



UNIVERSIDAD VERACRUZANA

---

---

FACULTAD DE FÍSICA

**Contraste numérico-observacional de  
modelos de estrellas de neutrones  
relativistas polítropas**

Trabajo recepcional en la modalidad de:

**TESIS**

como requisito parcial para obtener el título de:

**Licenciada en Física**

P R E S E N T A

**GRISELDA ARROYO CHÁVEZ**

ASESORES:

Dr. Alejandro Cruz Osorio  
Dr. Cuauhtémoc Campuzano Vargas

---

# *Agradecimientos*

*A mis asesores Alejandro Cruz Osorio y Cuauhtémoc Campuzano Vargas por su guía, consejos y paciencia en la realización de este trabajo.*

*A mi familia, por su apoyo y comprensión en los momentos buenos y malos, y porque sin ellos seguramente ya hubiera muerto de hambre.*

*A mis amigos y compañeros, por su compañía, las risas y palabras de aliento.*

*A mi físico favorito y compañero de desveladas, por hacer que la distancia no importe, por aguantar mis quejas y sacarme una sonrisa cuando las cosas no parecían salir bien.*

*A Dios, por la vida y por todos mis logros.*

## Resumen

En este trabajo se presentan las simulaciones numéricas realizadas con el código **CAFE** para estrellas de neutrones no rotantes, constituidas por una sola capa y que se encuentran en equilibrio hidrostático. Se describen mediante las ecuaciones de la TOV en el marco de la hidrodinámica relativista y con una ecuación de estado politrópica. Dichas simulaciones serán contrastadas con las observaciones tanto en la banda del espectro electromagnético como en ondas gravitacionales, con el fin de constreñir los parámetros de la ecuación de estado. Se estudian, además, casos de migración y colapso a agujeros negros.

# Índice general

<b>Índice general</b>	<b>III</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff relativistas</b>	<b>9</b>
2.1. Procesos politrópicos y ecuación de estado politrópica . . . . .	10
2.2. Algunos conceptos de la Relatividad General . . . . .	13
2.2.1. Definiciones importantes . . . . .	13
2.2.2. Descomposición 3+1 del espacio-tiempo . . . . .	16
2.3. Ecuaciones TOV para un fluido hidrostático e ideal . . . . .	18
2.4. Recuperación de variables primitivas . . . . .	24
2.5. Cálculo de la temperatura . . . . .	25
2.6. Estructura característica de las ecuaciones de Euler . . . . .	26
2.7. Ecuaciones para generar el dato inicial . . . . .	28
<b>3. Hidrodinámica relativista numérica</b>	<b>31</b>
3.1. Diferencias finitas . . . . .	31
3.2. Evolución temporal: Método Runge-Kutta y Método de líneas . . . . .	35
3.3. Métodos de alta resolución para captura de choques . . . . .	41
3.3.1. Volúmenes finitos . . . . .	43

## ÍNDICE GENERAL

---

3.3.2. Problema de Riemann . . . . .	45
3.3.3. Reconstrucción de variables en las interceldas . . . . .	45
3.3.4. Fórmula de flujos aproximada: HLLE . . . . .	49
3.4. CAFE: RMHD . . . . .	50
3.5. Pruebas del código . . . . .	54
<b>4. Simulaciones numéricas de estrellas de neutrones</b>	<b>61</b>
4.1. Estrellas de neutrones con ecuación de estado politrópica . . . . .	61
4.1.1. Migración . . . . .	62
4.1.2. Configuraciones de colapso . . . . .	63
4.1.3. Barrido de parámetros en la ecuación de estado politrópica . . . . .	66
<b>5. Análisis y Conclusiones</b>	<b>81</b>
<b>A. Detalles de las ecuaciones</b>	<b>87</b>
A.1. Ecuaciones de Einstein en simetría esférica . . . . .	87
A.2. Ecuaciones para el dato inicial . . . . .	89
<b>Referencias</b>	<b>93</b>

## Introducción

Las estrellas pasan casi toda su vida fusionando elementos cada vez más pesados en su interior, partiendo del hidrógeno y pasando por el helio, carbono, oxígeno, etc., siendo que las estrellas más grandes alcanzan a sintetizar hierro, liberando una gran cantidad de energía en el proceso. Dicha energía se equilibra con el colapso gravitacional que impone su misma masa. La energía liberada irá disminuyendo con la fusión de elementos más pesados, y es entonces cuando la gravedad toma el mando provocando que el núcleo sólido se contraiga mientras las capas exteriores rebotan y se expanden, transformando a la estrella en una gigante roja ( $1-10 M_{\odot}$ ). A partir de este momento será su masa la que determine el siguiente paso en su evolución. Si la estrella original tiene entre  $0.1$  y  $8 M_{\odot}$ , en el momento en que la estrella ya no tenga suficiente energía para seguir fusionando elementos, el núcleo se seguirá contrayendo hasta que sea frenado por la presión de degeneración que sufren los electrones cuando intentan violar el principio de exclusión de Pauli, dando origen a lo que se conoce como una enana blanca, la cual iniciará un proceso de enfriamiento por el resto de su vida hasta convertirse en una enana negra. Por su parte, las capas exteriores serán eyectadas formando una nebulosa. Este será el futuro que le depara al Sol.

Sin embargo, es de interés para este trabajo ver lo que ocurre con estrellas que poseen masas mayores a  $8M_{\odot}$  (ver Figura (1.1)). Si es el caso, el tiempo de fusión de elementos es más corto y la estrella puede rebasar la etapa de gigante roja al convertirse en una estrella súper gigante ( $10-50 M_{\odot}$ ). Pasará poco tiempo en este estado antes de que su núcleo colapse, pero a diferencia de las estrellas con menor masa, la presión de degeneración de los electrones no será suficiente para detener el colapso gravitacional, pues ha excedido el

# THE LIFE CYCLES OF STARS

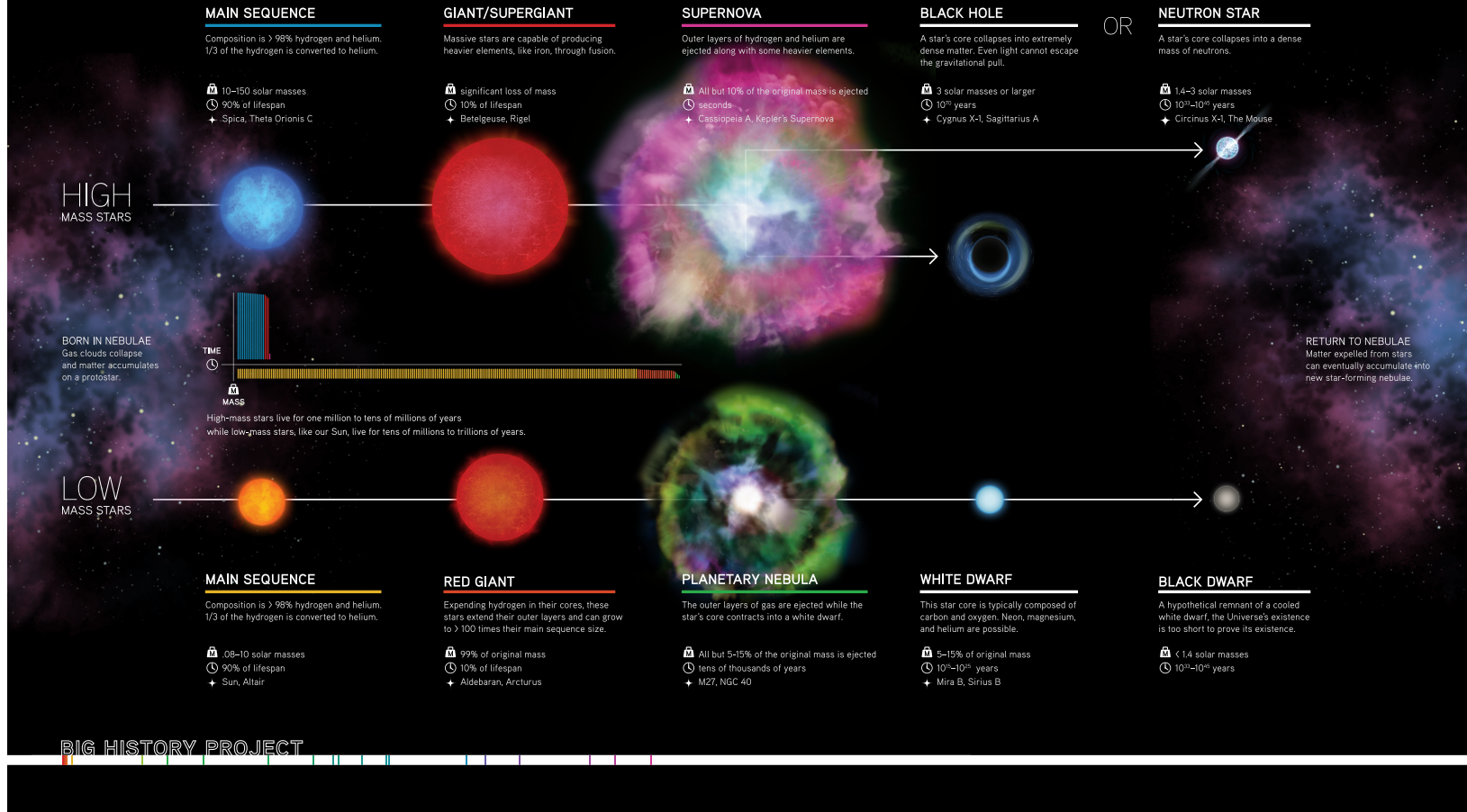


Figura 1.1: Evolución estelar. Representación artística del tiempo de vida de las estrellas.



---

límite de  $1.4M_{\odot}$ . Este límite se conoce como límite de Chandrasekhar [Chandrasekhar, 1931], y al excederse dará origen a una explosión de supernova, más concretamente una supernova Tipo II.

