dado.

A mis camaradas, Joel, Avner, Rafa, Charles, Adrian, Coco, Didier.

Me gustaría también agradecer a mis perros Kahana, Calisto, Doctor X, Blanquita, La gorda, Skamp, Champiñon, Bombita, Banda Cachorra. Por estar conmigo cuando todos me dan la espalda, por no importarles si hago o no hago éste trabajo, por apoyarme sin recibir nada a cambio.

Pero sobretodo me gustaría agradecer a mi hermanito, mi amigo Jean Perro, por darme alegría y mostrarme que el corazón de la vida y los mayores bienes nos son comunes a todos, estirarse al despertar, revolcarse en el pasto, pasear por el bosque, aullar y mojarse en la lluvia para después sacudirse. Por estar siempre a mi lado y soportar la vida conmigo. Sin ti todos los caminos se pierden, contigo me vale cualquier camino.

## Resumen

En este trabajo se realiza un análisis numérico de estrellas esféricamente simétricas que resultan de la solución de las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff. El análisis se centra en el estudio de dos tipos de estrellas, las estrellas de neutrones, que se usan para verificar el correcto funcionamiento del código desarrollado en el lenguaje de programación Fortran 90. Y como objetivo principal de esta tesis, se estudian las propiedades de las estrellas de quarks. Usando el modelo MIT-bag model, se incluyen tres tipos de quarks en la ecuación de estado, el quark *up* ( $u$ ), *down* ( $d$ ) y *strange* ( $s$ ). La ecuación de estado se define en términos de la densidad de energía de los quarks y la energía de la bolsa  $B$  que es un parámetro libre. Se construyen diferentes configuraciones de estrellas de quarks con el fin de conocer las masa y el radio que pueden alcanzar dichas estrellas. Por último, se realiza una comparación entre los resultados numéricos obtenidos y las masas estimadas de las observaciones de ondas gravitacionales provenientes del “inspiral” de binarias de estrellas de neutrones y las constricciones en el rango de masas y radios que puede tener una estrella de neutrones, recientemente encontradas.

## Abstract

In this work, we perform a numerical analysis of the spherically symmetric stars resulting from the solution of the Tolman-Oppenheimer-Volkoff equations. The analysis is focused on the study of two types of stars, the neutron stars that we use to verify the code developed using the Fortran 90 language. And, our main goal in this work is the study of the properties of the quark stars. Using the MIT-bag model, we include three kinds of quarks in the equation of state, the *up* ( $u$ ), *down* ( $d$ ) and *strange* ( $s$ ) quarks. The equation of state is defined in terms of the energy density of the quarks, and the energy of the bag  $B$ , this last is a free parameter. We build different configurations of quarks stars in order to find the values that the mass and radius can lead. Finally, we realize a comparison between our numerical results and the estimated masses founded in the observations of the gravitational waves coming from the binary neutron stars inspiral and the constrictions in the range of masses and radius for the neutron stars, recently found.

# Índice general

Índice general	v
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff</b>	<b>16</b>
2.1. Formulación 3+1 del espacio-tiempo . . . . .	16
2.2. Breve introducción de conceptos básicos de relatividad general . .	18
2.3. Solución de Schwarzschild de un hoyo negro estático y estacionario.	21
2.4. Formulación Newtoniana de las estrellas TOV . . . . .	23
2.5. Formulación relativista de las estrellas TOV . . . . .	26
2.5.1. Modelo “MIT bag – model” para modelar estrellas de quarks	30
<b>3. Métodos Numéricos</b>	<b>37</b>
3.1. Método Runge-Kutta . . . . .	37
3.1.1. Método de euler . . . . .	37
3.1.2. Método Runge-Kutta de 4º orden . . . . .	38
3.2. Regla del trapecio . . . . .	40
3.3. Datos iniciales para estrellas de neutrones . . . . .	41
3.4. Datos iniciales para estrellas de quarks . . . . .	44
3.5. Estructura del código . . . . .	46
<b>4. Resultados numéricos para estrellas de neutrones y estrellas de quarks</b>	<b>49</b>
4.1. Estrellas de neutrones . . . . .	49
4.2. Estrellas de quarks . . . . .	55

## ÍNDICE GENERAL

---

5. Análisis y conclusiones	66
A. Sistemas de Unidades	71
B. Ecuación de estado de un gas ideal para modelar estrellas de neutrones	74
Referencias	80

# Capítulo 1

## Introducción

En astrofísica relativista existen un gran número de escenarios de altas energías y dinámicas muy interesantes, muchos de los cuales involucran la presencia de objetos compactos, como hoyos negros supermasivos, estrellas de neutrones, cuasares, etc. La fusión de dos agujeros negros o de estrellas de neutrones en un solo cuerpo, genera gran cantidad de energía y una perturbación sobre el espacio-tiempo predicho por la teoría de la relatividad de Einstein. A éstas perturbaciones se les llama ondas gravitacionales, éstas ondas fueron recientemente detectadas, primero para una fusión de agujeros negros y después para estrellas de neutrones, estableciendo una masa total de  $M = 2.74^{+0.04}_{-0.01}[M_{\odot}]$  [Abbott et al. \[2017\]](#). Pero lo interesante es que las propiedades de las estrellas colapsadas no han sido identificadas, y en principio, éstas podrían ser descritas con cualquier ecuación de estado. Una amplia gama de ecuaciones de estado es presentada por [Lattimer and Prakash \[2001\]](#), pero existen dos ecuaciones de estado sencillas y que describen el comportamiento de las estrellas: la EoS politrópica para estrellas de neutrones, y la EoS MIT-bag model para modelar estrellas más densas compuestas por quarks que no interactúan entre ellos. Éstas ecuaciones son las que vamos a usar para estudiar las propiedades de los objetos celestes. Es importante señalar que en éste trabajo, vamos a considerar que éstos cuerpos no rotan ni evolucionan en el tiempo, y tampoco colisionan, sólo vamos a construir éstos objetos como si tomáramos una fotografía (objetos estáticos), es decir, en equilibrio hidrodinámico y así estudiar sus propiedades físicas. Aunque la colisión de estrellas de neutrones o estrellas de quarks en un medio interestelar es un tema sumamente interesante

---

que se podría desarrollar en un futuro.

Hablemos un poco de las estrellas de neutrones. Para comenzar, éstas son el resultado del colapso de estrellas cuya masa es  $M \geq 8[M_{\odot}]$ , después de explotar como una supernova, cuando la fuerza de gravedad es equilibrada por la presión de degeneración entre las partículas subatómicas, neutrones principalmente. Cuando parece que todo está perdido para la estrella y que ha llegado su inevitable muerte, de entre el polvo estelar surge una nueva estrella, con nuevas propiedades, a éstos objetos se les conoce como estrellas de neutrones, que poseen radios de entre  $10[km] - 15[km]$ , y masas de entre  $1.44 [M_{\odot}] - 3[M_{\odot}]$ . Se sabe también que éstas producen una descarga de energía muy grande debido a la presencia de intensos campos magnéticos, éstos objetos son conocidos como pulsares [Bally \[2006\]](#). El mecanismo por el cual estrellas de neutrones (en principio electricamente neutras) poseen los campos magnéticos mas intensos [Reisenegger \[2013\]](#) conocidos por el hombre es aún un tema de debate, que está fuera de los propósitos de éste trabajo, pero permanece como una pregunta fundamental para conocer la naturaleza oculta en lo profundo del espacio.

En 1939 J.R. Oppenheimer & G.M. Volkoff y R.C. Tolman, presentan la solución de una estrella esféricamente simétrica, modelada como un fluido perfecto en equilibrio hidrostático, conocida como *Estrella TOV*, en honor a sus autores. Ésta solución representa una estrella de neutrones en equilibrio, sin rotación y sin carga. Hoy en día se puede resolver la TOV numéricamente, una revisión didáctica se puede encontrar en [E. O'Connor \[2010\]](#); [Guzmán et al. \[2012\]](#); [Papasotiriou \[2007\]](#). La mayoría de los resultados numéricos para estrellas de neutrones toman en consideración una ecuación de estado simple llamada politrópica, o bien politropas por pedazos, aunque algunos otros utilizan un modelo nuclear [Lattimer \[2012\]](#).

Pensemos en la vida de las estrellas y su evolución. Al pasar de su vida, las estrellas van consumiendo el combustible que obtienen de las reacciones nucleares en su interior. Hay por los menos tres situaciones críticas de interés que suceden al final de la vida de las estrellas, cuando el combustible nuclear se agota, éstas adquieren propiedades y clasificaciones diferentes que dependen principalmente de la masa que ha alcanzado la estrella, las estrellas con masa  $M < M_{Ch}$ <sup>1</sup>, se

---

<sup>1</sup> En donde  $M_{Ch} \simeq (1.2 - 1.4)[M_{\odot}]$  es el límite de masa de Chandrasekhar.

---

convertirán en enanas blancas. Al final de su etapa llegarán a temperatura cero, y su estado final será el de una enana café degenerada. Las estrellas con una masa de  $M_{Ch} < M < M_{OV}$ <sup>1</sup> seguirán enfriándose hasta convertirse en estrellas de neutrones degeneradas. Para  $M_{OV} < M$  no hay ningún estado posible de equilibrio y las estrellas colapsarán en un agujero negro [Karttunen H. Kroger and Donner \[2006\]](#).

---

<sup>1</sup>El límite de Oppenheimer-Volkoff es  $M_{OV} = (2.1 - 2.25)[M_{\odot}]$ .

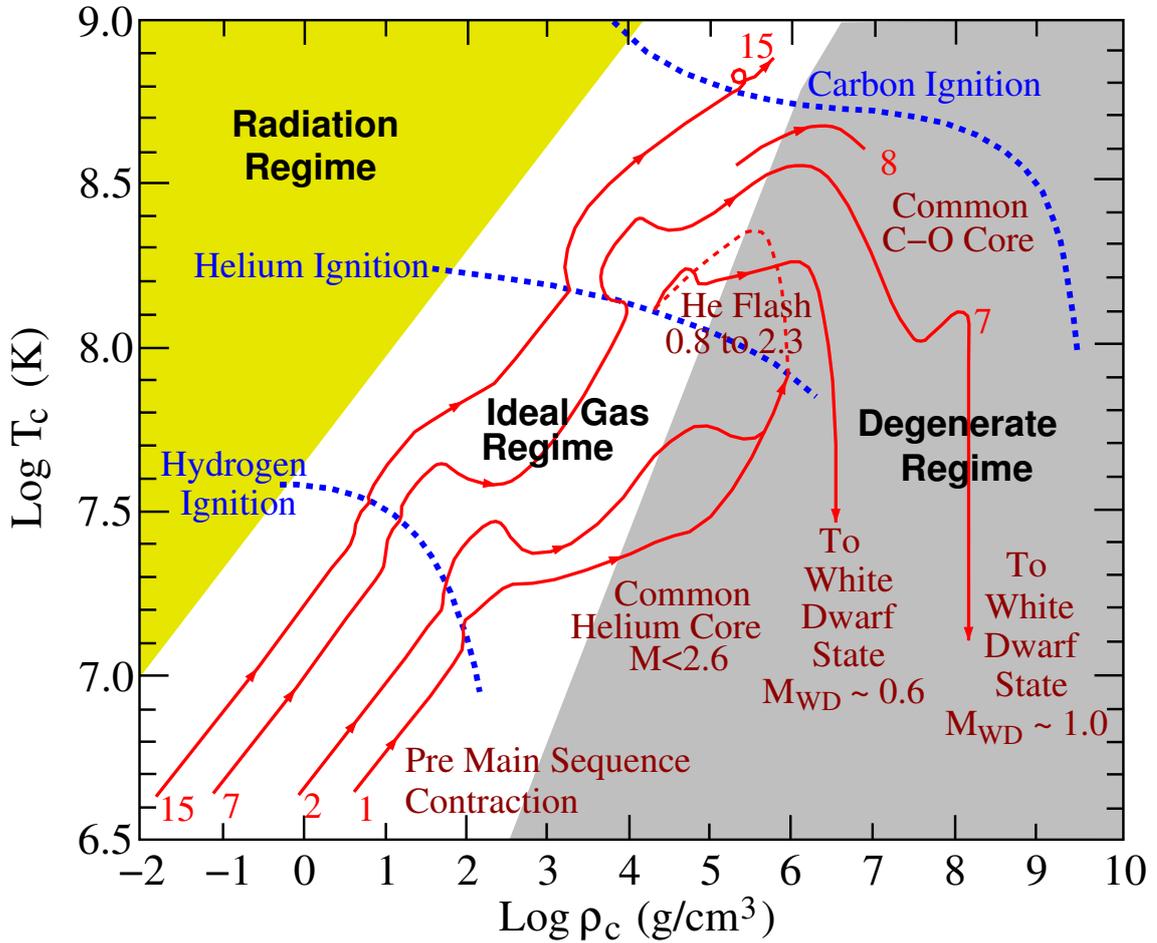


Figura 1.1: Evolución de una estrella de  $1 - 15[M_{\odot}]$ . La línea roja indica el camino de vida que tomará la estrella dependiendo de su masa inicial, mientras se mantenga en la zona **blanca**, la estrella continuará su vida quemando hidrógeno, helio o carbono, y aumentando su temperatura conforme va evolucionando. Sin embargo, tarde o temprano tendrá que cruzar la zona **gris**, que conducirá a la estrella a un proceso por el cual perderá gran parte de su masa, llegando así al final de su vida. Las estrellas más masivas  $M = 15[M_{\odot}]$  empiezan a quemar carbono, y continúan evolucionando a una densidad y temperatura superior. El núcleo de una estrella de  $7[M_{\odot}]$  cruza el límite de la degeneración de electrones antes de alcanzar a quemar el carbono, y se convertirá en una enana blanca. Las estrellas con una masa de  $1 - 2[M_{\odot}]$  cruzan el límite de degeneración antes de que el helio empiece a quemarse. Se espera que se conviertan en enanas blancas, sin embargo, sus núcleos de helio degenerados siguen calentándose debido a la capa de helio. Finalmente quemaran helio de manera inestable, lo que es conocido como flash de helio. *Diagrama realizado por Dany Page, basado en Pols [2011]*

---

Pero detengámonos un momento para analizar con más detalle las fases estelares, en la Figura 1.1 representamos las diferentes fases que puede tomar una estrella, éstas fases son descritas a continuación.

Hablemos entonces de la evolución estelar, al principio una nube de gas se contrae rápidamente debido a la gravedad, ya que el gas está disperso, la radiación se escapa fácilmente de la nube, mientras la nube se hace más densa, la radiación sufre más colisiones con las partículas de gas y hace que éste se caliente, la contracción sigue, hasta que todo el gas es completamente ionizado, y la protoestrella está en equilibrio hidrostático. En éste momento la estrella es convectiva en todo su interior. Después de esto las fases de evolución son mucho más lentas y éstas están determinadas por la masa de la estrella. Para  $M < 0.08[M_{\odot}]$  la temperatura en el centro no es lo suficientemente alta para quemar hidrógeno, y éstas se compactan hasta formar enanas marrones parecidas a planetas. Las estrellas con  $M \geq 0.08[M_{\odot}]$  empiezan a quemar hidrógeno cuando la temperatura alcanza los  $4 \times 10^6[K]$ , éste es el principio de la fase de la secuencia principal. En la secuencia principal las estrellas con una masa de  $0.08[M_{\odot}] \leq M \leq 0.26[M_{\odot}]$  son enteramente convectivas y permanecen homogéneas. Su evolución es muy lenta y después de que todo su hidrógeno ha sido convertido en helio, se compactan convirtiéndose en enanas blancas.

El incremento de la temperatura hace que estrellas con una masa de  $M \geq 0.26[M_{\odot}]$  sean radiativas en el centro mientras la opacidad decrece. Las estrellas con una masa de  $0.26[M_{\odot}] \leq M \leq 1.5[M_{\odot}]$  permanecen radiativas en el centro durante la fase de secuencia principal mientras queman su hidrógeno en la cadena *pp* (protón - protón). La parte exterior es convectiva, al final de la secuencia principal, el hidrógeno continúa quemándose en una capa que rodea al núcleo de helio. La parte exterior se expande y la fase gigante empieza; el núcleo de helio que se contrae es degenerado y se calienta, cuando alcanza aproximadamente los  $10^8[K]$ , empieza el proceso triple alfa y grandes cantidades de helio se convierten en carbono debido al proceso llamado ‘flash de helio’. La explosión es amortiguada por las partes exteriores y la quema de helio se centra en el núcleo, mientras el hidrógeno se sigue quemando en las capas exteriores. A medida que el helio central se acaba, la quema de helio se mueve hacia la superficie. Al mismo tiempo la parte exterior se expande y la estrella pierde parte de su masa. La envoltura en

---

expansión forma una nebulosa planetaria; la estrella en el centro de la nebulosa se convierte en una enana blanca.

En la secuencia principal más alta, cuando las estrellas alcanzan una masa  $M \geq 1.5[M_{\odot}]$  la energía es liberada a través del ciclo CNO y el núcleo se convierte en convectivo, mientras la parte exterior es radiativa. La fase de la secuencia principal acaba cuando el hidrógeno del núcleo es consumido, y empieza la quema de la superficie. El núcleo de helio permanece convectivo y no degenera, es cuando empieza la quema de helio sin perturbaciones. Después de eso, la quema de helio se mueve hacia la superficie.

Para las estrellas más masivas  $M \geq 8[M_{\odot}]$  el núcleo de carbón empieza a quemarse convirtiéndose en oxígeno y magnesio, finalmente la estrella consiste en un núcleo de hierro rodeado por una capa de silicio, oxígeno, carbono, helio e hidrógeno. El combustible nuclear ahora ha terminado y la estrella colapsa, dando como resultado una supernova. La parte exterior explota, pero el núcleo se contrae hasta formar una estrella de neutrones o un agujero negro [Karttunen H. Kroger and Donner \[2006\]](#).

Así pues, una estrella de neutrones es el resultado de una supernova. Su diámetro es de aproximadamente  $20 [km]$ , pero su masa es equiparable a la del sol (aproximadamente  $1.4[M_{\odot}]$ ). Estas estrellas tienen una densidad varias veces mayor a la de un núcleo atómico (aproximadamente  $10^{14}[g/cm^3]$ ), y ya que la estrella al colapsarse conserva su momento angular, la estrella resultante puede girar muy rápido. El modelo de capas estándar para una estrella de neutrones puede ser dividido en 5 partes [Page and Reddy \[2006\]](#): el núcleo interno y el externo, la corteza, una envoltura y la atmósfera. La atmósfera tiene campos magnéticos muy intensos del orden de  $10^{12}[Gauss]$  (el campo magnético del sol es de  $50[Gauss]$  y el de la tierra de  $0.5[Gauss]$ ), en donde núcleos y electrones coexisten a densidades promedio de  $10^6[g/cm^3]$ . Después en la envoltura, tenemos la existencia de núcleos pesados  ${}^{56}_{26}Fe$ ,  ${}^{62}_{28}Ni$ ,  ${}^{118}_{36}Kr$ , acomodados en una red rodeada de un gas de electrones libres que se mueven a una velocidad cercana a la de la luz. Núcleos pesados y electrones coexisten en una capa esférica de alrededor de  $0.3[km]$  de ancho, y una densidad que va desde  $10^6[g/cm^3]$  en el borde exterior hasta  $4 \times 10^{11}[g/cm^3]$  en el borde interior. En la corteza encontramos que los núcleos en la red se han enriquecido tanto de neutrones que ya no puede atar más neutrones, proceso co-

---

nocido como goteo de neutrones (neutron dip). Los neutrones libres forman un superfluido. Mezclado con éste superfluido y la red de núcleos existe un gas de electrones, todos en una corteza de  $0.5[km]$  de ancho, y con una densidad que va desde  $4 \times 10^{11}[g/cm^3]$  a  $2 \times 10^{14}[g/cm^3]$ , más internamente en una capa que va alrededor de  $1.2[km]$  de ancho, la densidad que va desde  $2 \times 10^{14}[g/cm^3]$  hasta  $5 \times 10^{14}[g/cm^3]$  es tan alta que energéticamente es mejor para los núcleos disolverse en neutrones y protones libres. Allí se forma un líquido cuántico de neutrones con concentraciones más pequeñas de protones en estado superconductor, el cuál puede sostener corrientes magnéticas y campos eléctricos por períodos indefinidos.

Si nos enfocamos ahora en la masa máxima alcanzada por el remanente de una estrella, las ecuaciones de estado para materia de alta densidad predicen una vasta cantidad de masas máximas diferentes para modelos estáticos (es decir que no rotan ni evolucionan en el tiempo) antes de que se conviertan en agujeros negros. Las masas van de  $2.16_{-0.15}^{+0.17}[M_{\odot}]$  [Most \[2018\]](#),  $(2.16 - 2.28)[M_{\odot}]$  [Ruiz et al. \[2018\]](#),  $2.17[M_{\odot}]$  [Margalit and Metzger \[2017\]](#),  $2.15 - 2.25[M_{\odot}]$  [Shibata et al. \[2017\]](#). Algunas simulaciones del colapso del núcleo sugieren una masa remanente inferior con dos picos, uno en  $1.3[M_{\odot}]$  y el otro en  $[1.7M_{\odot}]$  [Timmes \[1996\]](#).

Observacionalmente, las masas de un gran número de objetos compactos han sido determinadas, pero en la mayoría de los casos, la barra de error en las observaciones sigue siendo demasiado alta. Una publicación de las masas y espines para estrellas de neutrones determinados observacionalmente fue presentada por [Miller \[2015\]](#). Las estrella de neutrones mas pesadas con la mas alta precisión observada son el objeto *PSRJ1614 - 2230*, con una masa correspondiente  $M = 1.97 \pm 0.04[M_{\odot}]$  [Demorest \[2010\]](#), y la estrella *PSRJ0348 + 0432*, con  $M = 2.01 \pm 0.04[M_{\odot}]$  [Antoniadis \[2013\]](#), y hay indicadores de que estrellas más masivas existen [Bally \[2006\]](#). Las masas de los objetos compactos han sido medidas en diferentes tipos de sistemas binarios: binarias de estrellas de neutrones, binarias con una estrella de neutrones y una enana blanca, binarias de rayos X, y binarias compuestas de un objeto compacto que se acerca a la secuencia principal. Para la mayoría de las estrellas de neutrones binarias, las masas han sido determinadas con una buena precisión y están restringidas a un rango estrecho de cerca de  $1.2[M_{\odot}] - 1.4[M_{\odot}]$  [Thorsett \[1999\]](#). Éste rango de masas relativamente pequeñas esta probablemente relacionado con las condiciones de estabilidad

---

cuando los sistemas binarios de estrellas de neutrones son formados. Las masas determinadas para estrellas compactas en sistemas binarios de rayos X aún tienen barras de errores demasiado grandes, pero son consistentemente mayores a  $1.4M_{\odot}$ , lo que es probablemente resultado de la acreción de masa [Paschalidis and Stergioulas \[2017\]](#).

Estudiemos ahora las propiedades de la materia con la finalidad de entender un poco más acerca de la composición de las estrellas. Si nos preguntamos que hay en el núcleo de una estrella o de que se compone el mismo, suele decirse que el núcleo interno es hadrónico <sup>1</sup>, a densidades del orden de  $10^{15}[g/cm^3]$ . Se ha sugerido que es en ésta parte de la estrella de neutrones en donde podríamos encontrar materia hiperónica<sup>2</sup>, o condensados de kaones o piones (mesones ligeros), o que podríamos tener una mezcla de quarks libres y materia nuclear.

Si el núcleo central de la estrella tuviera una población de quarks *up*, *down* y *strange*, sería de esperarse que los primeros dos estuvieran más presentes, ya que el quark tipo *strange* es más masivo, dando como resultado una carga eléctrica positiva que atraería electrones, que daría como resultado un núcleo metálico opaco a la luz. Sin embargo se ha mostrado que a densidades altas el quark *strange* muestra mayor estabilidad. De ésta forma igualaría la población de quarks *up* y *down*. Ésto crearía un núcleo eléctricamente neutro en el interior de las estrellas de neutrones, libre de electrones y transparente, donde la luz, sin la posibilidad de ser absorbida por los electrones se reflejaría en sus límites como si fuera un diamante. Sin embargo ninguna de las propuestas mencionada ha sido aceptada [Salas and Solís \[2006\]](#).

---

<sup>1</sup>Los hadrones son partículas que permanecen unidas debido a la interacción fuerte, es decir que éstas son formadas por quarks. Se dice que son mesones si están formados por un quark y un antiquark y su espín total es entero, mientras los bariones están formados por 3 quarks y su carga de color es neutra, además contienen un espín total semientero

<sup>2</sup> Bariones que contienen quarks *strange*, mientras el protón y neutrón sólo contienen los dos quarks mas livianos, *up* y *down*.