Si la estrella original no superaba las  $20M_{\odot}$  se convertirá en una estrella de neutrones, cuerpos extremadamente densos en cuyo interior pueden superar la densidad de un núcleo atómico ( $10^{14}g/cm^3$ ), con una masa típica aproximada de  $1.4M_{\odot}$  encerrada en una esfera con un radio aproximado de 10 km. Son estos objetos los que competen a este trabajo. Y es que se desconoce el comportamiento de la materia a tan grandes densidades y por ende también la ecuación de estado, EoS por sus siglas en inglés para *Equation of state*, aunado a que objetos tan compactos resultan un buen laboratorio para la relatividad general.

Indagando sobre su composición, de [Page and Reddy, 2006], se pueden identificar cinco regiones en una estrella de neutrones: el núcleo interno y el externo, la corteza, una envoltura y la atmósfera (ver Figura (1.3)). La envoltura y la atmósfera tienen una cantidad de materia despreciable, pero desempeñan papeles importantes. La primera tiene influencia en el transporte y liberación de energía térmica de la superficie; y la segunda juega un rol importante en el espectro de emisión de la estrella. Por su parte la corteza, que se extiende aproximadamente de 1 a 2 km por debajo de la superficie, está formada por núcleos de diferentes elementos, los cuales varían con la densidad a medida que nos adentramos en la estrella, iniciando con el  $^{56}Fe$  a densidades de  $10^6g/cm^3$  y siguiendo con núcleos cada vez más ricos en neutrones hasta llegar a una densidad de un tercio de la densidad de saturación de la materia nuclear. A mayor profundidad, con una densidad por arriba de  $4 \times 10^{11}g/cm^3$  se observa el fenómeno de *goteo de neutrones*, en cuyo punto el potencial químico de los neutrones es cero y se escapan de los núcleos formando un fluido de neutrones sobre el que *nada* el resto de la materia. Cuando la densidad es del 10% de la densidad de saturación de la materia nuclear, comienza un continuo cambio en la estructura de la materia conocido como *Nuclear pasta* o pasta nuclear que se puede observar en la parte superior de la Figura (1.3), pues pasa de una forma 3-D de bolas de carne, a 2-D de espagueti, 1-D de lasagna, 2-D de ziti y 3-D de raviolos. A cierta temperatura ( $< 0,1MeV$ ) el fluido de neutrones forma un superfluido de  $^1S_0$ , lo cual es importante pues altera el calor específico y la emisividad de neutrinos de la corteza, además de almacenar momento angular que después se libera en el fenómeno llamado *glitch* donde aumenta repentinamente la frecuencia de giro para después relajarse a su frecuencia normal.

three generations of matter (fermions)					
	I	II	III		
mass→	2.4 MeV/c <sup>2</sup>	1.27 GeV/c <sup>2</sup>	171.2 GeV/c <sup>2</sup>	0	≈126 GeV/c <sup>2</sup>
charge→	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0
spin→	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
name→	<b>u</b> up	<b>c</b> charm	<b>t</b> top	<b>γ</b> photon	<b>H</b> Higgs boson
<b>QUARKS</b>	4.8 MeV/c <sup>2</sup> $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ <b>d</b> down	104 MeV/c <sup>2</sup> $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ <b>s</b> strange	4.2 GeV/c <sup>2</sup> $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ <b>b</b> bottom	0 0 1 <b>g</b> gluon	
	<2.2 eV/c <sup>2</sup> 0 $\frac{1}{2}$ <b>ν<sub>e</sub></b> electron neutrino	<0.17 MeV/c <sup>2</sup> 0 $\frac{1}{2}$ <b>ν<sub>μ</sub></b> muon neutrino	<15.5 MeV/c <sup>2</sup> 0 $\frac{1}{2}$ <b>ν<sub>τ</sub></b> tau neutrino	91.2 GeV/c <sup>2</sup> 0 1 <b>Z</b> Z boson	<b>GAUGE BOSONS</b>
<b>LEPTONS</b>	0.511 MeV/c <sup>2</sup> -1 $\frac{1}{2}$ <b>e</b> electron	105.7 MeV/c <sup>2</sup> -1 $\frac{1}{2}$ <b>μ</b> muon	1.777 GeV/c <sup>2</sup> -1 $\frac{1}{2}$ <b>τ</b> tau	80.4 GeV/c <sup>2</sup> ±1 1 <b>W</b> W boson	

Figura 1.2: Modelo estándar de partículas.

Entrando al núcleo exterior, en una primera capa se tiene una sopa de nucleones, electrones y muones (ver Figura (1.2)), mientras que los neutrones forman un superfluido de  ${}^3P_2$  y los protones un superconductor  ${}^1S_0$ . En el núcleo interior, pese a que no se sabe del todo lo que se encuentra en esa región, se supone que coexisten partículas exóticas como hiperones o condensados de Bose de piones o kaones. También se cree posible que exista una transición de fase a una materia mixta compuesta de hadrones y quarks desconfiados.

Ahora bien, cabe mencionar que éste es uno de los modelos más aceptados hasta el momento, pero el número de capas que conforman a una estrella de neutrones sigue siendo tema de discusión, habiendo trabajos que modelan a la estrella con hasta siete capas [Simay, 2017].

Otras características importantes de estos objetos es que al conservarse el momento angular durante el colapso, pueden llegar a girar extremadamente rápido, varios cientos de veces por segundo. Poseen además un fuerte campo magnético del orden de  $10^{12}$  gauss siendo que el de la tierra tiene apenas 0.5 gauss. Este campo magnético es el responsable de generar a su vez un fuerte campo eléctrico que acelera a los electrones sobre la superficie y los dispara por los polos en forma de destellos convirtiéndose en pulsares, y siendo ésta

la manera en la que se descubrieron en 1967 ([[Hewish et al., 1968](#)]) por Jocelyn Bell y Antony Hewish. Si el eje de giro no está alineado con los polos magnéticos entonces los destellos formarán un cono de emisión y sólo serán detectados si uno se encuentra en el área de barrido del cono. He aquí donde radica la dificultad de su observación, y pese a ésto se tiene registro de al menos 1500 pulsares [[Salas and Solís, 2006](#)].

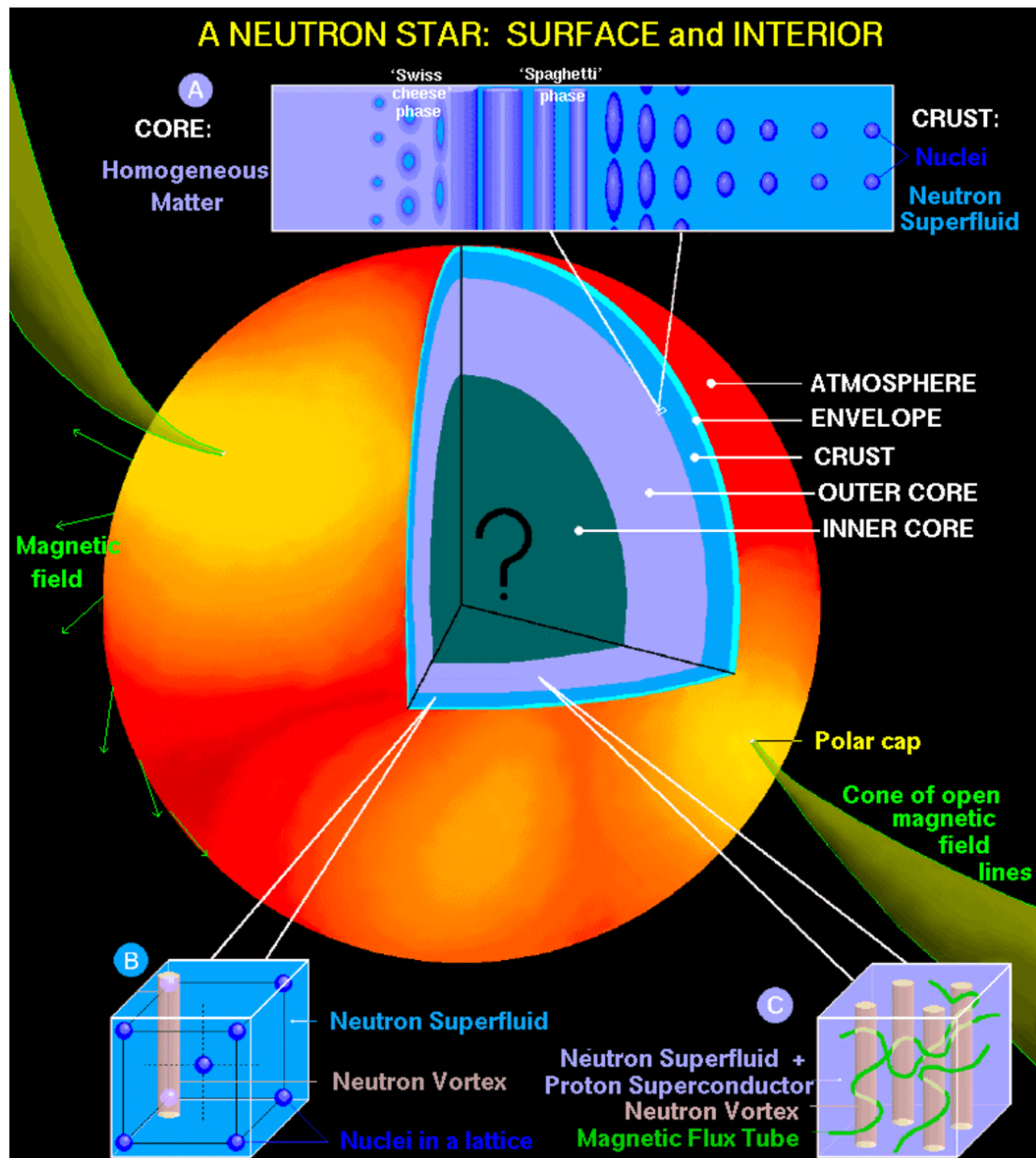


Figura 1.3: Composición de una estrella de neutrones. [[Page and Reddy, 2006](#)]

---

Para finalizar con las características destacables de una estrella de neutrones resta hablar sobre el proceso de enfriamiento que sufren desde el momento en que nacen. El enfriamiento de la estrella se lleva a cabo principalmente mediante el proceso *Urca*, que consta de dos tipos de decaimiento: el decaimiento beta (1.1) y decaimiento beta inverso (1.2)

$$n \rightarrow p + e^{-} + \bar{\nu}_e, \quad (1.1)$$

$$p \rightarrow n + e^{+} + \nu_e, \quad (1.2)$$

donde predomina la emisión de neutrinos y antineutrinos, provocando que la estrella pase de una temperatura del orden de  $10^{11}K$  a una de  $10^9K$  en minutos. Otra forma de generar neutrinos es mediante la captura de electrones por los protones principalmente en el colapso del núcleo durante la supernova.