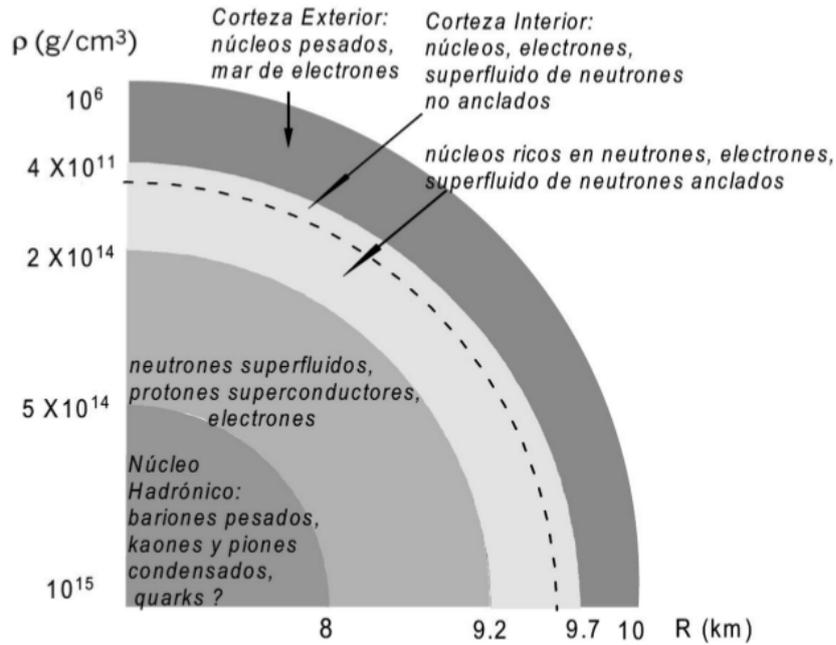


Figura 1.2: Interior de una estrella de neutrones, en donde se muestran las distintas capas que posiblemente conformen a la estrella. Se observa que en el interior habitarían los neutrones en un estado de superfluidez y superconductividad, mientras que en el exterior, formarían una capa sólida. Diagrama artístico [Salas and Solís \[2006\]](#)

En principio, las estrellas de neutrones y quarks pueden coexistir, como se puede apreciar en la Figura 1.2. Sin embargo, si los quarks son el verdadero estado base, la galaxia podría estar contaminada con granos de quarks, que dependiendo de sus velocidades, podrían convertir las estrellas de neutrones en estrellas de quarks [Madsen \[1999\]](#); [R.R. Caldwell \[1991\]](#); [Weber and Glendenning \[1990\]](#). Esto significa que los objetos conocidos como pulsares podrían ser estrellas de quarks girando, en lugar de estrellas de neutrones. Otra consecuencia de la hipótesis es que podría existir una nueva clase de estrella densa compuesta de quarks parecida a las enanas blancas, llamada “enana extraña”, ésta estrella tendría una corteza compuesta principalmente de neutrones, pero su núcleo estaría formado por quarks, específicamente los quarks *up*, *down* y *strange*, de ahí el nombre de “strange dwarf”.

Las estrellas de neutrones pueden convertirse en estrellas extrañas de ( $1 \sim$

---

2) $[M_{\odot}]$ , con un radio aproximado de  $\sim 10[Km]$ . Al igual que para estrellas de neutrones, las estrellas extrañas pueden poseer una superficie de quarks capaz de radiar energía a una tasa que excede por mucho el límite de Eddington <sup>1</sup>, pero con una baja emisividad de rayos X. Un hecho interesante es que podrían enfriarse de una forma eficiente a través de la emisión de neutrinos, se conjetura que podría ser que no existan estrellas de neutrones, sino únicamente estrellas extrañas.

Había dos razones para dudar que una tercera familia de estrellas fuera permitida <sup>2</sup>. La primera razón es física, la otra matemática. La razón física es la ausencia de un mecanismo análogo a la que usan las dos familias conocidas. Las enanas blancas son estables debido a la presión de degeneración de los electrones, que cae a tal densidad que la captura de electrones reduce su efectividad. La estabilidad es reestablecida nuevamente a densidades por encima de 5 órdenes de magnitud, cuando la presión de Fermi sobre los bariones (y en última circunstancia, la repulsión nuclear a corto rango) soporta a las estrellas de neutrones. Cuando las estrellas de neutrones pierden su estabilidad en su masa máxima, no hay un mecanismo evidente para estabilizar una familia de estrellas más densa. Sin embargo si ocurre un confinamiento de quarks, la presión de Fermi de los bariones es apoyada (sin ser reemplazada) por la presión de los quarks que la componen.

La razón matemática, está basada en el trabajo de J. A. Wheeler, a mediados de 1960's, Demuestra que para las ecuaciones de estado suaves no hay configuraciones estelares estables con densidades centrales por arriba de las que corresponden a la masa de las estrellas de neutrones. Dicho de otra forma, no podemos modelar estrellas de quarks con una ecuación de estado suave [Harrison \[1965\]](#). En consecuencia, no hay razón para esperar que una familia de estrellas degeneradas con una densidad mayor a la que pertenece a las estrellas de neutrones y enanas blancas exista. Sin embargo, hay una clase de ecuaciones de estado que describen una transición de fase a primer orden y que son insuficientemente "suaves" para obedecer la condición del teorema de Wheeler.

Para cualquier ecuación de estado lo suficientemente suave, las estrellas de

---

<sup>1</sup>Límite de luminosidad para una estrella por encima del cual la presión de los fotones es mayor a la presión debida a la fuerza de gravedad. Está dado como  $L_{Edd} = 3.2 \times 10^4 \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right) L_{\odot}$ , en donde  $M$  es la masa y  $L$  la luminosidad

<sup>2</sup>La primera familia son enanas blancas, la segunda son estrellas de neutrones

---

neutrones son el último caso de estrellas compactas estables.

Sin embargo, se muestra que las ecuaciones para la estructura estelar admiten soluciones estables para una densidad que sobrepasa a la densidad de las estrellas de neutrones, los ejemplos encontrados de una tercera familia ocurrirían por el deconfinamiento en la transición de fase que da cierta posibilidad de combinaciones de parámetros que definen las ecuaciones de estado para deconfinamiento de quarks. En éste caso pueden ser construidas estrellas del mismo tamaño pero de diferente densidad de energía así como diferente masa.

Ya que por lo menos la mitad de las estrellas conocidas pertenecen a un sistema binario, podríamos preguntarnos si las estrellas de quarks poseen alguna compañera en la ramificación de baja densidad que tienen la misma masa pero radio y composición diferente. El primer paso para obtener gemelas de alta densidad en la naturaleza es el colapso del núcleo de una estrella, en donde el núcleo de una estrella normal implosiona a la gemela de alta densidad. Hay muchas variables que pueden afectar el desenlace, tales como la masa, la rotación, la simetría, la composición química del progenitor y el proceso caótico de convección. Un segundo mecanismo de formación es a través de la acreción de un miembro integrante de la secuencia de baja densidad, seguida de una explosión menor. La existencia de una tercera clase de estrellas degeneradas estables demanda que la densidad no puede evolucionar de forma continua además de que el rango de densidades y masas que debería tener la estrella de quarks (si existiera), se verá afectado por el modelo de la ecuación de estado. No se tiene conocimiento experimental de que exista una densidad por arriba de la densidad nuclear, los actuales descubrimientos de estrellas de tercera clase, podrían revelar, de manera imperfecta, una ecuación de estado no suave posiblemente causada por un cambio de fase de densidad de materia que nunca conoceremos por experimentación en laboratorios. Si alguno fuera una fuente de rayos x, observaciones QPO (oscilaciones cuasi-periódicas) permitirían el uso del teorema inverso de Lindblom [Lindblom, 1992] para ganar conocimiento particular de la ecuación de estado Glendenning and Kettner [2000].

Así, el verdadero estado base de los hadrones sería “materia extraña” y no “ $^{56}\text{Fe}$ ” Witten [1984]. La materia extraña estaría constituida por un puñado de quarks que consiste en igual número de *up*, *down* y *strange* quarks, mas un número

---

pequeño de electrones para garantizar neutralidad eléctrica, ésta materia extraña podría tener menor energía por barión que los núcleos ordinarios. Witten identificó dos escenarios astrofísicos para la producción de materia extraña. El primer escenario propuesto para la producción de ésta materia, sería cuando el universo se enfriaba a través de transiciones de fase que siguen la teoría de la cromodinámica cuántica a una temperatura  $T_c = (100 - 200)[MeV]$ , ésta temperatura caracteriza a la energía de la interacción fuerte. Éste modelo a sido criticado por [Applegate and Hogan \[1985\]](#), y en cualquier evento a sido mostrado que toda la materia extraña producida en ésta época temprana se evaporó completamente mientras el universo se enfriaba a una temperatura que ronda  $\sim 10[MeV]$  [Alcock and Farhi \[1985\]](#). El segundo escenario en el que Witten predice la aparición de materia extraña es en las estrellas de neutrones, que a lo largo de su vida se convertirían en estrellas extrañas.

Así pues, si los núcleos ordinarios hechos de quarks *up* y *down*, estuvieran sujetos a la presión suficiente, las ataduras atómicas se disolverían y una transición de fase a materia extraña ocurriría. En ésta fase no habría confinamiento y los hadrones no existirían. Los quarks *up* y *down* podrían convertirse a otros sabores de quarks por la interacción débil, y lo harían en materia de quarks, ya que necesitan bajar la energía de Fermi incrementando la degeneración. En la práctica, sólo los quarks *up*, *down* y *strange* pueden conformar la materia de quarks, ya que otros sabores tienen masas mucho mayores que el potencial químico involucrado ( $\sim 300MeV$ ). Pueden consultarse los valores para la carga, color, masa y spin asociados a las partículas predichas por el modelo estándar en la [Figura 2.2](#).

Witten conjeturó que a presión cero, 3 sabores de quarks podrían tener menor energía por número bariónico que un núcleo ordinario. Ésto podría hacer a la materia extraña la substancia más estable conocida. Los núcleos ordinarios podrían bajar su energía convirtiéndose en materia extraña, pero las probabilidades de tales conversiones son insignificantes casi en cualquier condición, excepto en las estrellas de neutrones. La materia extraña puede ser modelada como un gas de Fermi de quarks *up*, *down* y *strange* junto con los electrones necesarios para neutralizar su carga. La región en la que viven los quarks está caracterizada por una constante de energía por unidad de volumen,  $B$ . Éste parámetro fenomenológico es determinado por la dinámica de interacción fuerte, pero es incalculable dado

---

nuestro presente entendimiento de la teoría QCD. El otro parámetro importante es la masa de la materia de quarks  $m_s$ , y la constante de acoplamiento para la interacción fuerte  $\alpha_s$ <sup>1</sup>. El valor de la masa para la materia extraña es desconocido pero ronda probablemente de  $(50 - 350)[MeV/c^2]$  (la masa de los quarks *up* y *down* es despreciable). Se suele trabajar a temperatura cero ya que la temperatura de la estrella, es siempre mucho más pequeña que la de los potenciales químicos.

Por otro lado, las reacciones para que ocurra el equilibrio químico entre los tres sabores de quarks y los electrones son:

$$d \longrightarrow u + e + \bar{\nu}_e, \quad (1.1)$$

$$u + e \longrightarrow d + \nu_e, \quad (1.2)$$

$$s \longrightarrow u + e + \bar{\nu}_e, \quad (1.3)$$

$$u + e \longrightarrow s + \nu_e, \quad (1.4)$$

$$s + u \longleftrightarrow d + u. \quad (1.5)$$

Debido a las reacciones (1.1 - 1.4), la energía de la estrella se pierde, es decir, la estrella se enfría, ya que los neutrinos son expulsados. La pérdida de neutrinos significa que el potencial químico de neutrinos será igual a cero. La reacción (1.5) contribuye solamente al equilibrio de los sabores [Alcock et al. \[1986\]](#).

Llegados a éste punto, hablemos ahora de cómo podemos construir una estrella de neutrones o de quarks para estudiar sus propiedades. Si pensamos en las ecuaciones que rigen a éstos sistemas y si podemos resolver de alguna forma éstas ecuaciones, tendríamos en principio, la forma de estudiar estos cuerpos. Así, en el presente trabajo, tenemos como objetivo construir un código que resuelva numéricamente las ecuaciones diferenciales de Tolman- Oppenheimer-Volkoff mas una ecuación de estado (EoS), usaremos la politrópica cuando hablemos de estrellas de

---

<sup>1</sup>La constante de acoplamiento determina la fuerza de interacción con respecto a la parte cinética, o entre dos sectores de la parte que interacciona.

---

neutrones, o la EoS “MIT bag-model” para estrellas de quarks. Ésto lo haremos estableciendo condiciones iniciales y con la ayuda de un método de integración Runge-Kutta clásico, obtendremos parámetros tales como la presión, densidad, y los parámetros  $\alpha$  y  $a$  que corresponden a la métrica de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, definidos apropiadamente en el Capítulo 2.5, para una estrella modelada como una esfera estática, para diferentes configuraciones de estrellas de quarks. También se hace un análisis en el que se calcula la masa total de la estrella para una densidad central dada, posteriormente se varía la densidad y se obtienen configuraciones en donde la estrella es estable o inestable<sup>1</sup>.

El código que construimos está escrito en lenguaje computacional fortran 90, Éste código está diseñado para integrar numéricamente ecuaciones diferenciales. Hemos ocupado un esqueleto que está basado en el código “CAFE” Lora-Clavijo et al. [2015]. Un diagrama de flujo del mismo puede ser consultado en la sección (3.5), cabe señalar que los cálculos que hace la máquina son sencillos, llegan a tardar de un par de segundos a algunos minutos por cada corrida de programa.

La tesis está organizada de la siguiente manera. En el Capítulo 2 se presentan las bases teóricas que son usadas para la construcción de éste trabajo, una revisión de las ecuaciones de Einstein, la solución de Schwarzschild y las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, así como una deducción de las ecuaciones de estado (EoS politropica y EoS MIT Bag-Model). En el Capítulo 3 se presenta la teoría numérica implementada, el método Runge-Kutta de cuarto orden, así como un diagrama de flujo del código usado para modelar las estrellas de neutrones y quarks. En el Capítulo 4 se muestran los resultados numéricos, en donde analizamos los parámetros que caracterizan a las estrellas de quarks, uno de ellos que resulta de suma importancia es la energía por unidad de volumen de la bolsa de quarks,  $B$ , que intuitivamente es una energía propia de la bolsa que mantiene encerrados a los quarks dentro de ella, se muestran también los resultados de diferentes configuraciones de estrellas, es decir, como cambia el radio y la masa de la estrella cuando cambiamos la energía de la bolsa  $B$ . Todos éstos datos están resumidos y se pueden observar en la Tabla 4.4. Por último se comparan los resultados obtenidos con observaciones tomadas de pulsáres, ya que la evidencia de las estrellas de quarks sigue en la sombra, especulamos que pasaría si los objetos

---

<sup>1</sup>Colapsa a un agujero negro

---

observados fuesen en realidad estrellas de quarks. Finalmente en el capítulo 5 se presentan las conclusiones del trabajo realizado.

# Capítulo 2

## Ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff

Las estrellas de neutrones y estrellas de quarks en relatividad general se obtienen de la solución de las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV). Ésta solución supone la configuración de un fluido ideal en equilibrio hidrostático y es representado por una métrica del espacio-tiempo estática y estacionaria en simetría esférica. En este capítulo se describen las ecuaciones básicas necesarias para obtener y resolver las ecuaciones TOV. Se presentan las dos versiones, la formulación newtoniana y la relativista, sin embargo en éste trabajo usaremos las ecuaciones de TOV relativistas. Se describen dos ecuaciones de estado, la ecuación de estado “politrópica” para construir una estrella de neutrones y la ecuación de estado llamada “MIT Bag model” para construir una estrella de quarks.

### 2.1. Formulación 3+1 del espacio-tiempo

Ya que la relatividad general es una teoría que involucra al tiempo como dimensión extra, y dado que en general es difícil visualizar el comportamiento de los objetos que habitan en 4 dimensiones, existen métodos que permiten descomponer las ecuaciones de Einstein. A uno de éstos se le llama formulación 3+1, que descompone las ecuaciones en 3 componentes espaciales llamadas hipersuperficies que evolucionan en una dimensión temporal. Es de importancia señalar que en

---

éste trabajo no se evolucionan las ecuaciones en el tiempo; sin embargo las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff son escritas en ésta formulación. Ahora bien, de forma muy breve, hablaremos de los distintos parámetros involucrados:

- La métrica espacial  $\gamma_{ij}$ , que mide la distancia en las hipersuperficies, está dada como:

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.1)$$

- La función lapso  $\alpha$ , que relaciona al tiempo propio (tiempo que se mide en un marco de referencia co-móvil) con el tiempo que se mide desde un marco de referencia a una velocidad dada (marco de referencia lagrangiano), está definida a través de:

$$d\tau = \alpha dt. \quad (2.2)$$

- El vector de corrimiento  $\beta^i$  es la velocidad relativa entre los observadores de Euler y las líneas con coordenadas espaciales constantes.

$$x^i_{t+dt} = x^i_t - \beta^i dt,$$

a las funciones  $\alpha$  y  $\beta^i$ , se les conoce como funciones de norma. Usando las ecuaciones (2.1) y (2.2) se puede escribir el elemento de línea  $ds^2 = -d\tau^2 + dl^2$  explícitamente como:

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta_j \beta^j) d\tau^2 + 2\beta_i dt dx^i + \gamma_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.3)$$

El tensor métrico en forma matricial y su inverso pueden ser escritos como:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha + \beta_j \beta^j & \beta^i \\ \beta^i & \gamma_{ij} \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1/\alpha & \beta^i/\alpha^2 \\ \beta^i/\alpha^2 & \gamma^{ij} - \beta^i \beta^j/\alpha^2 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

en donde  $\gamma^{ij}$  es la inversa de la 3-métrica  $\gamma_{ij}$ . Es importante notar, que cuando se

---

tiene simetría esférica, la matriz métrica solo tiene componentes en la diagonal. Para más información, el lector interesado puede consultar la siguiente bibliografía [Alcubierre \[2008\]](#); [Baungarte and Shapiro \[2010\]](#). En la siguiente sección se podrá verificar que para nuestro caso, sólo necesitamos conocer  $\alpha(r)$ , en función de la coordenada radial “ $r$ ” para describir al espacio-tiempo de una estrella, ya sea de neutrones o de quarks.

## 2.2. Breve introducción de conceptos básicos de relatividad general

Los postulados de la relatividad general son los siguientes:

- Principio de covarianza - las ecuaciones de la física son invariantes (tienen la misma forma) respecto al sistema de referencia
- Principio de equivalencia - el resultado de un experimento no gravitacional desde un laboratorio en caída libre es independiente de la velocidad del sistema de referencia y su localización en el espacio-tiempo
- Curvatura del espacio tiempo - el espacio tiempo es una consecuencia de un campo gravitatorio, y la gravedad es un efecto de la curvatura del espacio tiempo

Para calcular, entre otras cosas, distancias en una hipersuperficie no euclídea (un toroide por ejemplo), es necesario utilizar la teoría de geometría diferencial de Riemann. Una de las motivaciones de Einstein, fue encontrar una forma de escribir las ecuaciones de la física independientes del sistema coordenado elegido, cuando se usa el cálculo tensorial, se pueden encontrar relaciones que permiten que ésto suceda (invariancia). Definamos pues, el cuadrado de un desplazamiento infinitesimal  $ds$  en una hipersuperficie:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (2.6)$$

en donde  $g_{\alpha\beta}$  son las componentes del tensor métrico. La notación que suele usarse para representar las componentes del tensor métrico suele estar de acuerdo con el

---

sistema de referencia elegido. Podemos denotar en general las componentes por números que van del 0 al 3, en donde el 0 tiene una equivalencia con la coordenada temporal, y los números (1, 2, 3) se refieren a las coordenadas espaciales. Éstas bien pueden ser  $(x, y, z)$  o  $(r, \theta, \phi)$ , dependiendo del sistema coordenado. Éste tensor métrico puede ser definido en términos de los vectores base como:

$$g_{\alpha\beta} = \hat{\mathbf{e}}_\alpha \cdot \hat{\mathbf{e}}_\beta.$$

Es importante recordar que  $ds^2$  es una cantidad invariante, que no depende del sistema coordenado elegido.

Ahora bien, si tenemos las componentes del tensor métrico, podemos construir unas cantidades llamadas símbolos de Christoffel denotados por  $\Gamma_{\alpha\beta}^\nu$ , que presentan la forma

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\nu = \frac{1}{2} g^{\nu\eta} (\partial_\alpha g_{\beta\eta} + \partial_\beta g_{\alpha\eta} - \partial_\eta g_{\alpha\beta}), \quad (2.7)$$

en donde  $\partial_\alpha = \partial/\partial x^\alpha = (\cdot)_{,\alpha}$ . Con ésto podemos construir el tensor de Riemann, que descrito de forma rápida e informal, representa una separación de la métrica construida en el espacio curvo, con la métrica del espacio plano o euclideana. Éste tensor está dado en términos de los símbolos de Christoffel como:

$$R_{\beta\eta\nu}^\alpha = \Gamma_{\beta\nu,\eta}^\alpha - \Gamma_{\beta\eta,\nu}^\alpha + \Gamma_{\sigma\eta}^\alpha \Gamma_{\beta\nu}^\sigma - \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha \Gamma_{\beta\eta}^\sigma. \quad (2.8)$$

Además si bajamos el índice  $\alpha$  con la ayuda de la métrica

$$g_{\alpha\lambda} R_{\beta\eta\nu}^\lambda = R_{\alpha\beta\eta\nu},$$

podemos verificar que éste tensor tiene las siguientes propiedades

$$R_{\alpha\beta\eta\nu} = -R_{\beta\alpha\eta\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\eta} = R_{\eta\nu\alpha\beta}, \quad (2.9)$$

$$R_{\alpha\beta\eta\nu} + R_{\alpha\nu\beta\eta} + R_{\alpha\eta\nu\beta} = 0, \quad (2.10)$$

en donde la ecuación (2.10) es llamada “primera identidad de Bianchi”. Además

---

se puede verificar la siguiente relación llamada “segunda identidad de Bianchi”

$$R_{\alpha\beta\eta\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\eta;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\eta} = 0, \quad (2.11)$$

en donde  $(\ )_{;\nu}$  es la derivada covariante, que toma en cuenta la curvatura de la métrica. La derivada covariante actúa de forma diferente dependiendo del tensor al que es aplicada. Nos limitaremos a escribir las 3 formas más comunes para un tensor de dos dimensiones en su forma covariante, contravariante y una mezcla de ambas [Schutz \[2009\]](#):

$$\nabla_{\beta}T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu,\beta} - T_{\alpha\nu}\Gamma_{\mu\beta}^{\alpha} - T_{\mu\alpha}\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha}, \quad (2.12)$$

$$\nabla_{\beta}T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{,\beta} + T^{\alpha\nu}\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} + T^{\mu\alpha}\Gamma_{\alpha\beta}^{\nu}, \quad (2.13)$$

$$\nabla_{\beta}T_{\nu}^{\mu} = T_{\nu,\beta}^{\mu} + T_{\nu}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} - T_{\alpha}^{\mu}\Gamma_{\nu\beta}^{\alpha}. \quad (2.14)$$

Si ahora contraemos el tensor de Riemann dado por la ecuación (2.8) en la primera y tercera componente, obtenemos el llamado tensor de Ricci

$$R_{\beta\nu} = R_{\beta\alpha\nu}^{\alpha} = R_{\nu\beta}. \quad (2.15)$$

Podemos usar otras contracciones en lugar de  $\alpha-\eta$ , por ejemplo  $(\alpha-\beta), (\beta-\nu)$  etc. Sin embargo, usando las propiedades mostradas en las ecuaciones (2.9) y (2.10), podríamos hacer ver que éstas ecuaciones se anulan, o bien se reducen a  $\pm R_{\alpha\beta}$ . Podemos afirmar entonces que el tensor de Ricci es la única contracción del tensor de Riemann [Schutz \[2009\]](#).

El escalar de Ricci se obtiene contrayendo nuevamente el tensor de Ricci

$$R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}, \quad (2.16)$$

contrayendo la segunda identidad de Bianchi dada por la ecuación (2.10), con un par de tensores métricos y usando las definiciones para el tensor de Ricci y el escalar de Ricci, puede demostrarse que la siguiente cantidad se conserva

$$\nabla_{\alpha} \left( R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R \right) = 0, \quad (2.17)$$

---

en donde la cantidad en paréntesis en la ecuación (2.17) es llamada el tensor de Einstein  $G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R$ .

Supongamos que podemos construir un tensor en el que intervengan las propiedades físicas, por ejemplo la energía, presión, densidad, campos eléctricos y magnéticos etc, y además éste tensor está relacionado con el espacio-tiempo y llamémosle  $T^{\alpha\beta}$ . Einstein y Hilbert encontraron de manera casi simultanea justo ésta relación, que advierte que la energía deforma el espacio-tiempo, o que una deformación en el espacio tiempo debe ser causada por alguna energía. Éstas ecuaciones son llamadas ahora “Ecuaciones de campo de Einstein” y pueden ser escritas como:

$$G^{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\alpha\beta}. \quad (2.18)$$

Se observa de aquí inmediatamente, gracias a la ecuación (2.17), que el tensor  $T^{\alpha\beta}$  es una cantidad conservada, es decir, el tensor de energía-momento se conserva

$$\nabla_{\alpha}T^{\alpha\beta} = 0. \quad (2.19)$$

Aunque ésta ecuación de conservación se obtiene directamente de la relación de Einstein entre el espacio-tiempo y la materia, esta expresión solo confirma algo que nosotros ya conocíamos previamente, es decir, la conservación de la energía, la conservación del momento y la conservación de la densidad de materia.

### 2.3. Solución de Schwarzschild de un hoyo negro estático y estacionario.

Supongamos que deseamos encontrar una solución para las ecuaciones de Einstein que describan el espacio-tiempo afuera de un cuerpo esféricamente simétrico y estático. Cuando tenemos un espacio vacío (es decir, cuando no tenemos materia ni energía que provoquen presión, densidad, temperatura, campos electromagnéticos, etc.) todas las componentes del tensor de energía momento se hacen cero  $T^{\alpha\beta} = 0$ . De ésta forma las ecuaciones de campo de Einstein toman la forma

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 0. \quad (2.20)$$

---

Observemos que en el vacío, se cumple

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu} \left( R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) &= 0, \\
g_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\mu} R &= 0, \\
R - \frac{1}{2} 4R &= 0, \\
R &= 0,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Así que las ecuaciones de Einstein en el vacío pueden escribirse simplemente como

$$R^{\mu\nu} = 0. \tag{2.22}$$

Proponemos ahora un elemento de línea para una simetría esférica, que no depende del tiempo y sin rotaciones (estático )

$$ds^2 = -e^{X(r)} c^2 dt^2 + e^{Y(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \tag{2.23}$$

en donde se ha usado la signatura  $(-, +, +, +)$ , usando las ecuaciones (2.22) y (2.6) obtenemos un par de ecuaciones diferenciales para  $e^{X(r)}$  y  $e^{Y(r)}$  que al resolverlas nos arrojan la solución

$$g_{00} = -e^{X(r)} = - \left( 1 + \frac{b}{r} \right), \tag{2.24}$$

$$g_{11} = e^{Y(r)} = \left( 1 + \frac{b}{r} \right)^{-1}, \tag{2.25}$$

en donde  $b$  es una constante. En el límite newtoniano, la métrica tiene que aproximarse al espacio de Minkowski mas un término extra que representa una pequeña perturbación debida a un pequeño campo gravitacional [Collier \[2014\]](#), esta condición puede escribirse como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{2.26}$$

en donde  $\eta_{\mu\nu}$  representa la métrica de Minkowski. Se puede demostrar que  $h_{00} =$

---

$\frac{2\Phi}{c^2}$ , en donde  $\Phi = -\frac{GM}{r}$  es el potencial gravitatorio newtoniano y así

$$g_{00} = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right), \quad (2.27)$$

en donde  $G$  es la constante de gravitación universal,  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío,  $M$  es la masa del objeto macroscópico y  $r$  es la distancia desde la superficie del objeto. Si comparamos la ecuación (2.27) con la ecuación (2.25) encontramos el valor para nuestra constante  $b = -2GM/c^2$ , por lo que podemos reescribir el elemento de línea dado por la ecuación (2.23) como

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.28)$$

La ecuación (2.28) es la llamada “métrica de Schwarzschild”, y resulta relevante para éste trabajo debido a que fuera de la estrella que vamos a construir, tenemos que aproximar la solución numérica a una métrica de éste tipo.

## 2.4. Formulación Newtoniana de las estrellas TOV

Desde un punto de vista newtoniano, las ecuaciones diferenciales que representan a un cuerpo simétricamente esférico, homogéneo, isotrópico en equilibrio hidrostático pueden ser derivadas de la siguiente forma

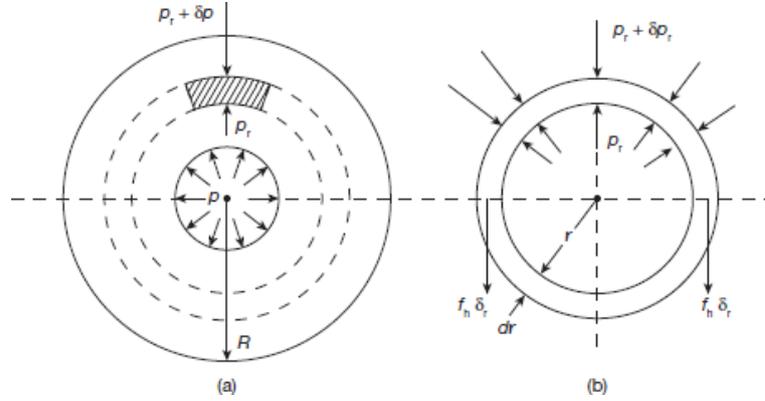


Figura 2.1: Cambio de la presión en las capas de una esfera de radio  $r$  (a) y equilibrio hidrostático entre la fuerza de gravedad y la fuerza del fluido que quiere expandirse (b). *V. Ramasamy [2012]*

Como es común suponer, supongamos pues, que nuestra esfera está formada de muchísimas capas, que se superponen una tras otra. Cada una de éstas tiene un espesor  $dr$ , justo como se muestra en la Figura 2.1. La masa de alguna de éstas capas será

$$dm(r) = m(r + dr) - m(r) = 4\pi r^2 \rho_0(r) dr, \quad (2.29)$$

o bien

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho_0(r). \quad (2.30)$$

Si consideramos que las fuerzas que interactúan por unidad de área únicamente son debidas a la gravedad y presión, tenemos, ya que éstas son contrarias, que el sistema no colapsa y se encuentra así, el equilibrio hidrostático. Escribamos la fuerza debida a la gravedad como:

$$F_g = -g(r) \rho_0(r) dr = -G \frac{m(r) \rho_0(r) dr}{r^2}, \quad (2.31)$$

en donde el signo negativo por supuesto indica que se dirige hacia el centro de la esfera. Por otro lado la fuerza por unidad de área que resulta de la diferencia de

---

presión entre  $r$  y  $dr$  será:

$$p(r) - p(r + dr) = -\frac{\partial p}{\partial r} dr, \quad (2.32)$$

que puede ser interpretado como un gradiente de presión, en donde el signo negativo indica que su dirección es hacia afuera.

Pues bien, la fuerza por unidad de área que se debe a la presión del gas y a la radiación emitida viene dada por:

$$F_p = -\frac{\partial p}{\partial r} dr, \quad (2.33)$$

y por la segunda ley de newton podemos escribir

$$\rho_0 dr \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = F_g + F_p = -G \frac{m(r)\rho_0(r)dr}{r^2} - \frac{\partial p}{\partial r} dr, \quad (2.34)$$

considerando que el sistema no tiene aceleración y cambiando la parcial por la derivada total, ya que nuestro sistema sólo depende del radio “ $r$ ” obtenemos

$$\frac{dp}{dr} = -G \frac{m(r)\rho_0(r)}{r^2}. \quad (2.35)$$

Obsérvese que la cantidad  $dp/dr$  es siempre negativa, (bajo condiciones de equilibrio hidrostático). Ésto significa que la presión va disminuyendo a medida que nos alejamos del centro y así la densidad y temperatura deben de incrementarse conforme nos movemos hacia el centro del cuerpo esférico. Si definimos al potencial gravitacional newtoniano como  $\phi = -G \frac{m(r)}{r}$ , entonces podemos escribir la ecuación (2.35) como

$$\nabla p = -\rho_0 \nabla \phi. \quad (2.36)$$

Sustituyendo la ecuación (2.36) en la ecuación de Poisson dada como  $\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho_0$  obtenemos

$$\nabla \cdot \left( \frac{\nabla p}{\rho_0} \right) = -4\pi G \rho_0, \quad (2.37)$$

---

que en coordenadas esféricas toma la siguiente forma

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\rho_0} \frac{dp}{dr} \right) = -4\pi G \rho_0. \quad (2.38)$$

Las ecuaciones (2.30) y (2.38) L. D. Landau [1959] constituyen dos ecuaciones en tres variables desconocidas  $\rho_0(r)$ ,  $p(r)$  y  $m(r)$ , la tercera ecuación que necesitamos es una ecuación de estado que relacione estas cantidades Oppenheimer [1939]; Tolman [1934] [Vease también A.M. Oliveira and J.C. Fabris [2014]; Velten et al. [2016] ].

## 2.5. Formulación relativista de las estrellas TOV

Las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff son una solución a las ecuaciones de Einstein, dadas por la ecuación (2.18), para un espacio-tiempo esféricamente simétrico, estático y estacionario. Por otro lado la materia esta compuesta de un gas ideal en equilibrio hidrostático.

*Geometría del espacio-tiempo.* Partiendo de la métrica 3+1 dada por la ecuación (2.3), y tomando en cuenta las características del espacio-tiempo ya mencionadas, el elemento de línea toma la siguiente forma

$$ds^2 = -e^{2\phi(r)} c^2 dt^2 + \left( 1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.39)$$

en donde  $d\Omega$ , es llamado el diferencial de ángulo sólido, que en coordenadas esféricas y elevado al cuadrado adopta la forma  $d\Omega^2 = \sin^2\theta d\phi^2 + d\theta^2$ . Éste elemento de línea corresponde a un cuerpo simétricamente esférico y estático, es decir, que sus componentes no dependen del tiempo (estacionario) y además la métrica es diagonal ya que el vector de killing de tipo temporal es ortonormal a una familia de hipersuperficies espaciales, ya que la existencia de términos fuera de la diagonal, no harían invariante la geometría bajo un cambio en la dirección temporal de  $t \rightarrow -t$  o bien, de manera informal, el cuerpo no rota Carroll [1997]. Se puede obtener el tensor métrico  $(g_{\mu\nu})$  y su inversa  $(g^{\mu\nu})$ , que estarán dados

---

por las siguientes expresiones:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -e^{2\phi(r)}c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (r \sin \theta)^2 \end{pmatrix},$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{-e^{-2\phi(r)}}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (r \sin \theta)^{-2} \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Con esto en mente, calculamos los símbolos de Christoffel. (Por comodidad hagamos  $G = c = 1$ , aunque luego los recuperaremos) denotados por  $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ , el tensor de curvatura de Ricci ( $R_{\mu\nu}$ ), el escalar de curvatura ( $R$ ) y el tensor de Einstein ( $G_{\mu\nu}$ ) para la parte geométrica, entendiendo que las componentes solamente dependen del radio, se puede escribir  $m' = \frac{\partial m}{\partial r}$ ,  $p' = \frac{\partial p}{\partial r}$ , etc. Los símbolos de Christoffel que no son cero resultan ser:

$$\Gamma_{tr}^t = \phi', \quad (2.41)$$

$$\Gamma_{tt}^r = \phi' e^{2\phi} \left(1 - \frac{2m}{r}\right), \quad (2.42)$$

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{rm' - m}{r^2 - 2rm}, \quad (2.43)$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r}, \quad (2.44)$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = 2m - r\theta, \quad (2.45)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = \sin^2\theta(2m - r), \quad (2.46)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin\theta \cos\theta, \quad (2.47)$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^\phi = \cot\theta. \quad (2.48)$$

Con los símbolos de Christoffel, las componentes del tensor de Ricci que no son

---

cero resultan ser:

$$R_{tt} = e^{2\phi} \left[ (\phi'' + \phi'^2) \left(1 - \frac{2m}{r}\right) + \phi' \left(\frac{2r - 3m - rm'}{r^2}\right) \right], \quad (2.49)$$

$$R_{rr} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \left[ \frac{(rm' - m)(2 + r\phi')}{r^3} \right] - (\phi'' + \phi'^2), \quad (2.50)$$

$$R_{\theta\theta} = (2r - m)\phi' + m' + \frac{m}{r}, \quad (2.51)$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2 \theta \left( (2r - m)\phi' + m' + \frac{m}{r} \right). \quad (2.52)$$

$$(2.53)$$

Así el escalar de Ricci está dado como:

$$R = 2 \left[ \frac{2m'}{r^2} + \frac{\phi'(3m - 2r + rm')}{r^2} - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) (\phi'' + \phi'^2) \right], \quad (2.54)$$

y las componentes del tensor de Einstein (recuperando G y c) son:

$$G_{tt} = \frac{2Ge^{2\phi}m'}{r^2}, \quad (2.55)$$

$$G_{rr} = \frac{2}{r} \left( \phi' - \frac{mG(1 - \frac{2Gm}{rc^2})}{r^2c^2} \right), \quad (2.56)$$

$$G_{\theta\theta} = r(\phi'^2 + \phi'')(1 - \frac{2Gm}{c^2}) + \phi' \left( r - \frac{G}{c^2}(m'r + m) \right) + \frac{G}{rc^2}(m'r - m), \quad (2.57)$$

$$G_{\phi\phi} = G_{\theta\theta} \sin^2 \theta. \quad (2.58)$$

Hasta este punto, el conjunto de ecuaciones (2.55-2.58) son las componentes del tensor de Einstein que se acoplarán a la materia cuyas ecuaciones se describen enseguida.

*Descripción de la materia.* El tensor de energía momento para un fluido ideal (isotrópico, sin una tensión cortante, viscosidad o conducción de calor) está dado

---

por

$$T^{\mu\nu} = (\rho_0(c^2 + \epsilon/c^2) + p/c^2)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}, \quad (2.59)$$

$$= (\rho + p/c^2)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}, \quad (2.60)$$

$$= (\rho_0 h/c^2)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}, \quad (2.61)$$

en donde  $h = c^2 + \epsilon + \frac{p}{\rho_0}$  es la entalpía específica (entalpía por unidad de masa),  $\rho_0$  es la densidad de masa bariónica en un sistema comóvil (reposo),  $\rho = \rho_0(c^2 + \epsilon/c^2)$  es la densidad de energía total,  $\epsilon$  es la energía específica interna y  $p$  es la presión hidrostática. Si consideramos la invariancia del cuadvivector de velocidad, escrita como  $u^\mu u^\nu g_{\mu\nu} = -c^2$ , podemos escribir el tensor de energía-momento en forma matricial en términos de la métrica como:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{-2\phi(r)}\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}\right)p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2}p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (r \sin \theta)^{-2}p \end{pmatrix}, \quad (2.62)$$

ya que el tensor resulta ser diagonal, será fácil pasar de su forma covariante a la contravariante o viceversa, pongámosla explícitamente

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2\phi(r)}c^4\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}\right)^{-1}p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (r \sin \theta)^2p \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

Dado el tensor de energía-momento, aplicando las ecuaciones de Einstein dadas por la ecuación (2.18), obtenemos:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad (2.64)$$

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{(4\pi r^3 p + mc^2)G}{c^4 r^2 - 2Gm c^2 r}. \quad (2.65)$$

---

Las otras dos ecuaciones resultan ser cero, así que necesitamos obtener dos ecuaciones más para nuestro sistema de 4 ecuaciones con cuatro incógnitas  $m(r)$ ,  $p(r)$ ,  $\rho(r)$ ,  $\phi(r)$ , para eso usamos la ecuación de conservación de energía ( $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ ), la única componente que sobrevive es la componente radial  $\nabla_\mu T^{\mu r} = 0$ , despejando  $p'$  obtenemos

$$\frac{dp}{dr} = -(\rho c^2 + p)\phi', \quad (2.66)$$

las ecuaciones (2.64), (2.65) y (2.66) son las llamadas ecuaciones de Tolman–Oppenheimer–Volkoff. Obsérvese que un simple cambio de variable  $e^{\phi(r)} = \alpha(r)$ , conduce a cambiar  $\phi(r) = \ln \alpha(r)$ , y  $\phi'(r) = \frac{\alpha'(r)}{\alpha(r)}$ , por lo cual las ecuaciones pueden reescribirse como:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad (2.67)$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dr} = \frac{(4\pi r^3 p + mc^2) G}{c^4 r^2 - 2Gmc^2 r}, \quad (2.68)$$

$$\frac{dp}{dr} = -(\rho c^2 + p) \frac{\alpha'}{\alpha} = -(\rho c^2 + p) \left( \frac{(4\pi r^3 p + mc^2) G}{c^4 r^2 - 2Gmc^2 r} \right). \quad (2.69)$$

En donde  $m(r)$  es la masa gravitacional dentro del radio  $r$ . En el vacío  $T^{\mu\nu} = 0$  y  $m = M_{total}$ .

Lo que necesitamos ahora, es encontrar una ecuación que relacione la presión  $p$  con la densidad total  $\rho$ , para que nuestro sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas este completo, en éste trabajo utilizamos dos ecuaciones de estado, la primera de ellas, una “politrópica”<sup>1</sup>, es comunmente usada para describir estrellas de neutrones y enanas blancas, la segunda será usada para construir estrellas de quarks y es llamada “MIT bag – model”. La segunda de ellas se desarrolla con cierto detalle a continuación.

### 2.5.1. Modelo “MIT bag – model” para modelar estrellas de quarks

Este modelo fue propuesto por primera vez por Chodos, Jaffe, Johnson, Thorn, y Weisskopf (CJJ TW) [A. Chodos and Weisskopf \[1974\]](#) en el MIT y la idea

---

<sup>1</sup>Un ejemplo de ecuación politrópica puede ser consultada en el apéndice [B](#)

---

principal es encerrar en una bolsa, partículas que obedecen la interacción fuerte y obtener, además de las propiedades físicas, una ecuación de estado que relacione la densidad de energía por volumen  $\rho$ , con la presión  $p$ , éste modelo sin embargo, es el más simple, y perdemos alguna información, por ejemplo, la densidad crítica a la cual los quarks empiezan a desasociarse de núcleos individuales.

A continuación se describe con más detalle. Supongamos que una región del espacio contiene campos hadrónicos, éstos campos tienen una energía por unidad de volumen positiva y constante a la que llamaremos “B”. Ésta región del espacio es por comodidad, llamada bolsa (bag), y en ésta se encuentran quarks y gluones. Desde un punto de vista termodinámico, la bolsa tendría partículas libres, sin masa, encerradas en una región “R”, y sujetas a una presión externa “B”, las condiciones de frontera sobre los campos son tales que aseguran que éstos campos se desvanecen fuera del volumen ( $V$ ). Por un lado, la energía total del gas estará dada como:

$$E = E_r + BV, \quad (2.70)$$

donde  $E_r$  es la energía interna del gas “Energía de radiación”. Éste gas interactúa en la frontera, de forma que permite una interacción entre la radiación ( $E_r$ ) y la energía de la bolsa ( $BV$ ), así la superficie sirve como un medio de establecer un equilibrio térmico en el gas. Por otro lado, la suma de las presiones que ejerce cada quark estará balanceada por la presión externa  $p + B$

$$\sum_f p^f = p + B. \quad (2.71)$$

Como el campo interactúa en la frontera, la aproximación relativista del gas será sólo válida cuando la longitud de onda de las partículas contenidas dentro de la bolsa sea mucho más corta que  $V^{-1/3}$ .

Ahora bien, vamos a tomar en consideración algunos puntos importantes.

[A. Chodos and Weisskopf \[1974\]](#)

- a) El campo dentro de la bolsa se comporta en promedio como un gas perfecto relativista, es decir, que cuando es promediado en el espacio y el tiempo, la traza del tensor de energía-momento asociado al campo es cero.

---

b) El volumen de la bolsa promediado en el tiempo es proporcional a su energía

$$E = 4B\langle V \rangle, \quad (2.72)$$

c)  $B$  tiene dimensiones (longitud)<sup>-4</sup> con  $\hbar = c = 1$ , y las energías son expresadas en términos de  $m^{-1}$

Resumiendo, diremos que el modelo corresponde a una burbuja de un gas ideal relativístico dentro de un fluido ideal con una presión constante  $B$ , el equilibrio sólo es obtenido cuando la presión de radiación del gas es contrarrestada por la presión ejercida por el líquido, en un gas de partículas con masa despreciable, la presión está dada como  $p = \frac{1}{3}E_r/V$ , en donde  $E_r$  es la energía de radiación del gas. Las ecuaciones que describen al sistema en equilibrio son entonces:

$$p = \frac{1}{3}E_r/V = B, \quad (2.73)$$

$$E = E_r + BV = 4BV. \quad (2.74)$$

Por comodidad, la ecuación (2.70) será dividida por  $1/V$ , resultando una densidad de energía

$$\rho = \sum_f \rho^f + B, \quad (2.75)$$

en donde  $\rho$  representa la densidad de energía total,  $\rho^f$  representa la contribución de densidad de energía de cada quark, y  $B$  puede interpretarse como la diferencia entre la densidad de energía de los quarks que no interactúan con los que sí interactúan [Yazdizadeh and Bordbar \[2013\]](#).

La condición de carga eléctrica neutra entre los quarks puede escribirse como

$$3 \sum_f q_f^{el} K_{F_f}^3 - \sum_L K_{F_L}^3 = 0, \quad (2.76)$$

en donde  $q_f^{el}$  denota el número de carga eléctrica de un quark de sabor  $f$ ,  $K_{F_f}$  y  $K_{F_L}$  son el momento de Fermi de quarks ( $f$ ) y leptones ( $L$ ) respectivamente. Pueden encontrarse los valores asociados en la tabla (2.1).

Tabla 2.1: Se enlistan las masas aproximadas  $m_f$  y los números de carga eléctrica ( $q_f^{el}$ ) para los quarks *up* (*u*), *down* (*d*), *charm* (*c*), *strange* (*s*), *top* (*t*) y *bottom* (*b*)

sabor del quark ( $f$ )	u	d	c	s	t	b
$m_f(\text{GeV}/c^2)$	$0.0022^{+0.0005}_{-0.0004}$	$0.047^{+0.0005}_{-0.0003}$	$1.275^{+0.025}_{-0.035}$	$0.95^{+0.09}_{-0.03}$	$173.0^{+0.4}_{-0.4}$	$4.18^{+0.04}_{-0.03}$
$q_f^{el}(e)$	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$

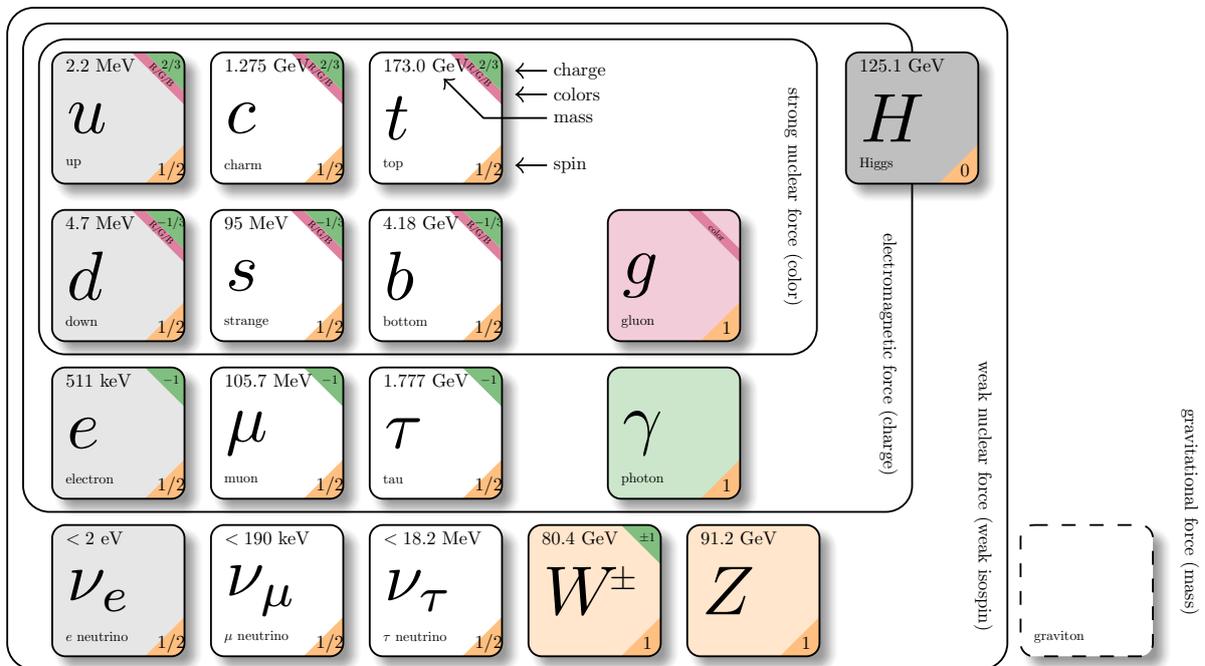


Figura 2.2: Modelo estándar: Predice los elementos básicos de los que se forman todos los elementos, materia y energía del universo conocido, en la parte superior aparecen las partículas que obedecen la interacción fuerte, llamados quarks, a cada uno de ellos se asocia la masa, spin, carga eléctrica y de color, debajo están las partículas que obedecen la interacción débil, llamados leptones, y del lado derecho se presentan los bosones *Galbraith and Burgard [2012]; Tanabashi et al. [2018]*.