Debido a las condiciones extremas de la materia en una estrella de neutrones, y todos los efectos exóticos presentes, se ha optado recientemente por las simulaciones numéricas, implementando métodos numéricos sofisticados que toman en cuenta todas estas condiciones, y siendo esta vía la utilizada en este trabajo para estudiar a estos objetos. En particular, el código que se ha utilizado en este trabajo lleva por nombre *CAFE*, programado en el lenguaje Fortran 90 y del que se hablará a detalle más adelante.

Como objetivo general se plantea simular numéricamente a una estrella de neutrones no rotante mediante la implementación de las ecuaciones de la TOV en el código *CAFE* para una estrella constituida por una sola capa, describiéndola en el marco de la hidrodinámica relativista con una ecuación de estado politrópica y obtener así características como la masa, radio y temperatura que puedan ser comparadas con las observaciones.

Se compararán principalmente las masas obtenidas de las estrellas de neutrones con las observadas, y que recurrentemente son encontradas en sistemas binarios con una compañera que bien puede ser otra estrella de neutrones o no. Para ello se cuenta con la Figura (1.4), tomada de [Lattimer, 2012] y que se actualiza constantemente desde la liga <https://stellarcollapse.org/nsmasses>. Los objetos encerrados serán tomados en cuenta en el capítulo 5 para comparar el modelo con las observaciones. Otra referencia importante será la reciente detección tanto en ondas gravitacionales como en el espectro electromagnético de la detección de una colisión entre estrellas de neutrones acontecida el 17 de Agosto de 2017 y reportada en [Abbott et al., 2017], donde también se da un rango para

---

las masas de las estrellas y que va de 1.17 a 1.60  $M_{\odot}$ . Pese a esta detección, la masa sigue sin estar completamente determinada, es decir, se encuentra dentro de cierto rango. Ésto da cabida al estudio de las ecuaciones de estado que nos arrojen masas dentro de ese rango, y con ello constreñir los parámetros de entrada de dichas ecuaciones, que será el objetivo principal de este trabajo para el caso de una ecuación de estado politrópica.

Como objetivos particulares se tiene:

- Encontrar configuraciones de estrellas estables y de estrellas que colapsan a un agujero negro
- Estudiar los casos de migración de una configuración inestable a una estable
- Realizar un barrido de parámetros para la ecuación de estado politrópica comparando masas, radios y temperaturas con las observaciones

En cuanto al contenido de esta tesis, en el Capítulo 2 se detallarán las ecuaciones de la hidrodinámica relativista seguido de las herramientas numéricas, la descripción y pruebas del código CAFE en el Capítulo 3. En el Capítulo 4 se desarrollarán los objetivos particulares y su análisis, para finalizar con las conclusiones en el Capítulo 5.

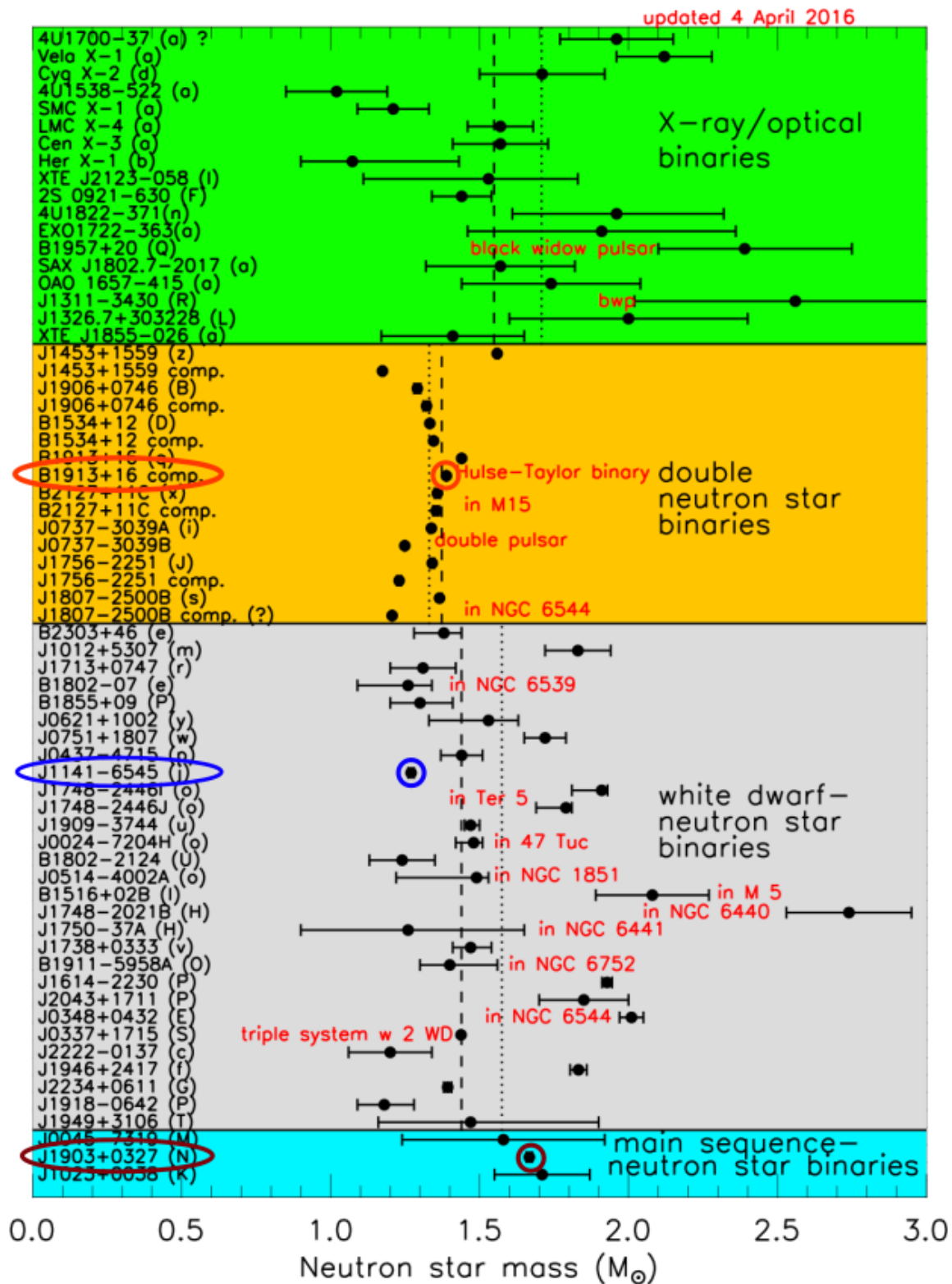


Figura 1.4: Masas de estrellas de neutrones observadas en sistemas binarios. Los tres objetos encerrados serán tomados más adelante para compararlos con las simulaciones numéricas. Figura tomada de [Lattimer, 2012] y actualizada desde <https://stellarcollapse.org/nsmasses>.

## Ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff relativistas

En este capítulo se abordará lo referente a los cálculos analíticos necesarios para, posteriormente, ser resueltos de manera numérica mediante el código `CAFE`, del que se hablará con más detalles en el Capítulo 3.

El punto de partida serán las ecuaciones de Tolman-Oppenheimer-Volkoff relativistas (TOV). Las ecuaciones TOV son una solución a las ecuaciones de Einstein considerando una métrica estática, isótropa y esféricamente simétrica, para un fluido perfecto con una ecuación de estado politrópica y en equilibrio hidrostático. Estas consideraciones suponen una buena aproximación para modelar el interior de estrellas compactas como las estrellas de neutrones.

Partiremos de hablar de los procesos politrópicos y la ecuación que los describe. Posteriormente, en la sección 2.2 se introducirán conceptos de relatividad general que en concreto ayudarán a calcular las ecuaciones de Einstein en simetría esférica para una dimensión y con las características de la métrica mencionadas arriba. La evolución del fluido está regida por las Ecuaciones de Euler relativistas (sección 2.3) obtenidas mediante el formalismo  $3 + 1$ . Dichas ecuaciones serán después escritas en forma conservativa para tomar ventaja de su estructura característica

Finalmente, en la sección 2.7 se obtendrán las ecuaciones para generar la configuración inicial de la estrella, y para la cual es necesaria una métrica que únicamente dependa de la coordenada espacial.

## 2.1. Procesos politrópicos y ecuación de estado politrópica

Se define como proceso politrópico como aquél para el cual

$$\delta Q = C dT, \quad (2.1)$$

donde  $C$  es una constante en el intervalo  $(-\infty, \infty)$ ,  $Q$  es el calor y  $T$  la temperatura. Veremos que el valor de esta constante estará relacionada con el tipo de proceso. Por ejemplo, el caso  $C = 0$  corresponde al proceso adiabático, y  $C = \infty$  al proceso isotérmico.

Lo siguiente a determinar será la ecuación de procesos politrópicos para un sistema simple (descrito por tres variables únicamente) arbitrario, para después tomar el caso del gas ideal.