En la Figura 2.2, se presenta al modelo estándar, éste modelo fue propuesto para explicar las partículas fundamentales, o los componentes de la materia co-

---

nocida, compuesta por fermiones (que siguen la estadística de Fermi-Dirac con espín semi-entero) y bosones (que siguen la estadística de Bose-Einstein con espín entero), de los cuales estaría hecha, toda la demás materia. Arriba tenemos a los quarks *up* (*u*), *down* (*d*), *charm* (*c*), *strange* (*s*), *top* (*t*) y *bottom* (*b*), por debajo estarían los leptones, que son fermiones que no obedecen la interacción fuerte, existen 6 tipos, el electrón, el muón y el tau, con sus correspondientes neutrinos, éstos cuentan con un espín 1/2 para el caso de los neutrinos y  $\pm 1/2$  para las demás partículas. Por último del lado derecho tenemos los bosones, que son las partículas encargadas de hacer que los quarks y leptones se relacionen de una forma o de otra, éstos son los bosones *w* y *z* para la interacción débil, los gluones *g* para la interacción fuerte, los fotones  $\gamma$  para la interacción electromagnética y por último, descubierto recientemente, el bosón de Higgs *H*. A partir de los quarks *up* y *down*, así como del leptón llamado *electrón*, con los fotones, en principio podríamos construir toda la tabla periódica de los elementos conocidos hasta ahora. El quark que presenta más interés en éste trabajo (además del *up* y *down*), es el *strange*, ya que en principio las estrellas de quarks estarían compuestas principalmente de éstos tres tipos, siendo el quark *strange* sumamente estable. Tomando en cuenta la energía de los quarks *strange* y *top*, se suponen estrellas que son construidas íntegramente por ellos, un análisis puede ser consultado en las Figuras 4.8, 4.9, 4.10a y 4.10b.

La contribución de cada sabor de quark a la presión, densidad de energía, y conservación del número de quarks puede ser obtenida mediante el potencial termodinámico llamado “Energía libre de Helmholtz” que mide el trabajo realizado en un sistema cerrado, en donde la temperatura se mantiene constante.

$$d\Omega = -SdT - pdV + \sum_j \mu_j dN_j, \quad (2.77)$$

en donde  $N_j$  es el número de partículas del tipo *j* y  $\mu_j$  es su potencial químico asociado,  $p$  es la presión,  $V$  es el volumen,  $S$  la entropía y  $T$  la temperatura.

A partir de éste potencial pueden obtenerse las siguientes ecuaciones para la presión ( $p$ ), densidad de energía total ( $\rho$ ) y densidad de masa bariónica ( $\rho_m$ ) [Alcock et al. \[1986\]](#); [Farhi and Jaffe \[1984\]](#); [Glendenning \[2000\]](#); [Weber \[2005\]](#)

---


$$\begin{aligned}
p &= \frac{\nu_f}{6\pi^2} \int_0^{K_{F_f}} dK \frac{K^4}{\sqrt{K^2 + m_f^2}}, \\
\rho^f &= \frac{\nu_f}{2\pi^2} \int_0^{K_{F_f}} dK K^2 \sqrt{K^2 + m_f^2}, \\
\rho_m^f &= \frac{\nu_f}{6\pi^2} K_{F_f}^3,
\end{aligned} \tag{2.78}$$

en donde el superíndice  $f$ , hace referencia a los quarks  $u, d, s$ , es decir  $f = (u, d, s)$ ,  $m_f$  es la masa correspondiente y  $\nu_f$  es la densidad de estados disponibles por energía  $E$ , los estados disponibles corresponden al spin y al color, así  $\nu_f = 2(\text{spin}) \times 3(\text{color}) = 6$ .

Si consideramos a la masa de  $f = u, d, s, e$  despreciable con respecto a  $K_f$ , (fermi momenta) las ecuaciones (2.78) pueden ser fácilmente resueltas, obteniendo las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\rho^f &= \frac{\nu_f}{8\pi^2} \mu^{f4}, \\
p^f &= \frac{\nu_f}{24\pi^2} \mu^{f4} = \frac{1}{3} \rho^f, \\
\rho_m^f &= \frac{\nu_f}{6\pi^2} \mu^{f3} = \frac{4}{\pi^{2/3}} p^{3/4},
\end{aligned} \tag{2.79}$$

en donde hemos usado el hecho de que  $\mu$  puede ser expresada como:

$$\mu_f = \sqrt{K_f^2 + m_f^2} \quad f = u, d, s. \tag{2.80}$$

Utilizando las condiciones propuestas por las ecuaciones (2.71), (2.75) y los resultados obtenidos en la ecuación (2.79) podemos escribir una ecuación de estado que relaciona la presión con la densidad de energía total, conocida como “MIT Bag model”

$$p = \frac{1}{3}(\rho - 4B). \tag{2.81}$$

En donde  $p$  es la presión,  $\rho$  es la densidad de energía total,<sup>1</sup> y  $B$  es la energía por unidad de volumen asociada a la bolsa de quarks. La ecuación (2.81), es

---

<sup>1</sup> $\rho = \rho_0(1 + \epsilon)$ , en donde  $\epsilon$  es la energía interna, y  $\rho_0$  es la densidad de masa

---

la que vamos a usar en éste trabajo para modelar estrellas de quarks, ésta es la ecuación de estado que vamos a añadir al conjunto de las ecuaciones TOV dadas por las ecuaciones (2.69), para tener un conjunto de cuatro ecuaciones diferenciales con cuatro incógnitas que van a ser resueltas numéricamente por un método iterativo Runge-Kutta. Es importante mencionar que éste es el modelo más simple, en donde hacemos despreciable la masa e interacción de los quarks, por lo tanto nuestros resultados serán correspondientemente simplificados .Los resultados pueden encontrarse en el Capítulo 4.

# Capítulo 3

## Métodos Numéricos

### 3.1. Método Runge-Kutta

Éste método es ampliamente usado para resolver ecuaciones diferenciales numéricamente, existen diferentes ordenes de runge-kutta de forma explícita e implícita, sin embargo aquí solamente vamos a describir el “runge-kutta de cuarto orden clásico”. Para ésto nos vamos a valer de un método muy simple para encontrar la solución de un ecuación diferencial numéricamente, el método de euler, explicado a continuación.

#### 3.1.1. Método de euler

Supongamos que tenemos una ecuación diferencial de primer orden de la siguiente forma:

$$\frac{dy(t)}{dt} = y'(t) = f(t, y), \quad (3.1)$$

dicha ecuación tiene que ser evaluada en un punto inicial  $(t_0, y(t_0))$ , quedando determinado  $y'(t_0)$ , que coincide exactamente con la función  $f(t_0, y(t_0))$ . Para encontrar el valor de la función en el siguiente punto, hacemos una aproximación que llamaremos  $y^*(t_1)$ ,<sup>1</sup> en donde  $t_1 = t_0 + \Delta t$ , para un  $\Delta t$  tan pequeño como queramos, si calculamos la pendiente entre ambos puntos obtenemos la siguiente

---

<sup>1</sup>Una aproximación a la función que queremos encontrar  $y(t_1)$

---

ecuación

$$y'(t_0) = \frac{y^*(t_0 + \Delta t_0) - y(t_0)}{t_0 + \Delta t_0 - t_0},$$

y despejando  $y^*(t_1) = y^*(t_0 + \Delta t_0)$ , obtenemos

$$y^*(t_1) = y'(t_0)\Delta t_0 + y(t_0),$$

y ya que conocemos  $y'(t_0)$ ,  $\Delta t_0$  y  $y(t_0)$ , queda determinado un punto que aproxima  $y(t_1)$  dado como  $y(t_1) = y^*(t_1) + O(\Delta t^2)$  en donde  $O(\Delta t^2)$  es un error que depende de la magnitud de  $\Delta t$ , para que ambos fuesen iguales,  $\Delta t \rightarrow 0$ . Para calcular  $y(t_2)$ , basta repetir los pasos anteriores usando como punto inicial  $(t_1, y^*(t_1))$ , podemos escribir entonces

$$y^*(t_{i+1}) = y(t_i) + y'(t_i)\Delta t_i \quad i = 1, n, \quad (3.2)$$

cabe señalar que comunmente  $\Delta t_i = h$ , en donde  $h$  es una constante, esto quiere decir que el paso en el dominio es constante, aunque en principio bien podría no serlo, en éste trabajo vamos a usar un paso constante  $h$  para el dominio en todos los cálculos numéricos. Tenemos ahora un método iterativo de primer orden para encontrar una aproximación a la solución de la ecuación diferencial dada por la ecuación (3.1).

### 3.1.2. Método Runge-Kutta de 4<sup>o</sup> orden

A grandes rasgos, el método Runge-Kutta de 4<sup>o</sup> orden clásico, es un promedio de pendientes en cuatro etapas, éstas pendientes son encontradas utilizando el método de euler, es decir, se emplea cuatro veces el método de euler para aproximarnos en un orden mayor a la curva de la función buscada, dicho esto, el primer paso será entonces utilizar el método de euler, utilizando la ecuación (3.1) en la ecuación (3.2) obtenemos que el primer paso esta dado como <sup>1</sup>

$$k_1 = f(t_i, y_i), \quad (3.3)$$

---

<sup>1</sup>Hagamos que  $y = y^*$ , suponiendo que podemos hacer  $O(\Delta t^2) = O^2(h)$  tan pequeño como queramos

---

para encontrar el segundo paso, usamos nuevamente el método de euler pero ésta vez avanzando en el dominio con un paso  $\Delta t = \frac{h}{2}$ , y encontrando nuestra siguiente  $y_i$  con ayuda del paso anterior  $k_1$ , (es decir, un nuevo valor para la función  $y(t) = y_i$ , ayudados por la  $y(t) = y_i$  encontrada en el primer paso) así

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + k_1 \frac{h}{2}\right), \quad (3.4)$$

para el tercer paso, nuevamente avanzamos en el dominio  $\Delta t = \frac{h}{2}$ , utilizando ésta vez, el paso anterior ( $k_2$ )

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + k_2 \frac{h}{2}\right), \quad (3.5)$$

en el último paso, utilizamos  $\Delta t = h$  para avanzar en el dominio y  $k_3$  para encontrar nuevamente el valor de  $y_i$ , así obtenemos la siguiente ecuación para  $k_4$

$$k_4 = f(t_i + h, y_i + hk_3), \quad (3.6)$$

cabe señalar que hasta ahora, no hemos hecho más que obtener pendientes, la siguiente con ayuda de la anterior, dicho esto solo queda ponderar las pendientes dadas por las ecuaciones (3.3),(3.4),(3.5),(3.6) con un peso adecuado para encontrar nuestro siguiente punto

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \quad (3.7)$$

Queda de más decir, que es un método iterativo, por lo que al avanzar en el dominio, el error se va propagando, aunque bien es cierto que resulta un método poco costoso computacionalmente y eficiente, ya que el error que resulta es del orden de  $O^4(h)$ .

El error global será la diferencia entre la solución numérica y la solución exacta del problema en cualquier punto del intervalo de integración, se puede calcular con la ecuación

$$\tilde{e} = \frac{\bar{y} - y}{2^{p-1}} = O^p(h),$$

en donde  $\tilde{e}$  es el error global,  $\bar{y}$  es una solución numérica en donde el paso es de  $h$ ,  $y$  es una solución en donde el paso es de  $h/2$  y  $p$  es el orden del error, en el

---

método Runge-kutta de cuarto orden  $p = 4$  [Odria \[2007\]](#).

### 3.2. Regla del trapecio

Ésta regla es usada para encontrar la integral de una función numéricamente, se usa partiendo a la función en intervalos pequeños, y en cada uno de ellos aproximando la función a un trapecio, para encontrar el área bajo la curva del mismo y después sumando todos los trapecios, se aproxima a la integral buscada, la manera de hacerlo se presenta a continuación.

Supongamos que queremos encontrar la integral de una función bien comportada  $f(x)$ , dividimos a ésta en intervalos constantes  $h = b - a$ , para un  $b > a$ , y en cada intervalo aproximamos la función a un polinomio de primer orden con una serie de Taylor alrededor de  $x_0$ .

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i, \quad (3.8)$$

Definimos  $T_1$  como

$$T_1 = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a),$$

en donde  $T_1$  representa el primer término de la serie de Taylor, integrando la función aproximada por  $T_1$  tenemos

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b T_1 dx = \int_a^b \left( f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \right) dx \\ &= \frac{(b - a) (f(a) + f(b))}{2}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

En éste trabajo utilizamos éste método para integrar la densidad de masa en reposo de las estrellas, dada por la ecuación [\(3.21\)](#).

---

### 3.3. Datos iniciales para estrellas de neutrones

Podemos describir a las estrellas de neutrones con la ayuda de las ecuaciones de TOV, dadas por la ecuación (2.69), para un fluido perfecto y agregando una ecuación de estado politrópica  $p = \kappa \rho_0^\Gamma$  dada por la ecuación (B.27), haremos esto detalladamente de la siguiente manera:

Primero, escribiendo el elemento de línea  $ds^2$  de las ecuaciones TOV como:

$$ds^2 = -\alpha(r)^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (3.10)$$

en donde la métrica sólo depende del radio  $r$ , asumiendo que el gas obedece inicialmente una ecuación politrópica

$$p = \kappa \rho_0^\Gamma. \quad (3.11)$$

En el apéndice B presentamos un ejemplo de polítopo, y [Lattimer and Prakash \[2001\]](#) presentan más ecuaciones de estado.

Tomando las ecuaciones que se derivan del elemento de línea, las llamadas TOV dadas por la ecuación (2.69) y haciendo por comodidad  $c = G = 1$  obtenemos

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad (3.12)$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dr} = \frac{4\pi r^3 p + m}{r^2 - 2mr}, \quad (3.13)$$

$$\frac{dp}{dr} = -(\rho + p) \frac{\alpha'}{\alpha} = -(\rho + p) \left( \frac{4\pi r^3 p + m}{r^2 - 2mr} \right), \quad (3.14)$$

tenemos además las ecuaciones en unidades geométricas

$$\rho = \rho_0(1 + \epsilon), \quad (3.15)$$

$$\rho_0 h = \rho + p, \quad (3.16)$$

---

en donde  $\rho_0$  es la densidad de masa en reposo,  $\epsilon$  es la energía específica interna,  $h$  es la entalpía y  $p$  es la presión. Es de importancia mencionar que por comodidad algunas veces usaremos en los cálculos numéricos una nueva función llamada  $a(r)^2 = \frac{1}{1-\frac{2m}{r}}$ , elegimos ésta función debido a que fuera de la estrella, la métrica adopta una métrica tipo Schwarzschild, y éste es el término que aparece en la componente temporal y radial de la métrica, ahora bien tenemos que integrar éstas ecuaciones diferenciales con la ayuda de un método Runge-Kutta <sup>1</sup>, desde un radio inicial  $r = 0$  hasta un radio máximo  $r = R_s$ , en donde  $R_s$  es el radio de la estrella.

Las condiciones iniciales que vamos a utilizar son las siguientes

1.  $m(0) = 0$ , ya que la masa contenido bajo una esfera de radio  $r = 0$  es cero.
2.  $p(0) = \kappa\rho_{0c}^\Gamma$ , donde  $\rho_{0c}$  es el valor central de la densidad de masa en reposo, en todo el dominio sucede que por un lado  $\rho_0 = (p/\kappa)^{1/\Gamma}$  (ya que estamos modelando con la ecuación politrópica), y por otro lado dada una ecuación de estado de gas ideal en términos de la energía interna, dada por la siguiente ecuación  $p = (\Gamma - 1)\rho_0\epsilon$ , que despejando  $\rho_0\epsilon = p/(\Gamma - 1)$ , obtenemos, sustituyéndola en la densidad de energía dada por la ecuación (3.15) dada como  $\rho = \rho_0(1 + \epsilon) = \rho_0 + \rho_0\epsilon$ , que la fuente de la ecuación (3.11) está dada como:

$$\rho = (p/\kappa)^{1/\Gamma} + p/(\Gamma - 1), \quad (3.17)$$

3.  $\alpha(0) = \alpha_0$  es un valor central arbitrario dado, debemos también tener en cuenta que afuera de la estrella, la métrica tiene que ser aproximada a una métrica estática, esféricamente simétrica sin algún tipo de material dentro de ella, o bien, en donde el tensor de energía-momento es cero, ésta métrica que resuelve las ecuaciones en un campo vacío es la métrica Schwarzschild, por lo que la condición en  $r = r_{m\acute{a}x}$  queda dada como  $\alpha(r_{m\acute{a}x}) = 1/a(r_{m\acute{a}x})$ .
4. El valor de  $\rho_{0c}$  es el parámetro de entrada que determina la configuración, y corresponde al valor central de la densidad de masa en reposo, por supuesto se sigue que para cada valor de  $\rho_{0c}$  una “nueva estrella” puede ser construida.

---

<sup>1</sup>Nosotros usaremos el Runge-Kutta clásico de cuarto orden

---

Debemos hacer aquí, un par de observaciones de importancia, ambas concierne a puntos indeterminados llamados singularidades. La primera observación tiene que ver con el punto en  $r = 0$ , ya que las ecuaciones (2.65) y (2.66) son singulares en éste valor, para resolver el problema, éstas ecuaciones se desarrollan en una serie de Taylor, y se obtienen ecuaciones que deben ser usadas sólo para pequeños valores de  $r$ , la expansión se realiza alrededor de  $m=0$ , entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{m + 4\pi r^3 p}{r^2 - 2mr} &\approx \frac{m(0) + m'(0)r + \frac{1}{2}m''(0)r^2 + \frac{1}{6}m'''(0)r^3 + \mathcal{O}(r^4) + 4\pi r^3 p}{r^2 - 2r(m(0) + m'(0)r + \frac{1}{2}m''(0)r^2 + \frac{1}{6}m'''(0)r^3 + \mathcal{O}(r^4))} \quad (3.18) \\ &= \frac{4\pi\rho r/3 + 4\pi r p}{1 - 8\pi\rho r^2/3}. \end{aligned}$$

Hemos usado aquí la ecuación (3.12) y la condición inicial del punto 1. Para calcular las derivadas en  $m(r)$ , se puede ver claramente que  $m(0) = m'(0) = m''(0) = 0$  y  $m'''(0) = \frac{d^3m(0)}{dr^3} = 8\pi\rho$ . Así las ecuaciones (3.13) y (3.14) se tienen que reescribir para aproximaciones pequeñas de  $r$  como:

$$\frac{dp}{dr} = -(\rho + p) \frac{4\pi\rho r/3 + 4\pi r p}{1 - 8\pi\rho r^2/3}, \quad (3.19)$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dr} = \frac{4\pi\rho r/3 + 4\pi r p}{1 - 8\pi\rho r^2/3}. \quad (3.20)$$

Las ecuaciones (3.19) y (3.20) deben ser usadas numéricamente al menos en el punto  $r_0 = \Delta r$ , en donde  $\Delta r$  representa la resolución espacial de la malla. La segunda observación tiene que ver con la divergencia de la entalpía específica, cuando la densidad de masa en reposo  $\rho_0$  tiende a cero, que intuitivamente sucede cuando nos encontramos en la frontera de la estrella y se extiende al infinito y más allá, en donde sólo hay vacío. Ésto suele solucionarse fijando un valor mínimo para  $\rho_0$ , que puede interpretarse como cierta atmósfera de polvo, pero lo cierto es que sólo es un artilugio numérico que permite la convergencia y gracias a éste, sea posible seguir obteniendo valores numéricos para el vacío, llamaremos a éste valor mínimo fijado arbitrariamente  $\rho_{atm}$ . Ya que el valor resulta arbitrario, hemos utilizado diferentes valores de  $\rho_{atm}$  en el código, éstas se muestran en la

---

Figura 4.1. De esta forma, podemos decir que justo en la superficie de la estrella, es decir cuando  $r = R_s$ ,  $\rho_0$  alcanza su valor mínimo ( $\rho = \rho_{atm}$ ). Si ahora nos proponemos calcular la masa de la estrella, debemos tener en cuenta la masa total, que llamaremos  $M_T$  y que se calcula integrando la ecuación (3.12) que depende de la densidad de energía total, así la masa total para una configuración estelar queda determinada como  $M_T = m(R_s)$ , mientras que la masa en reposo ( $M_0$ ) puede ser calculada como una integral de la densidad de masa en reposo  $\rho_0$

$$M_0 = 4\pi \int_0^{R_s} \rho_0 r^2 a(r) dr. \quad (3.21)$$

### 3.4. Datos iniciales para estrellas de quarks

Para abordar la construcción de una “estrella de quarks”, vamos a considerar las ecuaciones TOV descritas por la ecuación (2.69), y como ecuación de estado, vamos a tomar la ecuación “MIT-bag model”, dada por la ecuación (2.81) expresada para la densidad de energía total  $\rho$ , explícitamente las cuatro ecuaciones se escriben como

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dr} &= 4\pi r^2 \rho, \\ \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dr} &= \frac{(4\pi r^3 p + mc^2) G}{c^4 r^2 - 2Gmc^2 r}, \\ \frac{dp}{dr} &= -(\rho c^2 + p) \frac{\alpha'}{\alpha} = -(\rho c^2 + p) \left( \frac{(4\pi r^3 p + mc^2) G}{c^4 r^2 - 2Gmc^2 r} \right), \\ \rho &= 3p + 4B. \end{aligned} \quad (3.22)$$

De manera muy similar, integramos éstas ecuaciones con ayuda de un Runge–Kutta de cuarto orden desde  $r = 0$  a  $r_{m\acute{a}x}$ .

Los datos iniciales que vamos a usar, son los siguientes

1.  $m(0) = 0$ , ya que en el centro de la estrella la masa es cero, igual que en la estrella de neutrones.

---

<sup>1</sup>En éste trabajo usamos la regla del trapecio dada por la ecuación (3.10) para calcular la masa en reposo.

- 
2.  $p(0) = \frac{\rho_c - 4B}{3}$ , en donde  $\rho_c$ , es la densidad central de cada estrella en el punto inicial  $p(0)$ .
  3. si observamos la ecuación (2.81), nos daremos cuenta que necesitamos una restricción para la densidad de energía total  $\rho$ , ya que la presión  $p > 0$  dentro de la estrella y  $p = 0$  justo en la superficie de la misma, se deduce que  $\rho \geq 4B$ .
  4.  $\alpha(0) = \alpha_0$ , un valor inicial arbitrario, de la misma forma que para estrellas de neutrones, se tiene que imponer una condición para que fuera de la estrella, desde que  $r = R_s$ , la solución se aproxime a una solución tipo schwarzschild, para satisfacer éstas condiciones, si observamos la métrica TOV dada por la ecuación (3.10), nos daremos cuenta que necesitamos igualar la parte temporal, ésto lo hacemos reescalando por una constante, que satisface que  $\alpha(R_s) = 1/a(R_s)$ .
  5.  $\rho_c$  será un parámetro de entrada que determina la configuración de la estrella, es el valor central de la densidad de masa en reposo, y cada estrella construida posee un único valor.

Debe observarse, que las mismas expansiones de Taylor usadas para estrellas de neutrones en puntos cercanos a  $r = 0$  son aplicadas aquí, ya que las ecuaciones aplicadas a estrellas de quarks con respecto a la deformación del espacio tiempo <sup>1</sup> son las mismas y por lo tanto se usan las ecuaciones (3.19), (3.20) por lo menos en el primer punto de la malla  $r_0 = \Delta r$ , donde  $\Delta r$  es la resolución espacial de la malla.

También incluimos un valor límite para la densidad de energía total, que aparece justo en la superficie de cada estrella construida  $\rho = \rho_{atm}$ , y para la presión  $p = p_{atm}$ , éste valor es arbitrario, tan pequeño como queramos, y representa una atmósfera externa que empieza justo después del radio de la estrella (es decir, para el siguiente punto en la malla), éste es de gran importancia numéricamente, ya que nos ayuda a estabilizar la solución, permitiendo la convergencia para un radio mayor al radio de la estrella  $r > R_s$ , donde  $R_s$  es el radio de la estrella.

---

<sup>1</sup> Es decir las ecuaciones que describen el espacio tiempo, llamadas TOV dadas por la ecuación (2.69)

---

La masa en reposo es calculada según la ecuación (3.21)

### 3.5. Estructura del código

De forma general vamos a presentar un diagrama de flujo que resume el código. En el diagrama se presenta la forma en la que está estructurado el código que construimos para resolver ecuaciones diferenciales con ayuda de un método iterativo, en nuestro caso el método Runge-Kutta de 4°. Éste diagrama puede consultarse en la Figura 3.5.

Hablemos de cómo construimos paso a paso nuestro código numérico. Para comenzar, el espacio tiempo tiene que ser discretizado en un espacio cerrado, a esto se le llama malla numérica, en ésta malla es en donde obtenemos los valores de las funciones integradas numéricamente. La malla se construye dividiendo el dominio entre la resolución de puntos  $N_{xx}$ , así  $\Delta x = x/N_{xx}$  para un dominio  $x \in (x_{max} - x_{min})$ , en donde  $x_{max}$  y  $x_{min}$  representan un valor máximo y mínimo respectivamente (representa el intervalo de espacio). Así, podemos obtener un valor de  $x$  dado como  $x = x_{min} + i\Delta r \quad i = 1, N_{xx}$ .

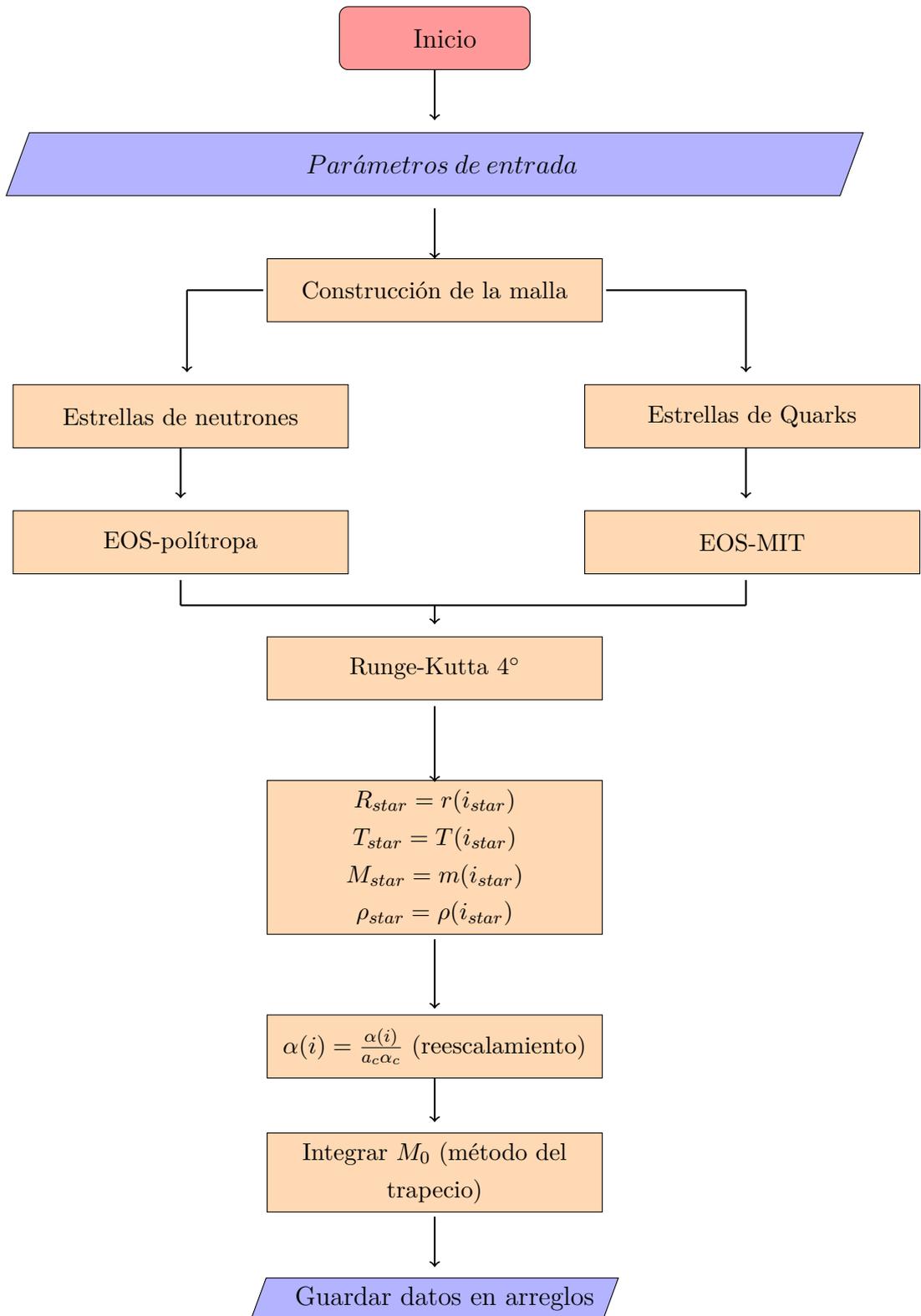
Usaríamos así, el mismo principio para construir los puntos en el tiempo, de forma explícita  $\Delta t = t/N_{tt}$ , para un dominio  $t \in (t_{max} - t_{min})$ , sin embargo en éste trabajo, consideramos estrellas estáticas, y por lo tanto  $\Delta t = t = N_{tt} = 0$ .

Después de construida la malla numérica elegimos las ecuaciones diferenciales que vamos a integrar numéricamente, y generamos un dato inicial para el primer punto de la malla  $x = x_0$  a un tiempo constante ( $t = t_0$ ), en éste punto especificamos su masa, densidad, presión,  $\alpha$ ,  $a$ , y con ayuda del método Runge-Kutta 4°, obtenemos los valores para los puntos siguientes, hasta que llegamos a un punto en el cual se cumple que la densidad de la estrella es igual a la densidad atmosférica,  $\rho = \rho_{atm}$ , que es justo donde acaba la estrella. Hecho esto tenemos nuestra estrella construida, y podemos obtener datos como la presión o la densidad en cada punto del interior de la estrella.

Lo que hacemos ahora, es comparar muchas estrellas entre ellas, para saber si cambian su comportamiento cuando la densidad crece, esto lo hacemos con ayuda de un ciclo 'do', en el que se barre la densidad de masa  $\rho_0$  desde un valor inicial  $\rho_{0i}$  a uno final  $\rho_{0f}$ , conservando los parámetros característicos ( $\kappa, \Gamma, B$ ), justo con

---

la finalidad de encontrar los máximos asociados a la estrella, es decir  $M_s$ ,  $R_s$  y los valores característicos asociados a la estrella ‘máxima’, dados por  $\rho_{0c}$ ,  $p_c$  y  $T_c$  que corresponden a la densidad de masa en reposo, la presión y la temperatura en el centro de la estrella respectivamente.



# Capítulo 4

## Resultados numéricos para estrellas de neutrones y estrellas de quarks

### 4.1. Estrellas de neutrones

#### Efecto de la atmósfera en los resultados

Un dato importante del que ya hemos hecho mención, es la atmósfera, representada en la Figura 4.1. En el trabajo presente, hemos considerado estrellas estáticas e isotrópicas y en donde los puntos fuera del radio de la estrella (denotado como  $R_s$ ), la atmósfera es considerada como vacío, éste vacío puede ser representado con densidad  $\rho_{atm} = p_{atm} = 0$ , y empezaría justo pasando la superficie de la estrella, es decir, para puntos posteriores a la densidad y presión en la superficie de la estrella,  $\rho(R_s)$ ,  $p(R_s)$ . Sin embargo es de vital importancia que numéricamente, éste cero sea representado por un dígito lo suficientemente pequeño, con la finalidad de no obtener indeterminaciones. Como se espera que la atmósfera no afecte los datos obtenidos, hemos hecho una prueba en la que obtenemos los perfiles para diferentes estrellas con una densidad atmosférica diferente, graficando después el radio de la estrella contra su masa total, lo importante aquí es que hemos cambiado el valor de la atmósfera, como se ve en la

Figura 4.1. Un valor demasiado grande de ésta atmósfera ( $10^{-5}[\text{geo}]^1$ ) modifica ligeramente los resultados, sin embargo también se observa que los valores convergen, independientemente de la atmósfera, por lo que para el código en general, hemos utilizado una atmósfera  $\rho_{atm} = 10^{-12}[\text{geo}] \sim 6 \times 10^5[\text{g}/\text{cm}^3]$ , en donde  $[\text{geo}]$  representa unidades geométricas A.

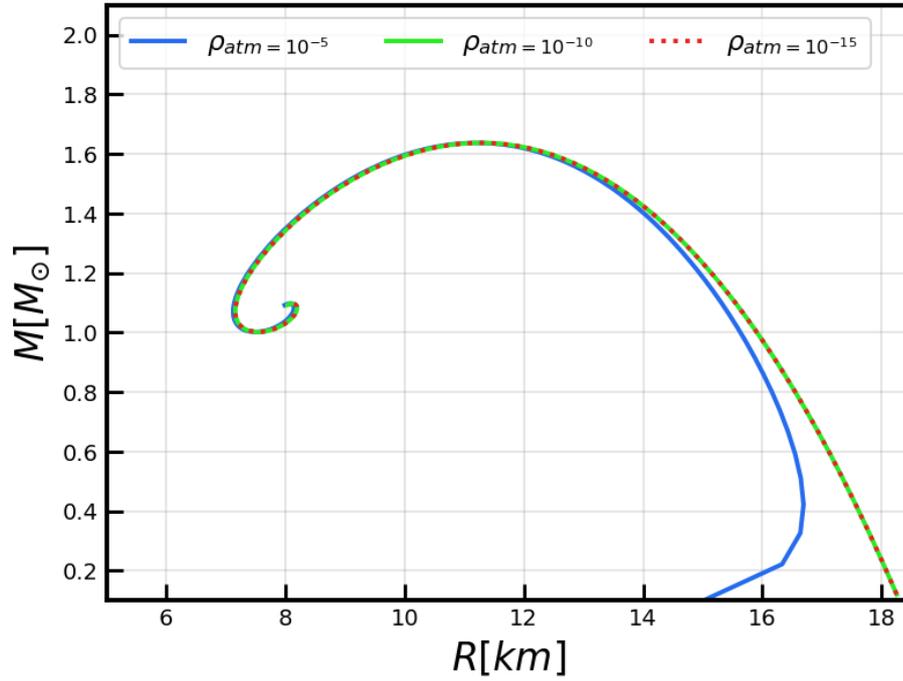


Figura 4.1: Ésta Figura representa cuál es la masa total de una estrella dado su radio máximo respectivo, dado que el valor de  $\rho_{floor}$  se supuso arbitrario, se comparan 3 valores de  $\rho_{atm}$  ( $10^{-5}[\text{geo}]$ ,  $10^{-10}[\text{geo}]$ ,  $10^{-15}[\text{geo}]$ ) para visualizar como influye en el código, los valores utilizados para todas las gráficas son  $\kappa = 100$ ,  $\Gamma = 2$

### Prueba del código

La Figura 4.2 reportada por Guzmán et al. [2012], contiene una solución inicial en el espacio a un tiempo fijo de los parámetros  $\rho$ ,  $p$ ,  $\alpha$  y  $a$ , ésta solución espacial está dada para una estrella con densidad central fija  $\rho_c = 0.42[\text{geo}] = 2.52 \times 10^{17}[\text{g}/\text{cm}^3]$ , con parámetros  $\Gamma = 2$  y  $\kappa = 1$ . Como mencionamos en el capítulo

<sup>1</sup>La notación  $[\text{geo}]$  se emplea para designar unidades geométricas. Se puede consultar el apéndice A para más información

---

(3.3), se espera que la densidad y la presión sean máximas en el centro de la estrella, así como también es esperado que  $\alpha$  y  $a$  tiendan a uno para un espacio de Minkowsky, es decir, para una distancia mayor al radio de la estrella (espacio vacío). Los valores obtenidos para ésta estrella de neutrones asociada con la Figura 4.2 se muestran en la tabla (4.1).

Tabla 4.1: Valores para la estrella de neutrones correspondiente a la Figura 4.2

<i>Parámetro de la estrella</i>	<i>valor</i>	<i>Unidades</i>
$M_{ns}$	0.1616	$M_{\odot}$
$R_{ns}$	1.040	$Km$
$\rho_{ns}$	$2.594 \times 10^{17}$	$g/cm^3$
$T_{ns}$	$4.569 \times 10^{12}$	<i>Kelvin</i>
$p_{ns}$	$1.089 \times 10^{17}$	$g/s^2cm^2$

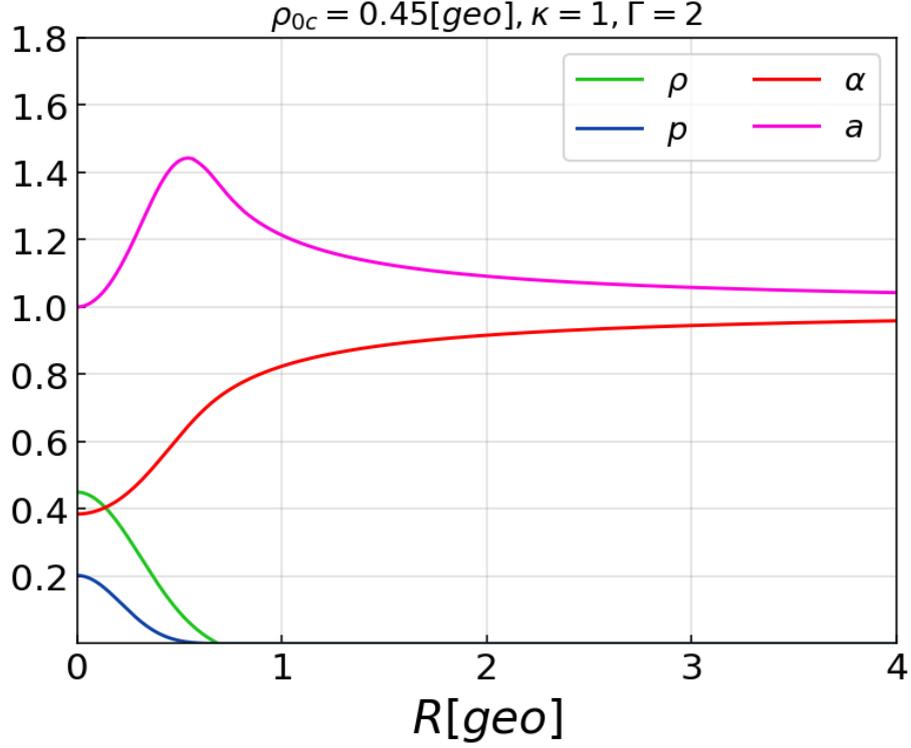


Figura 4.2: Ésta gráfica muestra como varían la densidad de masa en reposo  $\rho_0$ , la presión  $p$  y los parámetros definidos  $\alpha$  y  $a$  con respecto al radio de la estrella. Por un lado los valores iniciales usados son  $\Gamma = 2$ ,  $\kappa = 1$ ,  $\rho_{0c} = 0.42[geo] = 2.6 \times 10^{17}[g/cm^3]$  y  $\alpha_c = 0.5$ , por otro lado los resultados para el radio, la masa total y la masa en reposo son en ese orden:  $R_{ns} = 0.7038[geo] = 1.04[Km]$ ,  $M_{ns} = 0.1616[M_\odot]$ ,  $M_{n0} = 0.1770[M_\odot]$

Tomamos ahora el punto crítico que aparece en la Figura 4.4, es decir, cuando el radio de la estrella  $R_{ns2} = 11.25[Km]$  y la masa de la estrella  $M_{ns2} = 1.6372[M_\odot]$ , que corresponde a una densidad central  $\rho_{0c} = 0.0032[geo] = 1.97 \times 10^{15}[g/cm^3]$ , y con ésta densidad central obtenemos los parámetros  $p$ ,  $\alpha$ ,  $a$  y  $\rho_0$ . Los valores asociados a éste cálculo pueden encontrarse en la tabla (4.2), con la correspondiente Figura 4.3.

Tabla 4.2: Valores para la estrella de neutrones con una densidad central  $\rho_{0c} = 0.0032[geo] = 1.97 \times 10^{15}[g/cm^3]$  correspondiente a la Figura 4.3

<i>Parámetro de la estrella</i>	<i>valor</i>	<i>Unidades</i>
$M_{ns2}$	1.6372	$M_{\odot}$
$R_{ns2}$	11.25	$Km$
$\rho_{ns2}$	$1.976 \times 10^{15}$	$g/cm^3$
$T_{ns2}$	$3.481 \times 10^{12}$	<i>Kelvin</i>
$p_{ns2}$	$6.325 \times 10^{14}$	$g/s^2cm^2$

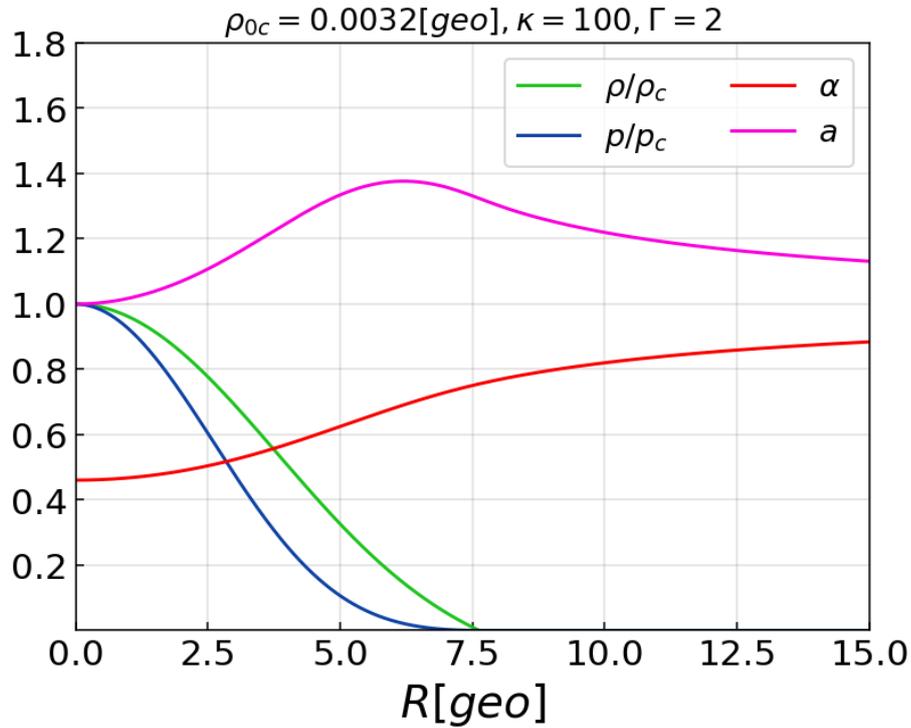


Figura 4.3: Ésta gráfica muestra como varían la densidad de masa en reposo  $\rho_0$ , la presión  $p$  y los parámetros  $\alpha$  y  $a$  con respecto al radio de la estrella. Es importante señalar que ya que los valores de  $p$  y  $\rho$  son muy bajos, éstos han sido reescalados para que aparezcan en la gráfica como  $p/p_c$ ,  $\rho/\rho_c$ , los valores iniciales usados son  $\Gamma = 2$ ,  $\kappa = 100$ ,  $\rho_{0c} = 0.0032[geo] = 1.97 \times 10^{15}[g/cm^3]$  y  $\alpha_c = 0.5$ , por otro lado los resultados para el radio y la masa total son:  $R_{ns2} = 7.622[geo] = 11.25[Km]$ ,  $M_{ns2} = 1.637[M_{\odot}]$

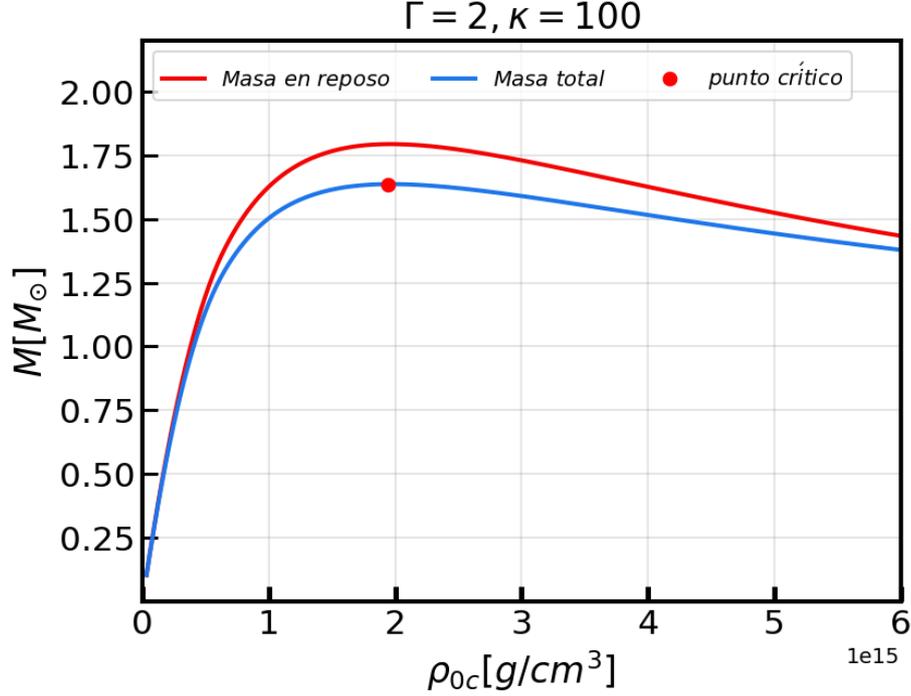


Figura 4.4: Diagrama en donde se muestra la variación de la masa total y en reposo,  $M_s$ ,  $M_0$  con respecto a la densidad central  $\rho_{0c}$ . Usando valores  $\kappa = 100$ ,  $\Gamma = 2$ , se observa que la masa total alcanza su máximo en  $M = 1.637[M_{\odot}]$ , con un radio máximo  $R = 7.584[geo] = 11.25[Km]$ , utilizando una densidad central  $\rho_{0c} = 3.2 \times 10^{-3} = 1.94 \times 10^{15}[g/cm^3]$

En la Figura 4.4, hacemos un barrido de la densidad central contra la masa en reposo y total para estrellas de neutrones, esto quiere decir que cuando se asigna una densidad central, una estrella alcanza su masa respectiva, para otra estrella con otra densidad central, tenemos una masa respectiva diferente, el punto crítico se ubica cuando se alcanza el máximo de la masa, entre las ramificaciones de estrellas estables e inestables. Aquellas configuraciones a la izquierda del máximo son estables y las que se encuentran a la derecha inestables. Esto implica eventualmente que las configuraciones de las estrellas que se encuentran en la rama inestable, deberán colapsar a un agujero negro. El hecho de que la masa en reposo tenga un valor más alto que la masa total indica que el sistema está gravitacionalmente atado.

## 4.2. Estrellas de quarks

En ésta sección nos vamos a centrar en describir a las estrellas de quarks, con ayuda de las ecuaciones (3.23) integradas por un Runge-Kutta, vamos a estudiar las propiedades tales como la masa y el radio máximo que pueden alcanzar, ésto es de importancia para nosotros, ya que utilizando ésta base, vamos a poder compararlas con las estrellas de neutrones observadas con ondas gravitacionales Abbott et al. [2017]; Lattimer [2012] y así, tratar de determinar un rango en el que las estrellas de quarks podrían ser observadas.

Vamos a empezar construyendo una configuración inicial para una estrella de quarks (Figura 4.5), como hicimos con las estrellas de neutrones.