Siguiendo a [Carmona, 2007], partimos de la primera ley de la termodinámica

$$dU = \delta Q - \delta W, \quad (2.2)$$

donde  $U$  es la energía interna,  $Q$  el calor intercambiado con los alrededores, y  $W$  el trabajo que realiza el sistema. Para un sistema simple, se supone una fuerza generalizada  $A$  que realiza trabajo y un desplazamiento generalizado  $da$ , así

$$\delta W = A(T, a) da. \quad (2.3)$$

Por otro lado, podemos obtener la diferencial de la energía con la dependencia escrita en la ecuación anterior

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_a dT + \left( \frac{\partial U}{\partial a} \right)_T da. \quad (2.4)$$

Sustituyendo en la primera ley y agrupando términos obtenemos

$$\delta Q = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_a dT + \left[ A(T, a) da + \left( \frac{\partial U}{\partial a} \right)_T da \right]. \quad (2.5)$$

Definimos ahora la capacidad térmica como

$$C \equiv \frac{\delta Q}{dT}, \quad (2.6)$$



de esta manera, al dividir por  $dT$  en la expresi3n (2.5) se puede introducir a la capacidad t3rmica

$$C = \frac{\delta Q}{dT} = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_a + \left[ A(T, a) da + \left( \frac{\partial U}{\partial a} \right)_T \right] \frac{da}{dT}. \quad (2.7)$$

Ahora bien, se pueden identificar dos capacidades t3rmicas, una cuando  $a$  se mantiene constante, y otra cuando  $A$  es la que se mantiene constante. Para el primer caso  $da = 0$  y de la expresi3n (2.7) se obtiene

$$C_a = \frac{\delta Q_a}{dT} = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_a, \quad (2.8)$$

es decir

$$C = \frac{\delta Q}{dT} = C_a + \left[ A(T, a) + \left( \frac{\partial U}{\partial a} \right)_T \right] \frac{da}{dT}. \quad (2.9)$$

Para identificar el otro coeficiente se realiza el proceso de transferencia de energ3a a fuerza generalizada  $A$  constante, as3

$$C_A = \frac{\delta Q_A}{dT} = C_a + \left[ A(T, a) + \left( \frac{\partial U}{\partial a} \right)_T \right] \left( \frac{\partial a}{\partial T} \right)_A. \quad (2.10)$$

Podemos obtener de la 3ltima ecuaci3n una expresi3n para la diferencia de las capacidades t3rmicas

$$C_A - C_a = \left[ A(T, a) + \left( \frac{\partial U}{\partial a} \right)_T \right] \left( \frac{\partial a}{\partial T} \right)_A. \quad (2.11)$$

Aplicando la definici3n de proceso politr3pico (2.1) a la expresi3n (2.9) llegamos a

$$\delta Q = C dT = C_a dT + \left[ A(T, a) + \left( \frac{\partial U}{\partial a} \right)_T \right] da, \quad (2.12)$$

y con ayuda de (2.11)

$$(C - C_a) dT = (C_A - C_a) \left( \frac{\partial T}{\partial a} \right)_A da \quad (2.13)$$

o

$$dT + \frac{C_A - C_a}{C_a - C} \left( \frac{\partial T}{\partial a} \right)_A da = 0. \quad (2.14)$$

## 2.1 Procesos politr6picos y ecuaci3n de estado politr6pica

---

Suponiendo que  $T = T(A, a)$ , su diferencial es

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial A}\right)_a dA + \left(\frac{\partial T}{\partial a}\right)_A da. \quad (2.15)$$

Sustituyendo en (2.14)

$$\left(\frac{\partial T}{\partial A}\right)_a dA + \frac{C_A - C}{C_a - C} \left(\frac{\partial T}{\partial a}\right)_A da = 0. \quad (2.16)$$

Ahora bien, en este momento nos enfocaremos en el gas ideal, y para ello identificamos a  $(A, a) = (p, V)$ . Entonces la expresi3n (2.16) toma la forma

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V dp + \frac{C_p - C}{C_V - C} \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p dV = 0. \quad (2.17)$$

Definiendo

$$n = \frac{C_p - C}{C_V - C} \quad (2.18)$$

como el 6ndice politr6pico, y calculando las derivadas parciales conociendo de antemano la ecuaci3n de estado t6rmica del gas ideal  $pV = nRT$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = \frac{V}{nR}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p = \frac{p}{nR},$$

podemos reescribir a la expresi3n (2.17) como sigue

$$\frac{dp}{p} = -n \frac{dV}{V}. \quad (2.19)$$

Finalmente, si integramos la 6ltima expresi3n obtenemos

$$pV^n = cte. \quad (2.20)$$

A manera de ejemplo, algunos valores que puede tomar  $n$  son

$$n = \begin{cases} \gamma = C_p/C_V, & \text{proceso adiabático} \\ 0, & \text{proceso isobárico} \\ \infty, & \text{proceso isocórico.} \end{cases} \quad (2.21)$$

La última expresión es la ecuación de procesos politrópicos, pero lo que compete a este trabajo es realmente la expresión para la ecuación de estado como tal. La ecuación de estado politrópica<sup>1</sup> implementada tiene la siguiente forma

$$p = K\rho_0^{1+\frac{1}{n_p}}, \quad (2.22)$$

donde  $p$  es la presión,  $\rho$  la densidad de masa y  $K$  es una constante llamada constante politrópica. Introduciendo  $\Gamma = 1 + 1/n_p$  conocida como el índice adiabático o índice politrópico

Ecuación de estado politrópica

$$p = K\rho_0^\Gamma. \quad (2.23)$$

Existen, sin embargo, muchas más ecuaciones de estado que logran modelar a una estrella de neutrones de manera más realista y que pueden ser consultadas en la referencia [Lattimer and Prakash, 2001]. Su implementación bien podría fungir como trabajo a futuro.

## 2.2. Algunos conceptos de la Relatividad General

### 2.2.1. Definiciones importantes

En la descripción de la estrella de neutrones será fundamental resolver las ecuaciones de Einstein, tomando a [Schutz, 2009] y [Campuzano, 2014]. estas están dadas por

Ecuaciones de Einstein

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.24)$$

<sup>1</sup>Utilizada en la construcción de la estrella al tiempo cero.

## 2.2 Algunos conceptos de la Relatividad General

---

donde  $G_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein que describe la geometría del espacio-tiempo, mientras que  $T_{\mu\nu}$  es el tensor de energía momento que da cuenta de la materia presente en él. La ecuación (2.24) está en unidades geométricas donde  $G = c = 1$ . Para calcularlas se introducirán las herramientas necesarias en este apartado.

El espacio-tiempo será descrito por una *variedad*, un ente matemático cuya característica más importante es que de manera local se comportará como un espacio euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . Debido a la presencia de cuerpos muy masivos o densos tales como estrellas de neutrones que sin duda curvarán al espacio-tiempo, necesitaremos generalizar el concepto de derivada para espacios curvos. Es decir, se abre la posibilidad de que ahora la base coordenada no se mantengan constante. Entonces, para un vector  $\vec{A}$  en una base coordenada  $\{\vec{e}_a\}$  se tiene que

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^b} = \frac{\partial}{\partial x^b}(A^a \vec{e}_a) = \frac{\partial A^a}{\partial x^b} \vec{e}_a + A^a \frac{\partial \vec{e}_a}{\partial x^b} \quad (2.25)$$

donde en el caso de coordenadas cartesianas (espacio no curvo) el último término se anularía. Por otro lado, la derivada parcial en el último término es por sí sola un vector, es decir, se puede escribir como combinación lineal de los vectores base. Los coeficientes que acompañarán a los vectores base estarán representados por los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{ab}^c$  de manera que

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x^b} = \frac{\partial A^a}{\partial x^b} \vec{e}_a + A^a \Gamma_{ab}^c \vec{e}_c, \quad (2.26)$$

con

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\epsilon} (g_{\beta\epsilon,\gamma} + g_{\gamma\epsilon,\beta} - g_{\beta\gamma,\epsilon}), \quad (2.27)$$

Donde la coma hace referencia a una derivada parcial. A la ecuación (2.26) se le da el nombre de derivada covariante y se representa como  $\nabla_b \vec{A}$ . Para un escalar la derivada covariante se reduce únicamente a una derivada parcial. En el caso de la contracción de dos índices en la derivada covariante se tiene entonces una divergencia, la cual se puede escribir para un tensor de rango 2 (que convenientemente se ocupará después) como sigue

$$\nabla_\mu A^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} A^{\mu\nu}) + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu A^{\mu\lambda}. \quad (2.28)$$

Una cantidad importante que nos da información de la curvatura de nuestro espacio-tiempo será el tensor de Riemann, el cual es un tensor tipo  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  que en términos de los

símbolos de Christoffel se escribe como

$$R_{\mu\eta\nu}^{\sigma} = \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}}{\partial x^{\eta}} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\eta}^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\epsilon}\Gamma_{\epsilon\eta}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\eta}^{\epsilon}\Gamma_{\epsilon\nu}^{\sigma}, \quad (2.29)$$

donde los índices corren sobre todas las coordenadas. A grandes rasgos, este tensor da cuenta de cuánto cambia la dirección de un vector al ser transportado paralelamente (manteniéndose constante bajo una trayectoria) de un punto a otro siguiendo dos caminos y después intercambiando el orden de los mismos, es decir

$$\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}V_c - \nabla_{\nu}\nabla_{\mu}V_c = R_{\mu\nu c}^d V_d. \quad (2.30)$$

En un espacio plano el vector no cambiará su dirección sin importar la trayectoria, y entonces el tensor de Riemann será cero.

Contrayendo el primer y tercer índices del tensor de Riemann obtenemos el tensor de Ricci, el cual es simétrico en sus índices y se escribe como

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\sigma\nu}^{\sigma} = \partial_{\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - \partial_{\nu}\Gamma_{\sigma\mu}^{\sigma} + \Gamma_{\sigma\epsilon}^{\sigma}\Gamma_{\mu\nu}^{\epsilon} + \Gamma_{\nu\epsilon}^{\sigma}\Gamma_{\sigma\mu}^{\epsilon}. \quad (2.31)$$

Contrayendo ahora los índices del tensor de Ricci con la métrica obtenemos el escalar de Ricci

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \quad (2.32)$$

Finalmente, el tensor de Einstein, en términos de los tensores previos se escribe como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (2.33)$$

el cual es simétrico pues se define en término de tensores que lo son. Si se introduce cada una de las definiciones en la expresión anterior podríamos escribir al tensor de Einstein en términos de los símbolos de Christoffel como sigue

$$G_{\mu\nu} = \left( \delta_{\mu}^{\gamma}\delta_{\nu}^{\zeta} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\gamma\zeta} \right) \left( \Gamma_{\gamma\zeta,\epsilon}^{\epsilon} - \Gamma_{\gamma\epsilon,\zeta}^{\epsilon} - \Gamma_{\epsilon\sigma}^{\epsilon}\Gamma_{\gamma\zeta}^{\sigma} - \Gamma_{\zeta\sigma}^{\epsilon}\Gamma_{\epsilon\gamma}^{\sigma} \right), \quad (2.34)$$

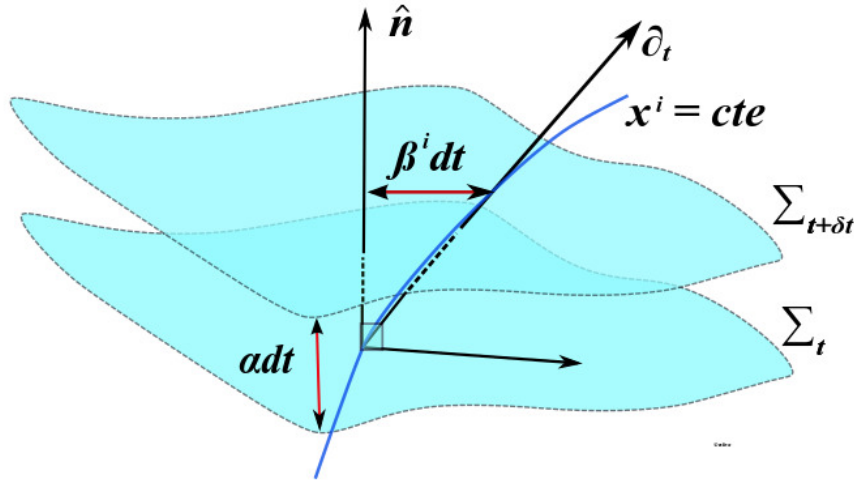


Figura 2.1: Foliación del espacio tiempo en 3+1

### 2.2.2. Descomposición 3+1 del espacio-tiempo

Hasta ahora se ha hablado de las herramientas analíticas para el cálculo de las ecuaciones de Einstein, sin embargo, no hay que perder de vista que lo que se busca es resolverlas numéricamente dada su complejidad para las condiciones que se plantearán más adelante. Siguiendo esa línea, se tomará ventaja de la formulación 3+1 o descomposición *ADM* (*Arnowitt, Deser and Misner*). En este formalismo separaremos nuestro espacio-tiempo de 4 dimensiones en superficies espaciales o tipo espacio 3-dimensionales, las cuales evolucionan a lo largo de la coordenada temporal en lo que se conoce como *foliación*. En la Figura (2.1) se presenta un esquema de la foliación de las hipersuperficies, una para cada paso de tiempo  $\Sigma_t$ .

Las otras cantidades que aparecen en la figura son las componentes en las que queda descrito el espacio-tiempo. Éstas son:

- La métrica puramente espacial que mide distancias sobre las hipersuperficies y donde  $i, j = 1, 2, 3$ ,

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.35)$$

- La función  $\alpha$  llamada *lapso*, que es el tiempo propio de separación entre las hipersuperficies que mediría un observador moviéndose en dirección normal a las mismas,

es decir, un observador euleriano, tal que

$$d\tau = \alpha dt. \quad (2.36)$$

- El vector de corrimiento  $\beta^i$  o *shift*, que representa la velocidad relativa entre un observador euleriano y las líneas con coordenadas espaciales que permanecen constantes

$$x_{t+dt}^i = x_t^i - \beta^i dt. \quad (2.37)$$

A las funciones  $\alpha$  y  $\beta^i$  se les conoce como “funciones de norma” y pueden ser escogidas con cierta libertad. Además, dichas cantidades nos permitirán escribir la métrica 4-dimensional en este formalismo como sigue

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta_j \beta^j) dt^2 + 2\beta_i dt dx^i + \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.38)$$

que de forma matricial, tanto para la métrica como para su inversa, será

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_j \beta^j & \beta_i \\ \beta_i & \gamma_{ij} \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -1/\alpha^2 & \beta^i/\alpha^2 \\ \beta^i/\alpha^2 & \gamma^{ij} - \beta^i \beta^j/\alpha^2 \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

$$(2.41)$$

Finalmente si  $\vec{n}$  es un vector unitario tipo tiempo perpendicular a la hipersuperficie tal que  $n^\mu n_\mu = -1$ , sus componentes serán

$$n_\mu = (\alpha, 0, 0, 0), \quad (2.42)$$

$$n^\mu = \frac{1}{\alpha}(1, -\beta^i), \quad (2.43)$$

y entonces se cumplirá por definición que  $\partial_t = \alpha \vec{n} + \beta^i \partial_i$  con  $\partial_i$  los vectores coordenados tangentes a la hipersuperficie  $\Sigma_t$ .

Para un desarrollo más completo de las ecuaciones de esta sección se puede ver [Baun-  
garte and Shapiro, 2010], [Alcubierre, 2008] o [Gourgoulhon, 2012].

## 2.3. Ecuaciones TOV para un fluido hidrostático e ideal

Las ecuaciones que describen a un cuerpo isótropo en equilibrio hidrostático con simetría esférica y en el marco de la relatividad general son las llamadas ecuaciones *TOV* o de *Tolman, Oppenheimer, Volkoff* desarrolladas en [Tolman, 1939] y [Oppenheimer and Volkoff, 1939]. Éstas son derivadas de resolver las ecuaciones de Einstein para un espacio-tiempo con un elemento de línea tanto en coordenadas esféricas como esféricamente simétrica escrito como sigue

Métrica en coordenadas esféricas

$$ds^2 = -\alpha^2(t, r)dt^2 + a^2(t, r)dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\text{sen}^2\theta d\phi^2, \quad (2.44)$$

con  $t$  la coordenada temporal y  $r, \theta, \phi$  las coordenadas esféricas usuales. Por otro lado, se modela a la estrella como un fluido perfecto lo que implica que no entran en juego ni la viscosidad ni procesos de transferencia de calor. El tensor de energía-momento de un fluido perfecto se escribe de la forma

Tensor de energía-momento de un fluido perfecto

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 h u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}, \quad (2.45)$$

donde  $\rho_0$  es la densidad de masa en reposo del fluido,  $p$  es la presión,  $u^\mu$  es la cuadrivelocidad del fluido y  $h$  la entalpía específica

$$h = 1 + \epsilon + p/\rho_0, \quad (2.46)$$

con  $\epsilon$  la energía específica interna. La presión, la densidad de masa en reposo y la energía interna específica quedan relacionadas por la ecuación de estado, que para este trabajo será la ecuación de estado de un gas ideal<sup>1</sup> dada por

Ecuación de estado de gas ideal

$$p = (\Gamma - 1)\rho_0\epsilon. \quad (2.47)$$

<sup>1</sup>Utilizada tanto la evolución temporal de la ecuaciones como en el dato inicial.



Las componentes de la cuadrivelocidad serán

$$u^\mu = (W/\alpha, Wv^r, 0, 0) = (u^t, \alpha v^r u^t, 0, 0), \quad (2.48)$$

donde la manera en la que se relacionan la velocidad espacial con las componentes espaciales de la cuadrivelocidad está dada por la relación  $v^r = u^r \sqrt{1 - g_{rr} v^r v^r} = u^r \sqrt{1 - a^2 v^r v^r} = u^r / W$ , con  $W$  el Factor de Lorentz definido como  $W = \alpha u^t$ .

De esta manera, el tensor de energía-momento para el fluido perfecto en (2.45) se escribirá de manera contravariante como sigue

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha^2}(\rho_0 h W^2 - p) & \frac{1}{\alpha} \rho_0 h W^2 v^r & 0 & 0 \\ \frac{1}{\alpha} \rho_0 h W^2 v^r & \rho_0 h W^2 v^r v^r + \frac{p}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{p}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

O de forma covariante

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \alpha^2(\rho_0 h W^2 - p) & -a^2 \alpha \rho_0 h W^2 v^r & 0 & 0 \\ -a^2 \alpha \rho_0 h W^2 v^r & a^4 \rho_0 h W^2 v^r v^r + a^2 p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta p \end{pmatrix}, \quad (2.50)$$

Igualando componente a componente en (2.24) sin considerar las componentes en  $\theta$  y  $\phi$  obtenemos las siguientes ecuaciones (se puede consultar el Apéndice A.1 para más detalles):

- Para  $G_{tt} = 8\pi T_{tt}$

$$\frac{\alpha^2}{r^2 a^3} (2r \partial_r a + a^3 - a) = 8\pi \alpha^2 (\rho_0 h W^2 - p),$$

al desarrollar

$$\partial_r a = a^3 \left[ 4\pi r (\tau + D) + \frac{m}{r^2} \right]. \quad (2.51)$$

### 2.3 Ecuaciones TOV para un fluido hidrostático e ideal

- En  $G_{tr} = 8\pi T_{tr}$

$$\partial_t a = -4\pi r a \alpha S_r. \quad (2.52)$$

- Finalmente, para  $G_{rr} = 8\pi T_{rr}$

$$-\frac{-2r\partial_t\alpha + a^2\alpha - \alpha}{\alpha r^2} = 8\pi \left( \rho_0 h W^2 v^r v^r + \frac{p}{a^2} \right),$$

o

$$\frac{\partial_t\alpha}{\alpha} = a^2 \left[ 4\pi r (S_r v^r + p) + \frac{2m}{r^2} \right]. \quad (2.53)$$