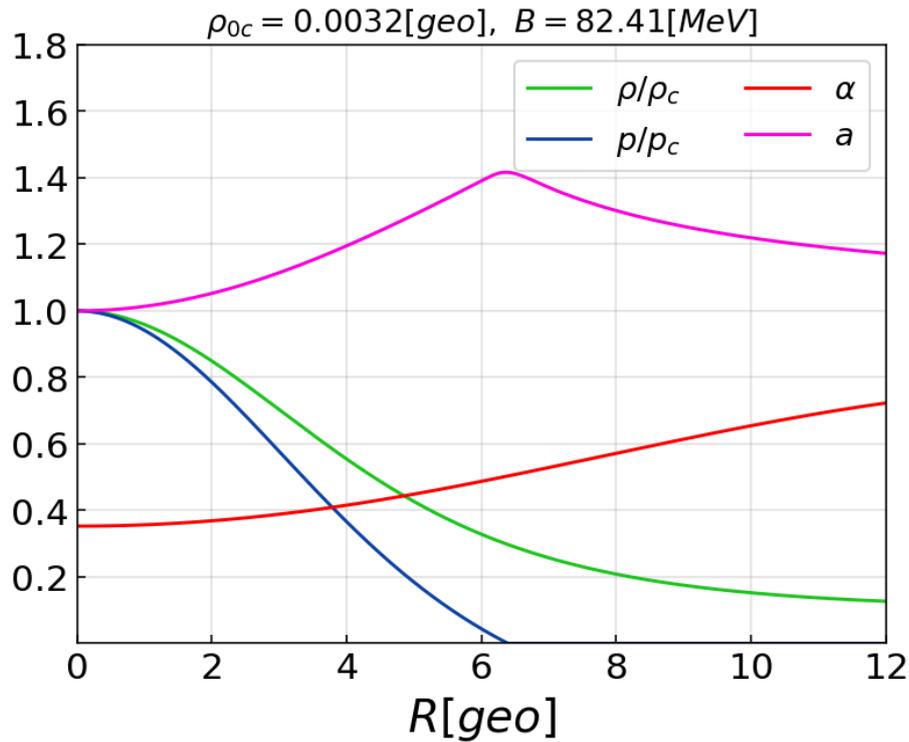


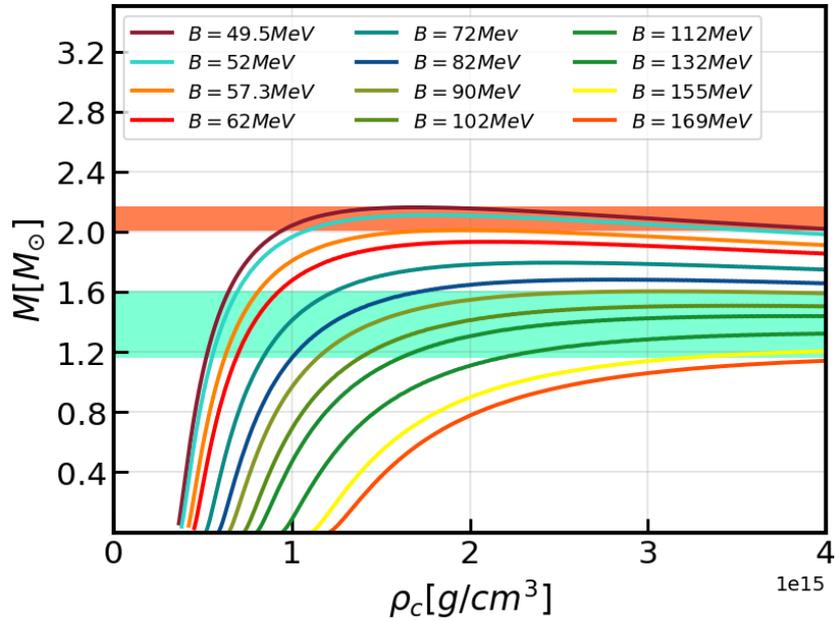
Figura 4.5: Ésta gráfica muestra como varían la densidad de masa  $\rho$ , la presión  $p$  y los parámetros definidos  $\alpha$  y  $a$  con respecto al radio de la estrella. por un lado los valores iniciales usados son  $B = 82.41[MeV]$ ,  $\rho_{0c} = 0.032 = 1.976 \times 10^{15}[g/cm^3]$  y  $\alpha_c = 0.5$ , por otro lado los resultados para el radio y la masa total son:  $R_{qs} = 6.39[geo] = 9.43[Km]$ ,  $M_{qs} = 1.637[M_\odot]$ .

---

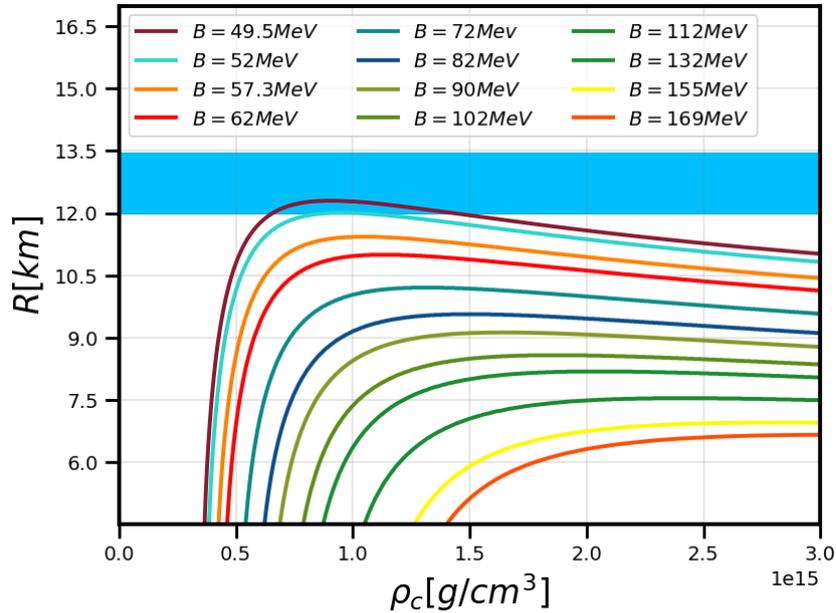
En la Figura 4.5 representamos la variación de la densidad de masa total  $\rho$ , la presión  $p$  y los parámetros definidos  $\alpha$  y  $a$  con respecto al radio de la estrella, un equivalente a los datos iniciales para estrellas de neutrones representados en la Figura 4.3, es importante señalar que se han usado en ésta ocasión unidades geométricas para que todas las cantidades físicas puedan ser graficadas juntas, la densidad de energía  $B = 82.41[MeV]$  se eligió para que la masa total de la estrella de quarks  $M_{qs} = 1.637[M_{\odot}]$  aproximara el valor de la masa total en la estrella de neutrones  $M_{qn2} = 1.637[M_{\odot}]$ , aunque se aprecia que el radio en ésta estrella  $R_{qs} = 6.39[geo] = 9.437[Km]$  es menor en comparación con la estrella de neutrones  $R_{ns2} = 7.62[geo] = 11.25[Km]$ . Ahora bien, los datos obtenidos para la estrella de quarks se muestran en la tabla (4.3).

Tabla 4.3: Valores máximos para la estrella de quarks asociados a la Figura 4.5

<i>Parámetro de la estrella</i>	<i>Valor</i>	<i>Unidades</i>
$M_{qs}$	1.637	$M_{\odot}$
$R_{qs}$	9.437	$Km$
$\rho_{qs}$	$1.976 \times 10^{15}$	$g/cm^3$
$T_{qs}$	$3.328 \times 10^{12}$	<i>Kelvin</i>
$B$	82.41	MeV
$p_{qs}$	$4.630 \times 10^{14}$	$g/s^2cm^2$



(a) variación de la densidad central con respecto a la masa total para diferentes valores de  $B$



(b) variación de la densidad central contra el radio para diferentes valores de  $B$

Figura 4.6: Estas gráficas muestran cómo varía la densidad central contra el radio y la masa de las estrellas de quarks construidas numéricamente, las franjas de color naranja y azul-verde del inciso 4.6a representan los valores mínimos y máximos de la masa para estrellas de neutrones reportados por Abbott et al. [2017]; Rezzolla et al. [2018]. La franja azul del inciso 4.6b representa la acotación para el radio de estrellas de neutrones reportado por Most [2018].

---

En la Figura 4.6a, se muestra como varía la densidad central con respecto a la masa total de una estrella, es un análogo a la Figura 4.4, pero ésta vez hacemos variar la densidad de energía  $B$  del modelo de la bolsa del MIT para estrellas de quarks, en lugar de la  $\kappa$  y  $\Gamma$  de la ecuación politrópica para estrellas de neutrones.

En la Figura 4.6b observamos como cambia el radio de la estrella con respecto a la densidad central usando  $B$  constante, se nota que hay un radio máximo correspondiente para cada  $B$ , lo que está de acuerdo con la Figura 4.6a, también se observa una franja de color azul, ésta franja representa el radio de Rezzolla,  $12.00 < R[km] < 13.45$  Most [2018], una constricción para el radio en el cuál caen las estrellas de neutrones con una masa aproximada de  $1.4[M_{\odot}]$ .

Es importante hacer la aclaración de cómo y porque se han tomado éstos datos. Primero construimos una estrella con datos iniciales y parámetros fijos determinados por el capítulo (3.4), un parámetro importante es la densidad central de masa, así, para cada densidad central una estrella es construida, ésta estrella alcanzará un radio y una masa total determinadas  $R_{estrella} = R_{total} = R_s$ ,  $M_{estrella} = M_{total} = M_s$ , ahora hacemos un barrido sobre la densidad de masa central  $\rho_{0c}$  y obtenemos las masas y los radios totales de todas las estrellas que construimos con cada densidad central, ahora se repite el mismo proceso para una densidad de energía diferente  $B$ . Justamente ésto es representado en la Figura 4.6.

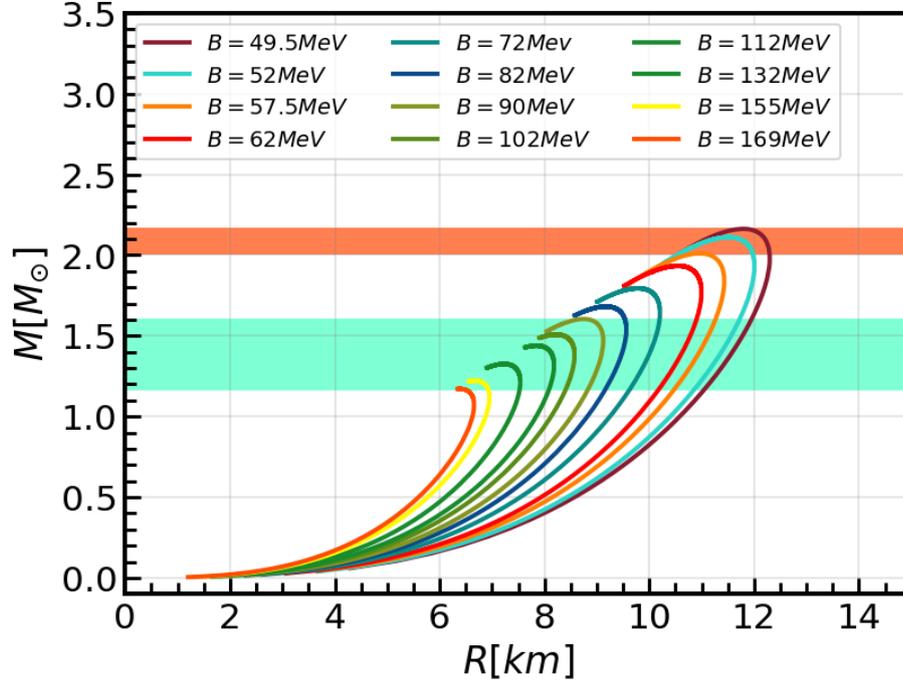


Figura 4.7: *variación del radio de una estrella con respecto a la masa total para diferentes valores de  $B$ .*

En la Figura 4.7, analizamos la variación de la masa total con respecto al radio, con el parámetro  $B$  constante, esto lo hacemos usando diferentes valores de la constante de la bolsa para estudiar cómo se comporta. Pueden observarse además dos bandas, una superior de color naranja y una inferior de color azul, éstas bandas han sido escogidas como los límites de masa superior e inferior que puede alcanzar una estrella de neutrones basados en la literatura [Rezzolla et al. \[2018\]](#), hemos elegido límites para estrellas de neutrones, ya que las estrellas de quarks, en principio, deberían ser más compactas y por lo tanto entrar en un rango límite diseñado para estrellas de neutrones, los cuales varían de una masa inferior  $1.17 \leq M_{min} \leq 1.6$  [Abbott et al. \[2017\]](#) a una masa superior de  $2.01_{-0.04}^{+0.04} \leq M_{max} \leq 2.16_{-0.15}^{+0.17}$  [Rezzolla et al. \[2018\]](#).<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Los límites inferiores de éste rango provienen de las observaciones para púlsares.

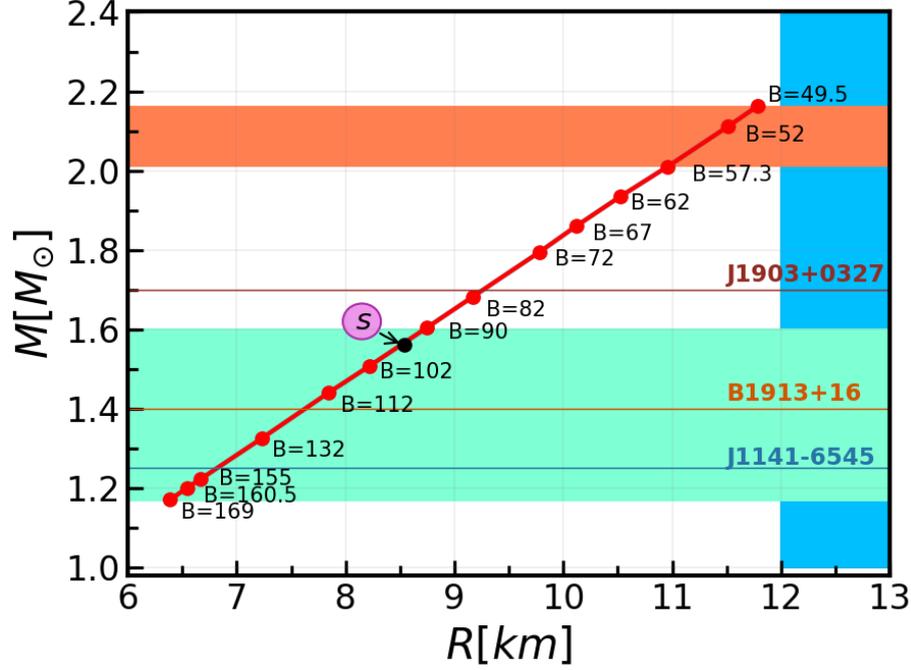


Figura 4.8: valores de radios y masas máximos correspondientes a la Figura 4.7.

En la Figura 4.8 se toman los valores de radios y masas máximos para cada densidad de energía  $B$  correspondientes a la Figura 4.7, éstos valores junto con otros máximos asociados pueden encontrarse en la tabla (4.4).

Hemos incluido los valores para la masa del quark *strange* en unidades de  $[MeV]$ , ésto con la finalidad de observar que pasaría si una estrella estuviera hecha de quarks, normalmente éstos valores son  $m_u = m_d = 5[MeV]$  y  $m_s = 130[MeV]$  Torres and Menezes [2013], pero Peng et al. [2000] propone valores de  $m_u = 5[MeV]$ ,  $m_d = 10[MeV]$  y  $m_s = 80 \sim 90[MeV]$ , donde  $m_u, m_d, m_s$  son las masas de los quarks *up*, *down* y *strange* respectivamente. En éste trabajo vamos a utilizar un valor de  $m_s = 95[MeV]$ ,  $m_u = 2.2[MeV]$ ,  $m_d = 4.7[MeV]$ , de acuerdo con el modelo estándar <sup>1</sup>.

Así, podemos estudiar las características que ésta tendría si estuviera contruida íntegramente de quarks *strange*, cabe mencionar que también podría contener quarks *up* y *down*, ya que la masa de éstos se consideraría relativamente despre-

<sup>1</sup>Las características de las partículas del Modelo Estándar pueden consultarse en la Figura 2.2.

ciable.

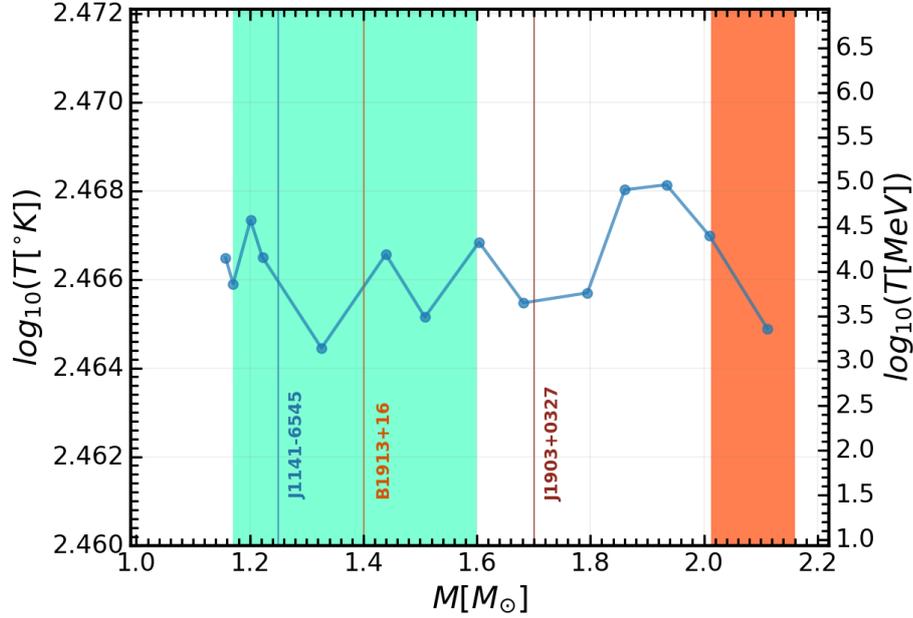
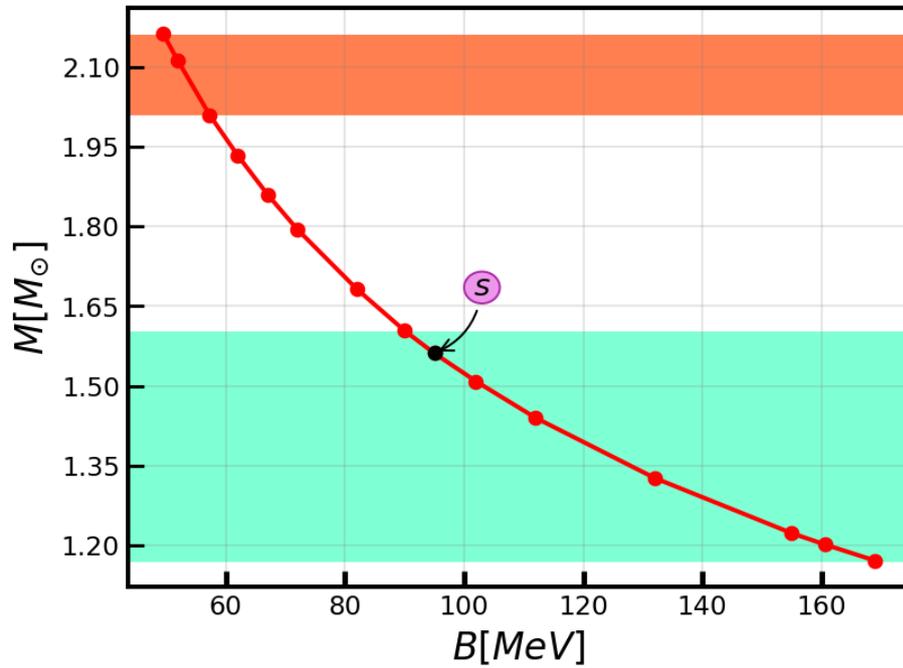


Figura 4.9: En ésta gráfica se muestra como cambia la temperatura central de las estrellas de quarks según las masas máximas alcanzadas.

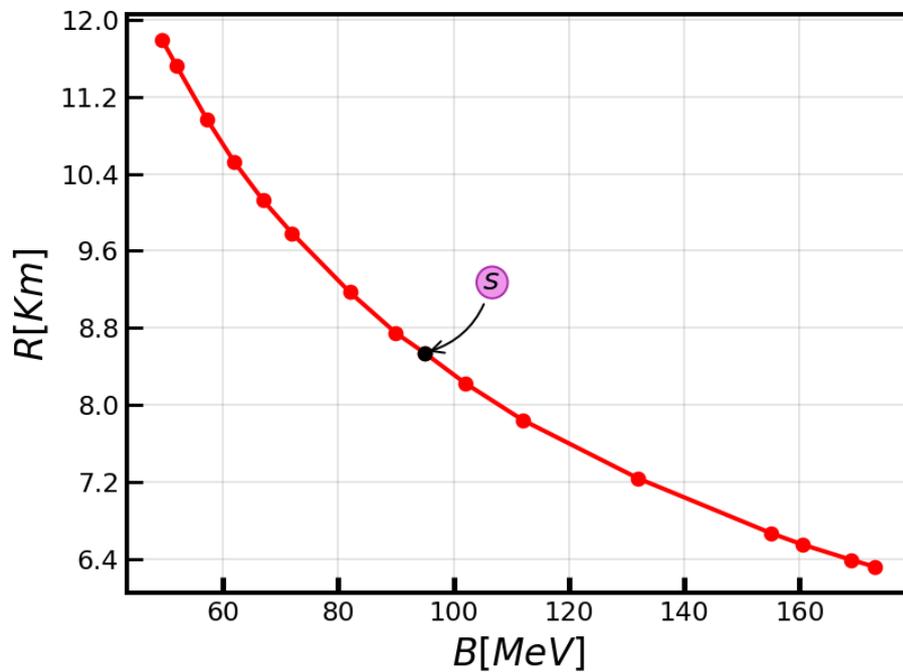
La Figura 4.9 muestra la temperatura máxima alcanzada para cada masa máxima, según la ecuación (B.29) aunque podría pensarse que tiene una variación considerable, según el orden de magnitud, notamos que mas bien parece mantenerse constante, tomando el hecho de que

$$1 \text{ grado Kelvin} = 8.621738 \times 10^{-5} eV \quad (4.1)$$

los valores obtenidos en la Figura 4.9 oscilan alrededor de  $1 \times 10^2 [MeV]$ , que es una temperatura a la cual se asume una transición de estado de quarks ligeros semilibres a mesones y bariones Witten [1984], es de importancia señalar que los valores para la temperatura son centrales, es decir, son validas en el centro de la estrella en donde tomamos valores para la densidad y la presión centrales fijos,  $\rho_c$  y  $p_c$ .



(a) Ésta gráfica muestra la masa máxima alcanzada por cada valor de la densidad de energía “ $B$ ”



(b) Variación del radio máximo alcanzado para una densidad de energía determinada “ $B$ ”

Figura 4.10: En éstas gráficas se muestra como cambia el radio y la masa de las estrellas de quarks según las densidades de energía  $B$

las Figuras 4.10a y 4.10b muestran como cambia la masa y el radio máximos para cada densidad de energía  $B$ , se puede apreciar que la relación no es lineal, y que cada vez se necesita una mayor cantidad de energía  $B$  para hacer más compacta a la estrella.