De esta manera, las ecuaciones de Einstein para la métrica (2.44) y el tensor de energía-momento (2.50) quedan resumidas en el siguiente recuadro

#### Ecuaciones de Einstein

$$\begin{aligned} \partial_r a &= a^3 \left[ 4\pi r (\tau + D) + \frac{m}{r^2} \right] \\ \partial_t a &= -4\pi r a \alpha S_r \\ \frac{\partial_t \alpha}{\alpha} &= a^2 \left[ 4\pi r (S_r v^r + p) + \frac{2m}{r^2} \right], \end{aligned} \quad (2.54)$$

donde se han definido nuevas cantidades proyectadas en la base de un observador euleriano mediante el formalismo 3+1 y que son llamadas variables conservativas, éstas son

$$\begin{aligned} D &= -J^\nu n_\nu = \rho_0 W \\ S_r &= T^{\mu\nu} n_\mu a_{(r)\nu} = \rho_0 h W^2 v_r \\ E &= T^{\mu\nu} n_\mu n_\nu = \rho_0 h W^2 - p \\ \tau &= E - D = \rho_0 h W^2 - p - \rho_0 W, \end{aligned} \quad (2.55)$$

con  $D$  la densidad de masa relativista,  $S_r$  la densidad de momento en la dirección  $r$ ,  $E$  la densidad de energía total y  $\tau$  la diferencia entre la densidad de energía total y la densidad de energía relativista. Además  $a$ , la componente  $g_{rr}$  de la métrica, tendrá la forma de la componente  $g_{rr}$  de la métrica de Schwarzschild puesto que dentro de la solución a la ecuaciones TOV se asume que fuera de la estrella se tiene un espacio-tiempo

de Schwarzschild, es decir

$$a^2 = \frac{1}{1 - \frac{2m(r)}{r}} \quad (2.56)$$

donde  $m(r)$  es la masa contenida en una 2-esfera de radio  $r$ .

Algo que se debe notar en (2.3), es que uno puede construir  $a$  a partir tanto de la primera como de la segunda ecuación, es decir, se debe escoger cuál de ellas se ocupará para encontrar  $a$ . En nuestro caso, se ha decidido evolucionar  $a$  en el tiempo con la segunda ecuación. Sin embargo, la primera ecuación será considerada una restricción, que llamaremos constricción Hamiltoniana, y que deberá satisfacerse a cada paso de tiempo tal que

$$\mathcal{H} = \partial_r a - a^3 \left[ 4\pi r (\tau + D) + \frac{m}{r^2} \right] = 0. \quad (2.57)$$

Ésto servirá como una prueba para el código, y más adelante en la sección 3.5 se presentarán las gráficas que reflejan el comportamiento de ésta cantidad.

Por otro lado, las ecuaciones que rigen a los fluidos están dadas por las ecuaciones de Euler, es decir, por la ley de la conservación de la masa local y la conservación del tensor de energía-momento. Éstas son

#### Ecuaciones de Euler

$$\nabla_\mu (\rho_0 u^\mu) = 0 \quad (2.58)$$

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.59)$$

Dados el elemento de línea (2.44) y el tensor de energía-momento (2.49) realizamos los cálculos para ambas ecuaciones siendo  $\nabla_\mu$  la derivada covariante acorde con (2.44).

Para la conservación de masa tenemos que

$$\begin{aligned} \nabla_\mu (\rho_0 u^\mu) &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} \rho_0 u^\mu) \\ &= \frac{1}{\alpha a r^2 \sin \theta} \partial_t (\alpha a r^2 \sin \theta \rho_0 u^t) + \frac{1}{\alpha a r^2 \sin \theta} \partial_r (\alpha a r^2 \sin \theta \rho_0 u^r) \\ &= \frac{1}{\alpha a} \partial_t (\alpha a \rho_0 u^t) + \frac{1}{\alpha a r^2} \partial_r (\alpha a r^2 \rho_0 u^r) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (2.60)$$

### 2.3 Ecuaciones TOV para un fluido hidrostático e ideal

donde  $g$  es el determinante del tensor métrico y por tanto  $\sqrt{-g} = \alpha ar^2 \sin\theta$ . Asumiendo que  $\alpha a \neq 0$  y usando la definición para  $D$  en (2.55) se tiene

$$\begin{aligned}
 \partial_t (\alpha a \rho_0 u^t) + \frac{1}{r^2} \partial_r (\alpha ar^2 \rho_0 u^r) &= 0 \\
 \partial_t \left( \alpha a \rho_0 \frac{W}{\alpha} \right) + \frac{1}{r^2} \partial_r (\alpha ar^2 \rho_0 W v^r) &= 0 \\
 \partial_t (a \rho_0 W) + \frac{1}{r^2} \partial_r (\alpha ar^2 v^r \rho_0 W) &= 0 \\
 \partial_t (aD) + \frac{1}{r^2} \partial_r (\alpha ar^2 v^r D) &= 0
 \end{aligned} \tag{2.61}$$

Con respecto a (2.59), tendremos dos ecuaciones correspondientes a  $\nu = t, r$ . Tomando la derivada covariante en (2.28) y calculando tenemos

- Para la componente en  $t$

$$\begin{aligned}
 \nabla_\mu T^{\mu t} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} T^{\mu t}) + \Gamma_{\mu\lambda}^t T^{\mu\lambda} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_t (\sqrt{-g} T^{tt}) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_r (\sqrt{-g} T^{rt}) + \Gamma_{tt}^t T^{tt} \\
 &\quad + \Gamma_{tr}^t T^{tr} + \Gamma_{rt}^t T^{rt} + \Gamma_{rr}^t T^{rr} + \Gamma_{\theta\theta}^t T^{\theta\theta} + \Gamma_{\phi\phi}^t T^{\phi\phi}.
 \end{aligned}$$

Sustituyendo cada uno de los elementos y desarrollando se llega a

$$\partial_t (a\tau) + \frac{1}{r^2} \partial_r [\alpha ar^2 (\tau + p) v^r] = -\alpha a \frac{m}{r^2} S_r. \tag{2.62}$$

- Para la componente  $r$

$$\begin{aligned}
 \nabla_\mu T^{\mu r} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} T^{\mu r}) + \Gamma_{\mu\lambda}^r T^{\mu\lambda} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_t (\sqrt{-g} T^{tr}) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_r (\sqrt{-g} T^{rr}) + \Gamma_{tt}^r T^{tt} \\
 &\quad + \Gamma_{tr}^r T^{tr} + \Gamma_{rt}^r T^{rt} + \Gamma_{rr}^r T^{rr} + \Gamma_{\theta\theta}^r T^{\theta\theta} + \Gamma_{\phi\phi}^r T^{\phi\phi}.
 \end{aligned}$$

Que al desarrollar se obtiene

$$\partial_t (aS_r) + \frac{1}{r^2} \partial_r [\alpha ar^2 (S_r v^r + p)] = \alpha a \frac{2p}{r} - \alpha a \frac{a^2 m}{r^2} (S_r v^r + \tau + p + D). \tag{2.63}$$

Finalmente, las ecuaciones de Euler que sumadas a las ecuaciones de Einstein en (2.3) y a la ecuación de estado politrópica en 2.23 completan el sistema a resolver, se resumen en

#### Ecuaciones de Euler desarrolladas

$$\begin{aligned} \partial_t(aD) + \frac{1}{r^2}\partial_r(\alpha ar^2 v^r D) &= 0 \\ \partial_t(a\tau) + \frac{1}{r^2}\partial_r[\alpha ar^2(\tau + p)v^r] &= -\alpha a \frac{m}{r^2} S_r \\ \partial_t(aS_r) + \frac{1}{r^2}\partial_r[\alpha ar^2(S_r v^r + p)] &= \alpha a \frac{2p}{r} - \alpha a \frac{a^2 m}{r^2} (S_r v^r + \tau + p + D). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Definiendo los vectores

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} D \\ S_r \\ \tau \end{bmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{bmatrix} Dv^r \\ S_r v^r + p \\ (\tau + p)v^r \end{bmatrix}, \quad \vec{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha a \frac{a^2 m}{r^2} (S_r v^r + \tau + p + D) + \alpha a \frac{2p}{r} \\ -\alpha a \frac{m}{r^2} S_r \end{bmatrix}, \quad (2.65)$$

se pueden escribir las ecuaciones (2.61), (2.62) y (2.63) en forma de ley de balance de flujos como sigue

$$\partial_t(a\vec{u}) + \frac{1}{r^2}(\alpha ar^2 \vec{F}(\vec{u})) = \vec{S}(\vec{u}), \quad (2.66)$$

donde  $\vec{u}$  es el vector que contiene a la variables conservativas,  $\vec{F}$  será el vector de flujos y  $\vec{S}$  que incluye a los términos de fuente. Sin embargo se puede notar que uno de los términos tiene la dependencia  $1/r$  que es singular en  $r = 0$ . Este problema se resuelve dividiendo el vector de flujos de tal forma que se evite ese término. El resultado es

#### Ley de balance de flujos

$$\partial_t(a\vec{u}) + \frac{1}{r^2}(\alpha ar^2 \vec{f}_1(\vec{u}) + \partial_r(\alpha a \vec{f}_2(\vec{u}))) = \vec{S}(\vec{u}), \quad (2.67)$$

donde se ha utilizado la sustitución  $(1/r^2 \partial_r f = 3\partial_{r,3} f$  para alguna función  $f$ . Entonces

$$\vec{f}_1 = \begin{bmatrix} Dv^r \\ S_r v^r \\ (\tau + p)v^r \end{bmatrix}, \quad \vec{f}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha a \frac{a^2 m}{r^2} (S_r v^r + \tau + p + D) \\ -\alpha a \frac{m}{r^2} S_r \end{bmatrix}. \quad (2.68)$$

Hay que tener en cuenta que para que el sistema de ecuaciones en (2.67) sea un sistema

completo con el mismo número de variables y de ecuaciones, es necesario considerar a la ecuación de estado del gas ideal en (2.47).