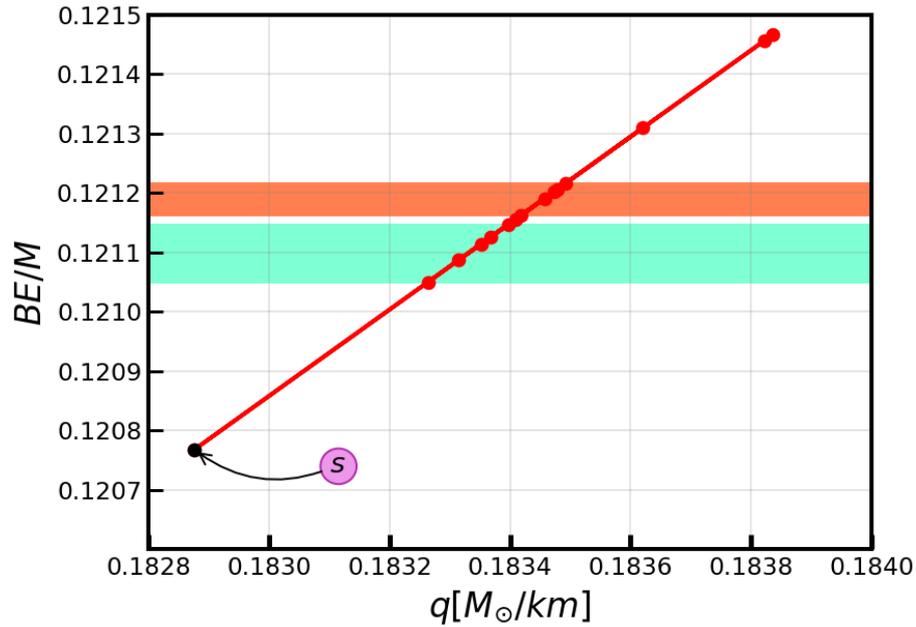


Figura 4.11: En ésta gráfica se muestra como varía el factor de compacticidad  $q = M[M_{\odot}]/R[km]$  con respecto a la energía de ligadura  $BE/M = 6q/5(2 - q)$  propuesta por *Lattimer and Prakash [2001]*.

La energía de ligadura representa la energía que se necesita para incorporar o separar  $n$  bariones, si la masa bariónica es  $m_b$ , La energía de ligadura será simplemente  $BE = nm_b - M$  en unidades de masa.

En la figura 4.11 se muestra una relación entre la compacticidad para los máximos de las estrellas construidas contra la energía de ligadura, observamos que la mayoría de las estrellas caen dentro de los rangos dados por las franjas verde-azul y naranja, pero no es así para el quark *strange*. Sin embargo la energía de ligadura por si sola, proporciona información limitada acerca de la estructura estelar *Lattimer and Prakash [2001]*.

Tabla 4.4: valores máximos alcanzados por las estrellas determinados por la constante  $B$ .

$M[M_{sun}]$	$R[Km]$	$\rho \times 10^{15}(g/cm^3)$	$T_c \times 10^{12}(K)$	$B [MeV]$
2.503	13.65	1.269	3.383	36.996
2.349	12.81	1.436	3.380	41.999
2.220	12.10	1.615	3.385	46.999
2.175	11.84	1.699	3.394	48.999
2.162	11.78	1.709	3.403	49.500
2.153	11.73	1.722	3.387	49.999
2.132	11.62	1.750	3.384	50.999
2.111	11.51	1.783	3.382	51.999
2.017	10.98	1.980	3.396	56.998
2.010	10.95	1.971	3.399	57.301
1.981	10.802	2.029	3.907	59.00
1.933	10.52	2.178	3.408	61.999
1.860	10.12	2.352	3.407	66.999
1.794	9.78	2.484	3.389	71.998
1.735	9.44	2.683	3.399	76.998
1.682	9.16	2.824	3.387	81.998
1.633	8.90	2.992	3.386	86.998
1.603	8.74	3.093	3.398	90.001
1.591	8.67	3.144	3.905	91.50
1.588	8.65	3.184	3.392	91.998
1.561	8.53	3.182	3.870	95.0017
1.508	8.22	3.504	3.384	101.999
1.439	7.84	3.889	3.396	111.999
1.235	6.78	4.895	3.315	152.000
1.222	6.66	5.314	3.395	155.002
1.201	6.54	5.537	3.402	160.502
1.174	6.52	4.941	3.217	167.000
1.170	6.38	5.769	3.390	169.003
1.157	6.31	5.895	3.394	173.003

---

Hasta aquí, hemos construido y determinado las propiedades principales de una estrella de quarks con simetría esférica, isotrópica y estática, y con la ayuda de la integración numérica, hemos encontrado propiedades interesantes, que pueden ser consideradas de forma modesta para establecer un rango en el cuál las estrellas de quarks pueden ser encontradas (si es que existieren), a continuación se presentan las conclusiones de éste trabajo, primero de forma general y luego resaltando los puntos más importantes.

# Capítulo 5

## Análisis y conclusiones

Integrando las ecuaciones diferenciales de Tolman-Oppenheimer-Volkoff con ayuda de un método Runge-Kutta de 4° orden, hemos estructurado parámetros como la presión  $p$ , la densidad de energía  $\rho$ , densidad de masa  $\rho_0$ , parámetros geométricos  $a$  y  $\alpha$ , así como la masa en reposo y total  $M_0$ ,  $M_T$  para construir una estrella de quarks estática, con simetría esférica e isotrópica. Después, hemos hecho un barrido sobre la densidad central de muchas estrellas, y hemos encontrado relaciones entre los parámetros máximos alcanzados como el radio de la estrella  $R_{total}$ , su masa  $M_{total}$  y la temperatura  $T$ , tanto para estrellas de neutrones usando la ecuación (B.27), como para estrellas de quarks (2.81). Éste barrido lo hemos hecho porque nos interesan saber los valores máximos alcanzados para una configuración con el parámetro  $B$  fijo, los resultados pueden consultarse en la tabla (4.4).

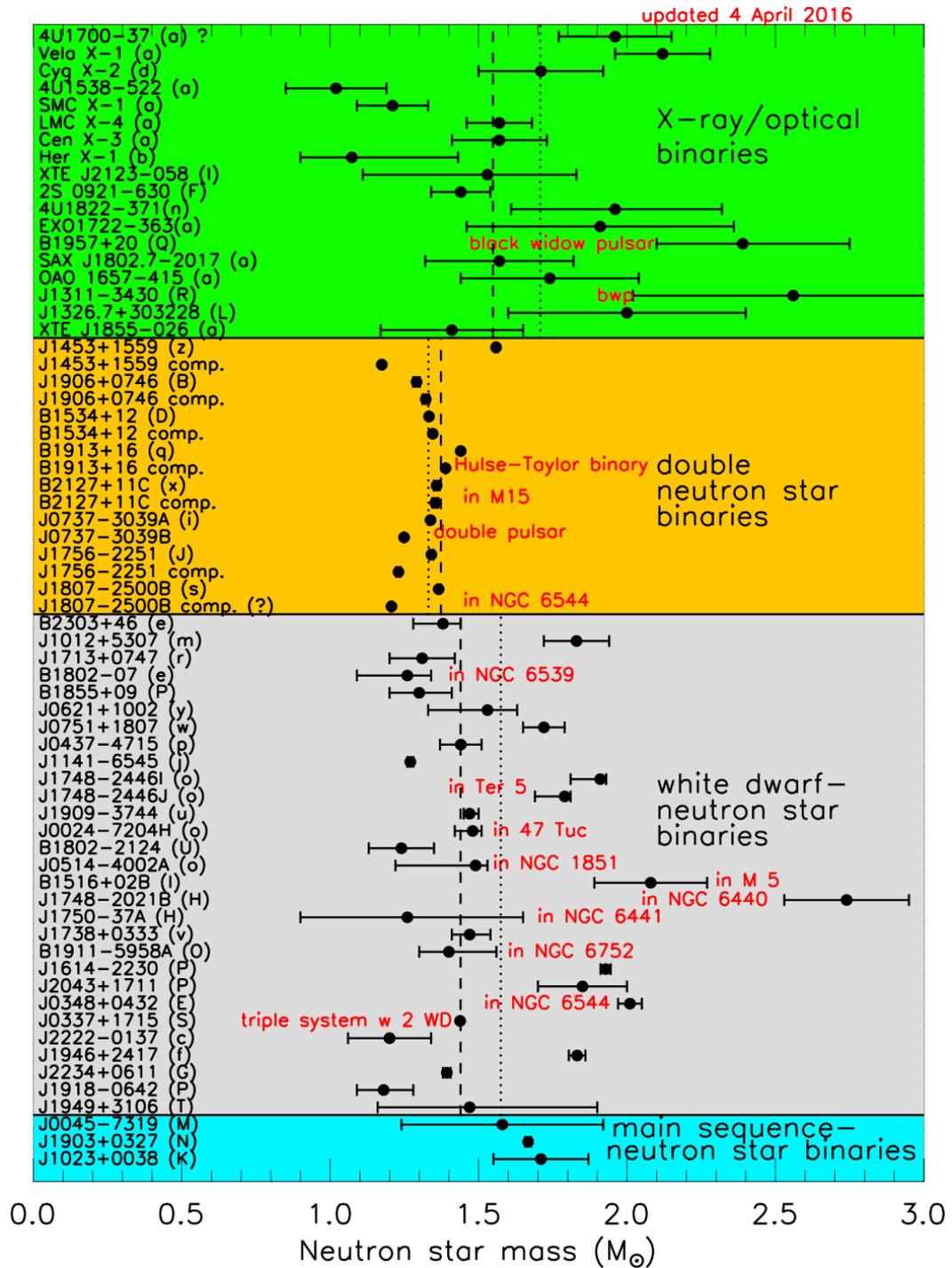


Figura 5.1: Masas de estrellas de neutrones tomadas de sistemas binarios *Lattimer [2012]*

---

Tomando en cuenta la Tabla (4.4), observamos que para un rango de  $37[MeV] \leq B \leq 173[MeV]$  obtenemos valores para la masa en un rango de  $1.15 \leq M_{total} \leq 2.5$ , y valores para el radio de la estrella de  $6.31 \leq R_{total} \leq 13.6$ , Éstos valores son puramente teóricos, pero si queremos hacer una comparación con la literatura, encontramos que [Abbott et al. \[2017\]](#) encuentra un límite de masa inferior basado en observaciones de ondas gravitacionales para estrellas binarias de  $1.17 \leq M_{min} \leq 1.6$ , y [Rezzolla et al. \[2018\]](#), predice una masa superior para estrellas de neutrones alrededor de  $2.01_{-0.04}^{+0.04} \leq M_{máx} \leq 2.16_{-0.15}^{+0.17}$ , además de un radio superior de  $12.00 < R[Km] < 13.45$ , [Most \[2018\]](#). Si consideramos que las estrellas de quarks que construimos tienen una masa igual a las estrellas de neutrones, el radio de nuestras estrellas variaría según las siguientes relaciones  $6.38 \leq R_{min}[Km] \leq 8.74$ ,  $10.95 \leq R_{máx}[Km] \leq 11.78$  para rangos de la densidad de energía de la bolsa  $90 \leq B_{min}[MeV] \leq 169$  y  $49.5 \leq B_{máx}[MeV] \leq 57$  respectivamente, en donde a  $B = 169$  le corresponde el radio menor y masa menor, y a  $B = 49.5$  le corresponde el radio y masa mayor.

También es importante decir que el radio promedio de [Rezzolla Most \[2018\]](#) para una estrella de neutrones con una masa de  $1.4[M_{\odot}]$ , es  $R = 12.39[Km]$ , en éste trabajo obtuvimos que para una masa de la estrella de quarks de  $M = 1.43[M_{\odot}]$ , le corresponde un radio de  $R = 7.84[Km]$  con una energía de la bolsa de  $B = 112[MeV]$ . Es importante aclarar que hemos utilizado valores para estrellas de neutrones dados por [Abbott et al. \[2017\]](#); [Lattimer \[2012\]](#); [Most \[2018\]](#); [Rezzolla et al. \[2018\]](#) para construir cotas en las que deberían estar nuestros resultados.

Por otro lado si analizamos la ecuación *MIT* (2.81), observamos que la presión disminuye mientras la constante de energía  $B$  aumenta, aunque ésta relación no es inversamente proporcional, esto puede entenderse intuitivamente ya que la constante  $B$ , como se dijo anteriormente, podría representar una presión del exterior que actúa sobre la bolsa de quarks, por lo tanto la masa y el radio alcanzado por la estrella van a ser menores, pero si observamos su densidad, notamos que ésta aumenta conforme la densidad de energía  $B$  es mayor.

En las Figuras 4.6 y 4.7, se muestra que existe un valor máximo asociado al radio y la masa total  $R_{total}$ ,  $M_{total}$ . Las configuraciones estables estarán por debajo de  $M_{total}$ , y después de ésta masa, aparecerán las configuraciones inestables, que inevitablemente colapsarán a un agujero negro si son perturbadas, tal como sucede

---

con las estrellas de neutrones [Guzmán et al. \[2012\]](#). Observamos además en la Figura 5.1 que las observaciones para masas de sistemas binarios de estrellas de neutrones reportadas por [Lattimer \[2012\]](#) rondan alrededor de  $1.4[M_\odot]$ , que corresponde a una densidad de energía de la bolsa de  $B = 110[MeV]$ , que resulta casi igual a la suma de la energía del quark *strange, up* y *down*.

Un resultado importante y curioso es el correspondiente a la Figura 4.5, en donde se intenta emular un resultado conocido para estrellas de neutrones reportado por [Guzmán et al. \[2012\]](#), a grandes rasgos, para estrellas de quarks obtenemos una masa de la estrella  $M_s = 1.637[M_\odot]$  y un radio total de  $R_s = 9.43[Km]$ , mientras que para estrellas de neutrones el radio y la masa total son respectivamente  $M_s = 1.637[M_\odot]$ ,  $R_s = 11.25[Km]$ , lo que nos dice que nuestra estrella de quarks tiene un radio más pequeño en comparación con la estrella de neutrones cuando ambas tienen la misma masa, la energía que se necesita para “fabricar” dicha estrella es del orden de  $B = 82.41[MeV]$ , que resulta ser un rango aceptable que entra dentro de la franja de estrellas que pueden ser construidas conforme a las comparaciones realizadas con estrellas de neutrones, dicho rango para  $B$  varía de  $49.5[MeV] \leq B \leq 169[MeV]$ . Notamos también que se necesita una mayor cantidad de energía  $B$  para hacer más compacta a la estrella y ésta relación resulta no ser lineal, justo como se muestra en las Figuras 4.10a y 4.10b.

Los resultados principales de éste trabajo se enumeran a continuación

1. Mientras la constante de la bolsa “ $B$ ” aumenta, la masa y el radio disminuyen, esto es debido a que la constante actúa como una presión exterior.
2. La temperatura  $T$  en el centro de la estrella aparece como una variable lo suficientemente constante del orden de  $10^{12}K - 10^2 MeV$ , tanto para estrellas de neutrones como para estrellas de quarks, sin importar los parámetros  $\Gamma$  y  $\kappa$  para estrellas de neutrones, ni la constante  $B$  para estrellas de quarks.
3. Si hacemos una comparación con las estrellas de neutrones observadas con ondas gravitacionales (franja azul-verde de la Figura 4.8), las estrellas de quarks que construimos son más compactas, alcanzando radios de  $6.38 - 8.74[Km]$  para valores de la constante de la bolsa de  $169 < B[MeV] < 90$ .
4. Si la estrella de quarks estuviese formada íntegramente del quark *strange*,

---

*up* y *down*, ésta alcanzaría una masa aproximada de  $M_s = 1.561[M_\odot]$  con un radio aproximado de  $R_s = 8.53[Km]$ , tomando la masa del quark *strange*, *up* y *down* como  $m_s = 95[MeV]$ ,  $m_u = 2.3[MeV]$ ,  $m_d = 4.8[MeV]$  <sup>1</sup>, éste es un rango que está dentro de los parámetros aceptados para estrellas observadas con ayuda de ondas gravitacionales [Abbott et al. \[2017\]](#).

Es importante resaltar el hecho de que nuestro modelo asume que las estrellas construidas tienen simetría esférica, con una métrica estática, materia isotrópica y en equilibrio hidrostático, el siguiente paso sería analizar casos en los que la estrella es híbrida (es decir, que contengan quarks en el interior y neutrones en el exterior), con rotación, y asignándole un campo magnético tan característico de las estrellas de neutrones (púlsares) que evoluciona en el tiempo, además de usar EoS que describan la materia nuclear más sofisticadas.

---

<sup>1</sup> Éstos valores son tomados del modelo estándar, representado en la [Figura 2.2](#)

# Apéndice A

## Sistemas de Unidades

En relatividad general se suelen usar unidades geométricas, ésto quiere decir que hacemos  $c = G = \hbar = K = k_b = 1$  en donde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío,  $G$  es la constante de gravitación universal,  $K$  es la constante de coulomb,  $\hbar$  es la constante de planck dividida entre  $2\pi$  y  $k_b$  es la constante de boltzmann para los gases ideales, a partir de éstas unidades podemos expresar la presión, energía, longitud etc, a éstas unidades también se les conoce como unidades de Planck o unidades geométricas [[L. Rezzolla, 2013](#)]

A continuación se detallan las conversiones al sistema de unidades *cgs*

$$c = 2.99792458 \times 10^{10} \text{cm s}^{-1} \quad (\text{A.1})$$

para la constante de gravitación

$$G = 6.67384 \times 10^{-8} \text{cm}^3 \text{g}^{-1} \text{s}^{-2} \quad (\text{A.2})$$

Los segundos y los gramos del sistema “cgs” pueden escribirse como

$$1 \text{ s} = 2.99792458 \times 10^{10} \left(\frac{1}{c}\right) \text{cm} \quad (\text{A.3})$$

---


$$1 \text{ g} = 7.42565 \times 10^{-29} \left( \frac{c^2}{G} \right) \text{ cm} \quad (\text{A.4})$$

La masa puede expresarse como

$$M = nM_{\odot} \quad (\text{A.5})$$

en donde  $n$  es un número real.

$$M_{\odot} = 1.9884 \times 10^{33} \text{ g} \quad (\text{A.6})$$

si llamamos el radio gravitacional a  $r_g = GM/c^2$ , podemos expresar el sistema *cgs* como

$$1 \text{ cm} = 6.77269 \times 10^{-6} \left( \frac{M_{\odot}}{M} \right) r_g \quad (\text{A.7})$$

$$1 \text{ s} = 2.03040 \times 10^5 \left( \frac{1}{c} \right) \left( \frac{M_{\odot}}{M} \right) r_g \quad (\text{A.8})$$

$$1 \text{ g} = 5.02916 \times 10^{-34} \left( \frac{c^2}{G} \right) \left( \frac{M_{\odot}}{M} \right) r_g \quad (\text{A.9})$$

Ahora vamos a escribir las conversiones entre el sistema *cgs* y el sistema *geométrico* para la distancia  $d$ , el tiempo  $t$ , la masa  $m$ , la frecuencia  $f$ , la velocidad  $v$ , densidad de masa  $\rho$ , presión  $p$  y luminosidad  $L$ .

$$d_{cgs} = 1.47651 \times 10^5 \left( \frac{M_{\odot}}{M} \right) d_{geo} \quad (\text{A.10})$$

$$t_{cgs} = 4.92513 \times 10^{-6} c \left( \frac{M_{\odot}}{M} \right) t_{geo} \quad (\text{A.11})$$

$$m_{cgs} = 1.9884 \times 10^{33} \left( \frac{G}{c^2} \right) \left( \frac{M_{\odot}}{M} \right) m_{geo} \quad (\text{A.12})$$

---


$$f_{cgs} = 2.03040 \times 10^5 \left(\frac{1}{c}\right) \left(\frac{M_\odot}{M}\right) f_{geo} \quad (\text{A.13})$$

$$v_{cgs} = 2.99792458 \times 10^{10} \left(\frac{1}{c}\right) v_{geo} \quad (\text{A.14})$$

$$\rho_{cgs} = 6.17714 \times 10^{17} \left(\frac{G}{c^2}\right) \left(\frac{M_\odot}{M}\right)^2 \rho_{geo} \quad (\text{A.15})$$

$$p_{cgs} = 5.55173 \times 10^{38} \left(\frac{G}{c^4}\right) \left(\frac{M_\odot}{M}\right)^2 p_{geo} \quad (\text{A.16})$$

$$L_{cgs} = 3.62849 \times 10^{59} \left(\frac{g}{c^5}\right) L_{geo} \quad (\text{A.17})$$

En donde el subíndice *cgs* (centímetro-gramo-segundo) y *geo* (geométrico) se refiere al sistema de unidades usado.

Hablando de las unidades de la constante de la bolsa *B* en la ecuación de estado MIT bag model, podemos obtenerlas de la siguiente forma.

Es conocido el hecho de que  $\hbar c = 197.3 \text{ MeV} f_m$ , sin embargo, si hacemos  $\hbar c = 1$  obtenemos que  $1 f_m = 1/197.3 \text{ MeV}^{-1}$ , además sabemos que las unidades de la constante de la bolsa son  $[B] = [\rho] = [E/V] = \text{MeV}/f_m^3$  ó  $[B] = [P] = \text{kg}/\text{ms}^2$ , que son unidades de densidad de energía o de presión. Así tenemos que  $[B] = \text{MeV}/f_m^3 = (197.3)^3 \text{ MeV}^4$ , sacando raíz cuarta de ambos lados obtenemos que las unidades para la constante son  $[B]^{1/4} = \text{MeV}$ .

Por comodidad en éste trabajo se omite la raíz cuarta cada vez que se habla de la constante de la bolsa *B*.

---

# Apéndice B

## Ecuación de estado de un gas ideal para modelar estrellas de neutrones

Una ecuación de estado ampliamente usada para representar a una estrella, es la ecuación de estado politrópica, en donde no hay intercambio de calor ni de masa (isentrópico). Una forma de obtener dicha ecuación es la siguiente [Horedt \[2004\]](#)

Escribamos la primera ley de la termodinámica, un ley de conservación en la que el calor suministrado a un sistema es igual al trabajo que realiza mas un incremento en la energía interna, escrita como

$$dQ = dU + dW = dU + pdV. \tag{B.1}$$

Nótese que si consideramos un volumen específico (volumen por unidad de masa  $m = 1$ ), la ecuación (B.1), puede ser escrita como

$$dQ = dU - p \frac{d\rho_0}{\rho_0^2}, \tag{B.2}$$

---

ya que  $dV = d(1/\rho_0) = -d\rho_0/\rho_0^2$ .

Aquí  $dQ$  representa un cambio infinitesimal en el calor,  $dU$  denota un cambio infinitesimal en la energía interna y  $dV$  un cambio infinitesimal en el volumen,  $p$  es la presión hidrostática y  $\rho_0$  es la densidad de masa en reposo. Definamos el calor específico, como la cantidad de calor por unidad de masa  $m = 1$ , que debemos suministrar a un sistema termodinámico para cambiar 1 grado Kelvin su temperatura. Escrito como

$$c = \frac{dQ}{mdT} = C/m, \quad (\text{B.3})$$

en donde  $C = \frac{dQ}{dT}$  es la capacidad calorífica y  $dT$  es un cambio infinitesimal en la temperatura, ya que éste puede cambiar de muchas maneras, normalmente se especifica un parámetro que permanece constante mientras el otro cambia, por ejemplo, la ecuación (B.4) indica un calor específico considerando la presión constante, y la ecuación (B.5) indica el calor específico a volumen constante.

$$c_p = \left( \frac{dQ}{dT} \right)_p, \quad (\text{B.4})$$

$$c_v = \left( \frac{dQ}{dT} \right)_v. \quad (\text{B.5})$$

La ecuación de estado para un gas ideal puede ser expresada como

$$pV = RT/\mu, \quad (\text{B.6})$$

o bien

$$p = R\rho_0 T/\mu, \quad (\text{B.7})$$

en donde  $R = 8.3144598(48) [JK^{-1}mol^{-1}]$  es la constante de los gases ideales,  $p$  es la presión,  $T$  la temperatura,  $V$  es el volumen, y  $\mu$  es la masa molar del gas (la masa en reposo de las partículas libres por mol). Utilizando la primera ley de la termodinámica dada por la ecuación (B.1), podemos escribir la ecuación (B.5)

---

como

$$c_V = \left( \frac{dQ}{dT} \right)_V = \frac{dU}{dT}, \quad (\text{B.8})$$

ya que  $pdV = 0$  por considerar el sistema a un volumen constante.