Se ha logrado escribir al sistema de ecuaciones de una manera muy compacta en (2.66), sin embargo, las ventajas de expresarlo en esta forma tomarán más fuerza cuando se aborden los métodos numéricos que se han implementado en el código utilizado para este trabajo.

## 2.4. Recuperación de variables primitivas

En la sección anterior se definieron las variables conservativas (2.55). Cuando se resuelvan las ecuaciones tanto de Einstein como las de Euler serán estas variables las que se obtengan sobre el dominio numérico. Sin embargo, se necesitan recuperar las variables primitivas, ya que dichas variables son las que nos proporcionan la información física del sistema, así como también son necesarias para el cálculo de los flujos y términos de fuente en el siguiente paso de tiempo de la evolución.

Siguiendo a [Font et al., 2000] y a [Guzman et al., 2012], de la definición para las variables conservativas en (2.55) y definiendo un nuevo vector  $\vec{w} = a\vec{u} = (aD, aS_r, a\tau) = (w_1, w_2, w_3)$ , además de retomar la relación  $v^r = u^r/W = u^r\sqrt{1 - a^2v^rv^r}$  se tiene

$$\rho_0 = \frac{D}{W} = \frac{w_1}{a} \frac{1}{W} = \frac{w_1}{a} \sqrt{1 - a^2v^rv^r}. \quad (2.69)$$

Por otro lado

$$v^r = \frac{S_r}{a^2(\tau + p + D)} = \frac{aS_r}{a^2(a\tau + ap + aD)} = \frac{w_2}{a^2(w_3 + ap + w_1)}. \quad (2.70)$$

Finalmente, con ayuda de la ecuación de estado (2.47) y de la definición de la entalpía (2.46), la presión se puede escribir como sigue

$$p = \rho_0(\Gamma - 1) \left[ \frac{w_3 + w_2(1 - W) + ap(1 - W^2)}{w_1W} \right], \quad (2.71)$$

con  $W = W(v^r(p))$ . Se puede notar que la última expresión es una ecuación trascendental, y la manera de resolverla será numéricamente mediante el método de Newton-Raphson (puede verse [Hurtado and Sánchez, 2002] para más información). A grandes rasgos, este

método encuentra el cero de una función. La función de la que se quiere encontrar el cero será la ecuación (2.71) pasando el segundo miembro al primero. A partir de un cierto valor semilla inicial  $x_0$ , se define la siguiente iteración como sigue

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (2.72)$$

donde  $f'$  es la derivada de  $f$ . El cero se encontrará en la posición  $x_n$  para la cual la siguiente iteración  $x_{n+1}$  sea menor a un cierto valor  $\epsilon$  dado. Es entonces cuando se dice que el método converge.

Con las variables primitivas recuperadas podemos seguir con el proceso de evolución, el cual se detallará más adelante.

## 2.5. Cálculo de la temperatura

Otra cantidad termodinámica que resulta de vital importancia en la caracterización de una estrella es la temperatura. De [Zanotti et al., 2010] se sabe que una propiedad de los sistemas descritos por ecuaciones de estado tales como la ecuación de estado politrópica  $p = K\rho^\Gamma$  es que la temperatura puede ser estimada mediante la expresión

$$T = \frac{m_p p}{k_B \rho_0}, \quad (2.73)$$

donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann y  $m_p$  la densidad de masa en reposo del protón. Con una ecuación de estado politrópica la razón  $p/\rho$  se escribe como

$$\frac{p}{\rho_0} = K\rho_0^{\Gamma-1}. \quad (2.74)$$

En unidades geométricas y con  $m_p/k_B = 1$ , la transformación de la temperatura a grados Kelvin estará dada entonces por

$$T = 1,088 \times 10^{13} \frac{p}{\rho_0} \text{kelvin}. \quad (2.75)$$

## 2.6. Estructura característica de las ecuaciones de Euler

De la sección anterior se sabe que las variables conservativas en  $\vec{u} = (D, S_r, \tau)^T$  dependen a su vez de las variables primitivas en  $\vec{w} = (\rho_0, v^r, \epsilon)^T$ , donde  $T$  significa transpuesta. De esta manera, una expresión de ley de balance de la forma

$$\partial_t \vec{u} + \partial_i \vec{F}^i(\vec{u}) = 0 \quad (2.76)$$

se puede escribir, mediante una aproximación cuasilineal, de la siguiente manera

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{w}} \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}^i}{\partial \vec{w}} \frac{\partial \vec{w}}{\partial x^i} = 0. \quad (2.77)$$

Si hacemos

$$A^0 = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{w}}, A^i = \frac{\partial \vec{F}^i}{\partial \vec{w}} \quad (2.78)$$

obtenemos

$$A^0 \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + A^i \frac{\partial \vec{w}}{\partial x^i} = 0, \quad (2.79)$$

donde la matriz  $J^i = \frac{\partial \vec{F}^i}{\partial \vec{u}}$  será la matriz jacobiana del sistema de  $5 \times 5$  para el caso de tres dimensiones. Como se verá más adelante, los métodos numéricos implementados dependen crucialmente de la información que se obtiene de la matriz jacobiana; más concretamente de sus eigenvalores y eigenvectores. Los eigenvalores de esta matriz son reales y representan velocidades de propagación de la información en las interceldas de lo que posteriormente se definirá como malla numérica para la descripción del espacio-tiempo. Los eigenvalores y eigenvectores se obtendrán de resolver las ecuaciones

$$\det(A^i - \lambda A^0) = 0 \quad (2.80)$$

$$(A^i - \lambda A^0) \vec{r} = 0. \quad (2.81)$$

En [Font et al., 2000] se pueden consultar los cálculos para tres dimensiones en simetría esférica. En nuestro caso de una dimensión identificamos a  $x^i$  como  $r$  y la matriz jacobiana se reduce a una matriz de  $3 \times 3$  con los siguientes eigenvalores



## Eigenvalores de la matriz jacobiana

$$\lambda_1 = \alpha v^r \quad (2.82)$$

$$\lambda_2 = \frac{\alpha}{1 - v^2 c_s^2} \left[ v^r (1 - c_s^2) + \sqrt{c_s^2 (1 - v^2) \left[ \frac{1}{a^2} (1 - v^2 c_s^2) - v^r v^r (1 - c_s^2) \right]} \right]$$

$$\lambda_3 = \frac{\alpha}{1 - v^2 c_s^2} \left[ v^r (1 - c_s^2) - \sqrt{c_s^2 (1 - v^2) \left[ \frac{1}{a^2} (1 - v^2 c_s^2) - v^r v^r (1 - c_s^2) \right]} \right].$$

donde  $C_s$  es la velocidad del sonido que satisface la expresión

$$C_s^2 = \frac{p\Gamma(\Gamma - 1)}{p\Gamma + \rho_0(\Gamma - 1)} \quad (2.83)$$

y  $v^2 = a^2 v^r v^r$ . Los correspondientes eigenvectores linealmente independientes son

$$\vec{r}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\kappa}{hW(\kappa - \rho_0 c_s^2)} \\ v_r \\ 1 - \frac{\kappa}{hW(\kappa - \rho_0 c_s^2)} \end{bmatrix}, \quad (2.84)$$

$$\vec{r}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ hW \left( v_r - \frac{v^r - \lambda_2/\alpha}{\frac{1}{a^2} - v^r \lambda_2/\alpha} \right) \\ hW \left( \frac{\frac{1}{a^2} - v^r v^r}{\frac{1}{a^2} - v^r \lambda_2/\alpha} \right) - 1 \end{bmatrix}, \quad (2.85)$$

$$\vec{r}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ hW \left( v_r - \frac{v^r - (\lambda_3 + \beta^r)/\alpha}{\frac{1}{a^2} - v^r \lambda_3/\alpha} \right) \\ hW \left( \frac{\frac{1}{a^2} - v^r v^r}{\frac{1}{a^2} - v^r \lambda_3/\alpha} \right) - 1 \end{bmatrix}, \quad (2.86)$$

con  $\kappa = \rho_0(\Gamma - 1)$ . Se verá más adelante que los métodos numéricos (ver sección 3.3.4) ocupados en nuestro caso sólo necesitarán de los eigenvalores, sin embargo, se han escrito también los eigenvectores puesto que existen métodos que sí los requieren, y que el lector podría implementar.

## 2.7. Ecuaciones para generar el dato inicial

Reescribimos el elemento de línea para un espacio-tiempo estático asumiendo a  $a^2 = \frac{1}{1 - \frac{2m(r)}{r}}$ . Así,

Métrica para el dato inicial

$$ds^2 = -\alpha^2(r)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2m(r)}{r}} + r^2d\theta^2 + r^2\text{sen}^2\theta d\phi^2, \quad (2.87)$$

notando que sólo se tiene dependencia en  $r$ . Se obtendrán de igual forma las ecuaciones de Einstein, comenzando por los símbolos de Christoffel, los cuales se pueden consultar en el Apéndice A.2, así como las componentes del tensor de Einstein y detalles de las ecuaciones.