Derivando la ecuación (B.6)

$$Vdp + pdV = RdT/\mu, \quad (\text{B.9})$$

e introduciéndola en la primera ley de la termodinámica dada por la ecuación (B.1) obtenemos

$$dQ = dU + pdV = dU + RdT/\mu - Vdp, \quad (\text{B.10})$$

con la ayuda de la ecuación (B.4) podemos obtener una ecuación para el calor específico a presión constante

$$c_p = \left( \frac{dQ}{dT} \right)_p = \frac{dU}{dT} + R/\mu = c_V + R/\mu. \quad (\text{B.11})$$

Para obtener la ecuación politrópica con un calor específico constante ( $c = \text{const}$ ), basta con sustituir las ecuaciones (B.8) y (B.3) en la ecuación (B.1) y (B.2)

$$dQ = cdT = c_V dT + pdV = c_V dT - RTd\rho_0/\rho_0\mu, \quad (\text{B.12})$$

o bien gracias a la ecuación (B.11), tenemos que  $R/\mu = c_p - c_V$ , y obtenemos la siguiente ecuación

$$(c - c_V) \frac{dT}{T} = (c_V - c_p) \frac{d\rho_0}{\rho_0}, \quad (\text{B.13})$$

integrando la ecuación diferencial dada por la ecuación (B.13) obtenemos

$$T\rho_0^{\frac{c_p - c_V}{c - c_V}} = \text{constante}. \quad (\text{B.14})$$

---

Por convención se define el índice politrópico de un gas perfecto ( $n$ ) como

$$n = (c_V - c)/(c_p - c_V), \quad (\text{B.15})$$

sustituyendo la ecuación (B.15) en la ecuación (B.14) y con la ayuda de la ecuación de estado (B.6) y (B.7) se pueden escribir 3 ecuaciones equivalentes que gobiernan un proceso politrópico

$$T\rho_0^{-1} \propto TV^{\frac{1}{n}} = \text{constante}, \quad (\text{B.16})$$

$$p\rho_0^{-1-\frac{1}{n}} \propto pV^{1+\frac{1}{n}} = \text{constante}, \quad (\text{B.17})$$

$$pT^{-1-n} = \text{constante}. \quad (\text{B.18})$$

De las ecuaciones (B.16) y (B.17) es obvio que  $n = -1$  implica  $p = \text{constante}$  (proceso isobárico). De la ecuación (B.18), se observa que  $T = \text{constante}$  si  $n = \pm\infty$  (proceso politrópico isoterma). Si reescribimos la ecuación (B.18) como  $T^{-n}\rho_0 \propto T^{-n}/V = \text{constante}$ , observamos que si  $n = 0$  tenemos  $\rho_0 \propto 1/V = \text{constante}$ . Entonces ocurre un proceso isométrico ( $V = \text{constante}$ ) o isopícnico ( $\rho_0 = \text{constante}$ ).

Se define el exponente politrópico de un gas perfecto como

$$\Gamma' = (c_p - c)/(c_v - c), \quad (\text{B.19})$$

y tomando en cuenta la ecuación (B.15), el índice politrópico de un gas perfecto puede ser definido como

$$n = 1/(\Gamma' - 1); \Gamma' = 1 + 1/n, \quad (\text{B.20})$$

Sólo para un gas perfecto adiabático y en un proceso reversible (proceso isentrópico) en donde se cumple  $c = dQ/dT = 0$ , tenemos que  $\Gamma = \Gamma'$  y  $n = 1/(\Gamma - 1)$ .

---

Así las ecuaciones (B.16)-(B.18) pueden ser reescritas como

$$\begin{aligned}
p\rho_0^{-\Gamma} &\propto pV^\Gamma = \text{constante}, & (B.21) \\
pT^{\Gamma/(1-\Gamma)} &= \text{constante}, \\
T\rho_0^{(1-\Gamma)} &\propto TV^{\Gamma-1} = \text{constante}, \\
(\Gamma = \Gamma' = 1 + 1/n; S = \text{constante}).
\end{aligned}$$

Cabe destacar que un gas perfecto adiabático es siempre isentrópico, ya que los procesos disipativos se encuentran excluidos por definición. Usando la derivada logarítmica en las ecuaciones (B.6) y (B.7), podemos escribir la presión explícitamente en términos de la densidad y la temperatura como  $dp/p = d\rho_0/\rho_0 + dT/T$ , o bien podemos reescribir la ecuación (B.13) bajo la forma equivalente  $(c_V - c)dp/p = (c_p - c)d\rho_0/\rho_0$  y  $(c_p - c_V)dp/p = (c_p - c)dT/T$ , éstas ecuaciones en conjunto con la ecuación (B.13) pueden ser usadas para definir el exponente politrópico de la ecuación (B.19) de las siguientes formas

$$\begin{aligned}
\Gamma' &= d\ln p/d\ln \rho_0 = -d\ln p/d\ln V, & (B.22) \\
\Gamma' / (\Gamma' - 1) &= d\ln p/d\ln T, \\
\Gamma' - 1 &= d\ln T/d\ln \rho_0 = -d\ln T/d\ln V.
\end{aligned}$$

Usando las definiciones dadas por las ecuaciones (B.20) y (B.23) el índice politrópico de un gas perfecto puede ser definido por una de las siguientes tres ecuaciones

$$\begin{aligned}
1 + 1/n &= d\ln p/d\ln \rho_0 = -d\ln p/d\ln V, & (B.23) \\
1 + n &= d\ln p/d\ln T, \\
1/n &= d\ln T/d\ln \rho_0 = -d\ln T/d\ln V.
\end{aligned}$$

De la ecuación (B.17) obtenemos la ecuación de estado politrópica para un gas

---

perfecto como

$$p = \kappa \rho_0^{1+1/n}, \quad (\text{B.24})$$

en donde  $\kappa$  es una constante de proporcionalidad definida para  $n \neq 0$  por

$$\kappa = RT/\mu\rho_0^{1/n}, \quad (\text{B.25})$$

y para  $n = 0$

$$\kappa\rho_0^{1/n} = RT/\mu = p/\rho_0. \quad (\text{B.26})$$

si tomamos el índice adiabático o índice politrópico como  $\Gamma = 1 + \frac{1}{n}$ , podemos reescribir la ecuación (B.24) como

$$p = \kappa\rho_0^\Gamma, \quad (\text{B.27})$$

A la ecuación (B.27) se le conoce como la ecuación politrópica o polítropa para un gas ideal, y es la que usaremos en éste trabajo para modelar estrellas de neutrones.

Por otro lado para conocer la temperatura, que resulta de importancia para comparar la energía de una estrella de neutrones o quarks debido a su temperatura o a su densidad, nos basta con hacer

$$T = \frac{m_p}{k_B} \frac{p}{\rho_0}, \quad (\text{B.28})$$

donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann y  $m_p$  es la masa en reposo del protón, en unidades geométricas y con  $m_p/k_B = 1$  la temperatura puede ser expresada como

$$T = 1.088 \times 10^{13} \left(\frac{p}{\rho_0}\right)[K], \quad (\text{B.29})$$

de la misma forma que ah sido calculada en [O. Zanotti and Palenzuela \[2010\]](#).

# Referencias

- K. Johnson C. B. Thorn A. Chodos, R. L. Jaffe and V. F. Weisskopf. New extended model of hadrons. *Phys. Rev.*, D 9:34,71, 1974. doi: 10.1103/PhysRevD.9.3471. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.9.3471>. 30, 31
- B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. X. Adhikari, V. B. Adya, and et al. GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral. *Physical Review Letters*, 119(16):161101, October 2017. doi: 10.1103/PhysRevLett.119.161101. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2017PhRvL.119p1101A>. 1, 55, 57, 59, 68, 70
- C. Alcock and E. Farhi. Evaporation of strange matter in the early universe. *Phys. Rev. D*, 32:1273–1279, Sep 1985. doi: 10.1103/PhysRevD.32.1273. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.32.1273>. 12
- C. Alcock, E. Farhi, and A. Olinto. Strange stars. *The Astrophysical Journal*, 310:261,272, 1986. doi: 10.1086/164679. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1986ApJ...310..261A>. 13, 34
- M. Alcubierre. *Introduction to 3 + 1 Numerical relativity*. Oxford University Press, EU, 2008. 18
- H.E.S. Velten A.M. Oliveira and I.G. Salako J.C. Fabris. Newtonian view of general relativistic stars. *ArXiv e-prints*, Nov 2014. URL <https://arxiv.org/pdf/1409.7385.pdf>. 26

- Freire P.C.C. Wex N. Tauris T.M. Lynch R.S. van Kerkwijk M.H. Kramer M. Bassa C. Dhillon V.S. Driebe T. Hessels J.W.T. Kaspi V.M. Kondratiev V.I. Langer N. Marsh T.R. McLaughlin M.A. Pennucci T.T. Ransom S.M. Stairs I.H. van Leeuwen J. Verbiest J.P.W. Whelan D.G. Antoniadis, J. A massive pulsar in a compact relativistic binary. *Science*, 457:340,448, 2013. doi: 10.1126/science.1233232. URL <https://ui.adsabs.harvard.edu/#abs/2013Sci...340..448A>. 7
- J. H. Applegate and C. J. Hogan. Relics of cosmic quark condensation. *Phys. Rev.*, D 31:3037, 1985. doi: 10.1103/PhysRevD.31.3037. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.31.3037>. 12
- Bo Bally, John; Reipurth. *The Birth of Stars and Planets (illustrated ed.)*. Cambridge University Press, EU, 2006. 2, 7
- T. W. Baumgarte and S. L. Shapiro. *NUMERICAL RELATIVITY: Solving Einstein's Equations in the Computer*. Cambridge University Press, UK, UK, 2010. 18
- S. M. Carroll. Lecture Notes on General Relativity. *arXiv e-prints*, art. gr-qc/9712019, Dec 1997. <https://ui.adsabs.harvard.edu/#abs/1997gr.qc....12019C>. 26
- P. Collier. *A most incomprehensible thing : notes towards a very gentle introduction to the mathematics of relativity*. [Harlow] : Incomprehensible Books, 2014. 22
- Pennucci T. Ransom S.M. Roberts M.S.E. Hessels J.W.T. Demorest, P.B. A two-solar-mass neutron star measured using shapiro delay. *Nature*, 467:1081–1083, 2010. doi: 10.1038/nature09466. URL <https://ui.adsabs.harvard.edu/#abs/2010Natur.467.1081D>. 7
- C.D Ott E. O'Connor. A new open-source code for spherically symmetric stellar collapse to neutron stars and black holes. *Class. Quantum Grav.*, 27:114–103, 2010. doi: 10.1088/0264-9381/27/11/114103. URL <https://ui.adsabs.harvard.edu/#abs/2010CQGra..27k4103O>. 2

- E. Farhi and R. L. Jaffe. Strange matter. *Phys. Rev. D*, 30:2379,2390, Dec 1984. doi: 10.1103/PhysRevD.30.2379. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.30.2379>. 34
- David Galbraith and Carsten Burgard. Standard model of physics, 2012. URL <http://www.texample.net/tikz/examples/model-physics/>. 33
- N. K. Glendenning. *Compact stars, nuclear physics, particle physics and general relativity*. Springer-Verlag New York, EU, 2000. 34
- N. K. Glendenning and C. Kettner. Possible third family of compact stars more dense than neutron stars. *Astron. Astrophys.*, 353:L9,L12, 2000. 11
- F.S. Guzmán, F.D. Lora-Clavijo, and M.D. Morales. Revisiting spherically symmetric relativistic hydrodynamics. *Revista mexicana de física E*, 58:84 – 98, 12 2012. ISSN 1870-3542. URL [http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1870-35422012000200001&nrm=iso](http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1870-35422012000200001&nrm=iso). 2, 50, 69
- K. S.; Wakano M.; Wheeler J. A. Harrison, B. K.; Thorne. *Gravitation Theory and Gravitational Collapse*. University of Chicago Press, EU, 1965. 10
- G. P. Horedt. *Polytropes, Applications in Astrophysics and Related Fields*. Springer-Verlag New York, 2004. 74
- P. Oja Karttunen H. Kroger and H. Poutanen M. Donner. *Fundamental Astronomy*. Springer-Verlag New York, USA, 2006. 3, 6
- E. M. Lifshitz L. D. Landau. *Fluid Mechanics, Volumen 6*. Pergamon Press, 1959. 26
- O. Zanotti L. Rezzolla. *Relativistic Hydrodynamics*. SOUP Oxford, EU, 2013. 71
- J. Lattimer. The nuclear equation of state and neutron star masses. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 62:485,515, 2012. doi: 10.1146/annurev-nucl-102711-095018. URL <https://ui.adsabs.harvard.edu/#abs/2012ARNPS..62..485L>. 2, 55, 67, 68, 69

- J. M. Lattimer and M. Prakash. Neutron Star Structure and the Equation of State. *apj*, 550:426–442, March 2001. doi: 10.1086/319702. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2001ApJ...550..426L>. 1, 41, 63
- L. Lindblom. ”determining the nuclear equation of state from neutron star masses and radii”. *The astrophysical j.*, 398:569, 573, 1992. doi: 10.1086/171882. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1992ApJ...398..569L>. 11
- F. D. Lora-Clavijo, A. Cruz-Osorio, and F. S. Guzmán. CAFE: A New Relativistic MHD Code. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 218:24, Jun 2015. doi: 10.1088/0067-0049/218/2/24. URL <https://ui.adsabs.harvard.edu/#abs/2015ApJS...218...24L>. 14
- J. Madsen. *Lecture Notes in Physics*. 162, 1999. 9
- B. Margalit and B. D. Metzger. Constraining the Maximum Mass of Neutron Stars from Multi-messenger Observations of GW170817. *apj*, 850:L19, Dec 2017. doi: 10.3847/2041-8213/aa991c. URL <https://ui.adsabs.harvard.edu/#abs/2017ApJ...850L..19M>. 7
- Miller J.M. Miller, M.C. The masses and spins of neutron stars and stellar-mass black holes. *Physics Reports*, 548:1–34, 2015. doi: 10.1016/j.physrep.2014.09.003. URL <https://ui.adsabs.harvard.edu/#abs/2015PhR...548....1M>. 7
- L. R.; Rezzolla L.; Schaffner-Bielich Jürgen Most, E. R.; Weih. New constraints on radii and tidal deformabilities of neutron stars from gw170817. *Physical Review Letters*, 120:261103, 2018. doi: 10.1103/PhysRevLett.120.261103. URL <https://ui.adsabs.harvard.edu/#abs/2018PhRvL.120z1103M>. 7, 57, 58, 68
- L. Del Zanna O. Zanotti, L. Rezzolla and C. Palenzuela. Electromagnetic counterparts of recoiling black holes: general relativistic simulations of non-Keplerian discs. *Astronomy and Astrophysics*, 523:A8, Nov 2010. doi: 10.1051/0004-6361/201014969. URL <https://ui.adsabs.harvard.edu/#abs/2010A&A...523A...8Z>. 79
- Joseba Makazaga Odria. *Sobre los errores locales y globales de la integración de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias mediante métodos de Runge-Kutta*

- Explícitos*. PhD thesis, Euskal Herriko Unibertsitatea, Konputazio Zientziak eta Adimen Artifiziala Saila/ Universidad del País Vasco, Departamento de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial, 2007. 40
- G. M. Oppenheimer, J. R.; Volkoff. on massive neutron cores. *Physical Review*, 55 (4):374,381, 1939. doi: doi:10.1103/PhysRev.55.374. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.55.374>. 26
- D. Page and S. Reddy. Dense Matter in Compact Stars: Theoretical Developments and Observational Constraints. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 56:327–374, Nov 2006. doi: 10.1146/annurev.nucl.56.080805.140600. URL <https://ui.adsabs.harvard.edu/#abs/2006ARNPS..56..327P>. 6
- V. S.; Sanidas S. A. Papatotiriou, P.J.; Geroyannis. Numerical methods for solving the relativistic oppenheimer-volkoff equations. *Int. J. Mod. Phys. C*, 11:1735,1746, 2007. doi: 10.1142/S0129183107011704. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2007IJMPC..18.1735P>. 2
- V. Paschalidis and N. Stergioulas. Rotating stars in relativity. *Living Reviews in Relativity*, 20:7, Nov 2017. doi: 10.1007/s41114-017-0008-x. URL <https://ui.adsabs.harvard.edu/#abs/2017LRR....20....7P>. 8
- G.X. Peng, H.C. Chiang, B.S. Zou, P.Z. Ning, and S.J. Luo. Thermodynamics, strange quark matter, and strange stars. *prc*, 62(2):025801, August 2000. doi: 10.1103/PhysRevC.62.025801. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2000PhRvC..62b5801P>. 60
- O.R. Pols. Stellar structure and evolution. <http://www.ucoick.org/woosley/ay112-14/texts/pols11.pdf>, 2011. 4
- A. Reisenegger. Magnetic fields of neutron stars. *arXiv e-prints*, page arXiv:1305.2542, May 2013. URL <https://ui.adsabs.harvard.edu/#abs/2013arXiv1305.2542R>. 2
- L. Rezzolla, E. R. Most, and L. R. Weih. Using Gravitational-wave Observations and Quasi-universal Relations to Constrain the Maximum Mass of Neutron

- Stars. *apjl*, 852:L25, enero 2018. doi: 10.3847/2041-8213/aaa401. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2018ApJ...852L..25R>. 57, 59, 68
- J.L. Friedman R.R. Caldwell. Evidence against a strange ground state for baryons. *Mod. Phys. Lett.*, B 264:143,148, 1991. doi: 10.1016/0370-2693(91)90718-6. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1991PhLB..264..143C>. 9
- M. Ruiz, S. L. Shapiro, and A. Tsokaros. GW170817, general relativistic magnetohydrodynamic simulations, and the neutron star maximum mass. *prd*, 97:021501, Jan 2018. doi: 10.1103/PhysRevD.97.021501. URL <https://ui.adsabs.harvard.edu/#abs/2018PhRvD..97b1501R>. 7
- P. Salas and M.A. Solís. Estrellas de neutrones. *Revista mexicana de física E*, 52: 37–46, 06 2006. ISSN 1870-3542. URL [http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1870-35422006000100006&nrm=iso](http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1870-35422006000100006&nrm=iso). 8, 9
- B. Schutz. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, EU, 2009. 20
- M. Shibata, S. Fujibayashi, K. Hotokezaka, K. Kiuchi, K. Kyutoku, Y. Sekiguchi, and M. Tanaka. Modeling GW170817 based on numerical relativity and its implications. *prd*, 96:123012, Dec 2017. doi: 10.1103/PhysRevD.96.123012. URL <https://ui.adsabs.harvard.edu/#abs/2017PhRvD..96l3012S>. 7
- M. Tanabashi, K. Hagiwara, K. Hikasa, K. Nakamura, Y. Sumino, F. Takahashi, J. Tanaka, K. Agashe, G. Aielli, C. AMSler, M. Antonelli, D. M. Asner, H. Baer, Sw. Banerjee, R. M. Barnett, T. Basaglia, C. W. Bauer, J. J. Beatty, V. I. Belousov, J. Beringer, S. Bethke, A. Bettini, H. Bichsel, O. Biebel, K. M. Black, E. Blucher, O. Buchmuller, V. Burkert, M. A. Bychkov, R. N. Cahn, M. Carena, A. Ceccucci, A. Cerri, D. Chakraborty, M.-C. Chen, R. S. Chivukula, G. Cowan, O. Dahl, G. D’Ambrosio, T. Damour, D. de Florian, A. de Gouvêa, T. DeGrand, P. de Jong, G. Dissertori, B. A. Dobrescu, M. D’Onofrio, M. Doser, M. Drees, H. K. Dreiner, D. A. Dwyer, P. Eerola, S. Eidelman, J. Ellis, J. Erler, V. V. Ezhela, W. Fetscher, B. D. Fields, R. Firestone, B. Foster, A. Freitas, H. Gallagher, L. Garren, H.-J. Gerber, G. Gerbier, T. Gershon, Y. Gershtein, T. Gherghetta, A. A. Godizov, M. Goodman, C. Grab, A. V. Gritsan,

- C. Grojean, D. E. Groom, M. Grünewald, A. Gurtu, T. Gutsche, H. E. Haber, C. Hanhart, S. Hashimoto, Y. Hayato, K. G. Hayes, A. Hebecker, S. Heinemeyer, B. Heltsley, J. J. Hernández-Rey, J. Hisano, A. Höcker, J. Holder, A. Holtkamp, T. Hyodo, K. D. Irwin, K. F. Johnson, M. Kado, M. Karliner, U. F. Katz, S. R. Klein, E. Klempt, R. V. Kowalewski, F. Krauss, M. Kreps, B. Krusche, Yu. V. Kuyanov, Y. Kwon, O. Lahav, J. Laiho, J. Lesgourgues, A. Liddle, Z. Ligeti, C.-J. Lin, C. Lippmann, T. M. Liss, L. Littenberg, K. S. Lugovsky, S. B. Lugovsky, A. Lusiani, Y. Makida, F. Maltoni, T. Mannel, A. V. Manohar, W. J. Marciano, A. D. Martin, A. Masoni, J. Matthews, U.-G. Meißner, D. Milstead, R. E. Mitchell, K. Mönig, P. Molaro, F. Moortgat, M. Moskovic, H. Murayama, M. Narain, P. Nason, S. Navas, M. Neubert, P. Nevski, Y. Nir, K. A. Olive, S. Pagan Griso, J. Parsons, C. Patrignani, J. A. Peacock, M. Pennington, S. T. Petcov, V. A. Petrov, E. Pianori, A. Piepke, A. Pomarol, A. Quadt, J. Rademacker, G. Raffelt, B. N. Ratcliff, P. Richardson, A. Ringwald, S. Roesler, S. Rolli, A. Romaniouk, L. J. Rosenberg, J. L. Rosner, G. Rybka, R. A. Ruytin, C. T. Sachrajda, Y. Sakai, G. P. Salam, S. Sarkar, F. Sauli, O. Schneider, K. Scholberg, A. J. Schwartz, D. Scott, V. Sharma, S. R. Sharpe, T. Shutt, M. Silari, T. Sjöstrand, P. Skands, T. Skwarnicki, J. G. Smith, G. F. Smoot, S. Spanier, H. Spieler, C. Spiering, A. Stahl, S. L. Stone, T. Sumiyoshi, M. J. Syphers, K. Terashi, J. Terning, U. Thoma, R. S. Thorne, L. Tiator, M. Titov, N. P. Tkachenko, N. A. Törnqvist, D. R. Tovey, G. Valencia, R. Van de Water, N. Varelas, G. Venanzoni, L. Verde, M. G. Vincter, P. Vogel, A. Vogt, S. P. Wakely, W. Walkowiak, C. W. Walter, D. Wands, D. R. Ward, M. O. Wascko, G. Weiglein, D. H. Weinberg, E. J. Weinberg, M. White, L. R. Wiencke, S. Willocq, C. G. Wohl, J. Womersley, C. L. Woody, R. L. Workman, W.-M. Yao, G. P. Zeller, O. V. Zenin, R.-Y. Zhu, S.-L. Zhu, F. Zimmermann, P. A. Zyla, J. Anderson, L. Fuller, V. S. Lugovsky, and P. Schaffner. Review of particle physics. *Phys. Rev. D*, 98:030001, Aug 2018. doi: 10.1103/PhysRevD.98.030001. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.98.030001>. 33
- Chakrabarty D. Thorsett, S.E. Neutron star mass measurements. i. radio pulsars. *The Astrophysical Journal*, 512:288–299, 1999. doi: 10.1086/306742. 7
- Woolsey S. Weaver T. Timmes, F. The neutron star and black hole initial mass

- function. *The Astrophysical Journal*, 457:834,843, 1996. doi: 10.1086/176778. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1996ApJ...457..834T>. 7
- R. C. Tolman. *Relativity Thermodynamics and Cosmology*. Oxford Press, EU, 1934. 26
- J.R. Torres and D.P. Menezes. Quark matter equation of state and stellar properties. *EPL (Europhysics Letters)*, 101:42003, February 2013. doi: 10.1209/0295-5075/101/42003. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2013EL...10142003T>. 60
- P. Purushothama Raj V. Ramasamy. *Strength of Materials*. Pearson India, 2012. 24
- H. Velten, A. M. Oliveira, and A. Wojnar. A free parametrized TOV: Modified Gravity from Newtonian to Relativistic Stars. *arXiv e-prints*, art. arXiv:1601.03000, Jan 2016. URL <https://ui.adsabs.harvard.edu/#abs/2016arXiv160103000V>. 26
- E. Weber and N. K. Glendenning. Exact versus approximate solution of einstein's equations for rotating neutron stars. *Mod. Phys. Lett.*, A5:2197, 1990. doi: 10.1016/0370-2693(91)90002-8. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1991PhLB..265....1W>. 9
- F. Weber. Strange quark matter and compact stars. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 54:193–288, 2005. doi: 10.1016/j.pnpnp.2004.07.001. URL <https://ui.adsabs.harvard.edu/#abs/2005PrPNP..54..193W>. 34
- E. Witten. Cosmic separation of phases. *Phys. Rev.*, D 30:272, 1984. doi: 10.1103/PhysRevD.30.272. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/1984PhRvD..30..272W>. 11, 61
- T. Yazdizadeh and G. H. Bordbar. The effect of a density-dependent bag constant on the structure of a hot neutron star with a quark core. *Astrophysics*, 56: 121,129, mar 2013. doi: 10.1007/s10511-013-9272-y. URL <http://adsabs.harvard.edu/abs/2013Ap.....56..121Y>. 32