Ahora calculamos el tensor de energía-momento para un fluido perfecto donde, en este caso, hacemos en (2.48) que  $v^r = 0$  y por tanto  $W = 1$ , obteniendo

$$(T^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha^2}(\rho_0 h - p) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P\left(1 - \frac{2m}{r}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{P}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{p}{r^2\text{sen}^2\theta} \end{pmatrix}, \quad (2.88)$$

o

$$(T_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \alpha^2(\rho_0 h - p) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{P}{1 - \frac{2m}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Pr^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & pr^2\text{sen}^2\theta \end{pmatrix}. \quad (2.89)$$

De igualar componentes obtenemos las siguientes ecuaciones:

- Para  $G_{tt} = 8\pi T_{tt}$  se tiene

$$\begin{aligned} \frac{2\alpha^2}{r^2} \frac{dm}{dr} &= 8\pi\alpha^2(\rho_0 h - p) \\ \frac{dm}{dr} &= 4\pi r^2(\rho_0 h - p). \end{aligned}$$

Usando la relación entre la densidad de energía  $\rho$  y la densidad de masa en reposo  $\rho_0$  dada por

$$\rho = \rho_0(1 + \epsilon) \quad (2.90)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \rho_0 h &= \rho_0(1 + \epsilon + P/\rho_0) \\ &= \rho_0(1 + \epsilon) + P \\ &= \rho + P \\ \rho_0 h - P &= \rho, \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho. \quad (2.91)$$

- Al calcular la divergencia del tensor de energía-momento (ver Apéndice A.2) llegamos a

$$-\frac{(-r + 2m) \left( \rho_0 h \frac{d\alpha}{dr} + \alpha \frac{dP}{dr} \right)}{\alpha r} = 0.$$

Desarrollando un poco obtenemos finalmente

$$\frac{dP}{dr} = -(\rho + P) \frac{m + 4\pi r^3 P}{r(r - 2m)}. \quad (2.92)$$

- Y para  $G_{tt} = 8\pi T_{tt}$

$$\frac{2 \left[ 2rm \left( \frac{d\alpha}{dr} \right) + \alpha m - r^2 \left( \frac{d\alpha}{dr} \right) \right]}{\alpha r^2 (-r + 2m)} = 8\pi \frac{P}{1 - \frac{2m}{r}},$$

o

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dr} = \frac{m + 4\pi r^3 P}{r(r - 2m)} = -\frac{1}{\rho + P} \frac{dP}{dr}.$$

Así, dada la nueva métrica en (2.87), las ecuaciones de Einstein que se satisfacen al tiempo cero de evolución estarán dadas por

## 2.7 Ecuaciones para generar el dato inicial

### Ecuaciones de Einstein para el dato inicial

$$\begin{aligned}\frac{dm}{dr} &= 4\pi r^2 \rho \\ \frac{dP}{dr} &= -(\rho + P) \frac{m + 4\pi r^3 P}{r(r - 2m)} \\ \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dr} &= \frac{m + 4\pi r^3 P}{r(r - 2m)} = -\frac{1}{\rho + P} \frac{dP}{dr}.\end{aligned}$$

De nuevo se puede notar que en las ecuaciones (2.92) y (2.93) se tiene una singularidad en  $r = 0$ . Lo que se suele hacer en estos casos es expandir en serie de Taylor para valores pequeños de  $r$ . De esta manera, expandiendo  $m(r)$  alrededor de  $r = 0$

$$\frac{m + 4\pi r^2 P}{r^2 - 2mr} \sim \frac{m(0) + m'(0)r + \frac{1}{2}m''(0)r^2 + \frac{1}{6}m'''(0)r^3 + \mathcal{O}(r^4) + 4\pi r^3 P}{r^2 - 2r \left[ m(0) + m'(0)r + \frac{1}{2}m''(0)r^2 + \frac{1}{6}m'''(0)r^3 + \mathcal{O}(r^4) \right]}. \quad (2.93)$$

De las condiciones iniciales  $m(0) = 0$ , y usando (2.91) para calcular las derivadas en (2.93) se tiene

$$\left. \frac{dm}{dr} \right|_{r=0} = 0 \quad \left. \frac{d^2 m}{dr^2} \right|_{r=0} = 8\pi r \rho|_{r=0} = 0 \quad \left. \frac{d^3 m}{dr^3} \right|_{r=0} = 8\pi \rho.$$

Así

$$\frac{m + 4\pi r^2 P}{r^2 - 2mr} \sim \frac{\frac{4}{3}\pi \rho r^3 + 4\pi r^3 P}{r^2 - 2r \left( \frac{4}{3}\pi \rho r^2 \right)} = \frac{r^2 \left( \frac{4}{3}\pi \rho r + 4\pi r P \right)}{r^2 \left( 1 - \frac{8}{3}\pi \rho r^2 \right)} = \frac{\frac{4}{3}\pi \rho r + 4\pi r P}{1 - \frac{8}{3}\pi \rho r^2}. \quad (2.94)$$

Sustituyendo esta ecuación en las dos ecuaciones restantes (2.92) y (2.93) se llega a

$$\frac{dP}{dr} = -(\rho + P) \frac{\frac{4}{3}\pi \rho r + 4\pi r P}{1 - \frac{8}{3}\pi \rho r^2}, \quad (2.95)$$

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dr} = \frac{\frac{4}{3}\pi \rho r + 4\pi r P}{1 - \frac{8}{3}\pi \rho r^2}. \quad (2.96)$$

Con los cálculos realizados hasta ahora ya estamos listos para abordar los métodos numéricos que nos ayudarán a evolucionar las ecuaciones de Einstein y de Euler.

## Hidrodinámica relativista numérica

En este capítulo se profundizará en los métodos numéricos que permitirán resolver las ecuaciones que se trataron en el capítulo anterior. El incremento en la capacidad de los equipos de cómputo científico ha permitido modelar sistemas cada vez más realistas, dejando atrás a las observaciones pero a la espera de las mismas para constatar con las simulaciones. Con el avance del capítulo se irán presentando los métodos numéricos de manera individual para finalizar con el esquema global del código y reconstruyendo el rompecabezas con las piezas obtenidas con cada método.

### 3.1. Diferencias finitas

El método de diferencias finitas es comúnmente utilizado para la solución de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) sujetas a ciertas condiciones iniciales y de contorno. En general, la implementación de métodos numéricos para este fin se basa en discretizar el problema continuo descrito por las EDP a un conjunto finito de valores discretos. El punto de partida es la discretización del dominio mediante una malla o rejilla, en la que ya no se habla de valores en un punto del espacio, sino de valores definidos sobre cada punto de la malla. Para el problema a tratar en esta tesis, éste método resulta, como se verá más adelante, de poca utilidad en la solución de las EDPs de nuestro interés. Sin embargo, es conveniente hacer mención de él para tener una primera visión del alcance de los métodos numéricos en éste tipo de problemas.

Para entrar por completo al tema de diferencias finitas, es necesario establecer una

### 3.1 Diferencias finitas

---

manera de aproximar una derivada, y para ello se hará uso de la expansión en serie de Taylor. Como se dijo, se necesita discretizar el espacio y también el tiempo. Siguiendo a [Toro, 2009, pp. 164-165], se considera que se divide a la coordenada espacial en  $N$  intervalos igualmente espaciados de longitud  $\Delta x$ , de tal forma que un punto sobre ella pueda ser escrito como  $x_j = j\Delta x$ , con  $j = 0, 1, \dots, N$ . Se dividirá de igual forma a la coordenada temporal en  $N_t$  intervalos de longitud  $\Delta t$ , así  $t^n = n\Delta t$ , con  $n = 0, 1, \dots, N_t$ . De esta manera, la función  $f$  quedará definida por las coordenadas  $(t^n, x_j)$  y la denotaremos como  $f_j^n$ . Además,  $\Delta x = x_{j+1} - x_j$  y  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$  serán las resoluciones espacial y temporal.

Conociendo la función  $f_j^n$  para un tiempo fijo y todas sus derivadas, es posible encontrar el valor de la función en la vecindad de un punto  $x = x_j$ . Esto es, para  $x_j + \Delta x$ , tenemos que

$$f(x_j + \Delta x) = f(x_{j+1}) = f(x_j) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x_j) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x_j) + \mathcal{O}(\Delta x^3), \quad (3.1)$$

donde el término  $\mathcal{O}(\Delta x^3)$  representa al error de truncamiento, siendo este el que determinará el orden de precisión de la aproximación. Si nos quedamos sólo a primer orden y despejamos el valor de la derivada se llega a

$$f'(x_j) = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x). \quad (3.2)$$

A esta aproximación para la derivada se le llama *diferencia finita superior* o *delantera*, ya que la derivada se expresa en términos de la función evaluada en un punto y la evaluación en un punto a la derecha de éste a una distancia  $\Delta x$ .

Análogamente, podemos expandir en serie de Taylor para un punto a la izquierda de  $x_j$  como sigue

$$f(x_{j-1}) = f(x_j) - \frac{\Delta x}{1!} f'(x_j) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x_j) + \mathcal{O}(\Delta x^3), \quad (3.3)$$

de donde se obtiene de igual manera una expresión para la derivada, llamada *diferencia finita inferior* o *anterior*. Esta es

$$f'(x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x). \quad (3.4)$$

Restando (3.3) y (3.1) se llega a una expresión para la primera derivada con un error de segundo orden,

$$f'(x_j) = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_{j-1})}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2). \quad (3.5)$$

A (3.5) se le conoce como *diferencia finita central*, pues toma en cuenta un punto tanto a la derecha como a la izquierda de  $x_j$  y se puede obtener también de tomar el valor medio entre las aproximaciones superior e inferior.

Cabe mencionar que también es posible aproximar la derivada haciendo uso de dos puntos a la derecha o a la izquierda en lugar de solo uno. A estas aproximaciones se les suele llamar *upwind* o aproximaciones no centradas. Para ello basta agregar las expansiones para los puntos  $f(x_{j+2})$  y  $f(x_{j-2})$  a las que se tenían previamente, y encontrar una combinación lineal entre ellas tal que se eliminen tanto el término de orden cero como los términos para las derivadas de segundo orden en adelante. Las expansiones son

$$f(x_{j+2}) = f(x_j) + \frac{2\Delta x}{1!} f'(x_j) + \frac{4(\Delta x)^2}{2!} f''(x_j) + \mathcal{O}(\Delta x^3). \quad (3.6)$$

$$f(x_{j-2}) = f(x_j) - \frac{2\Delta x}{1!} f'(x_j) + \frac{4(\Delta x)^2}{2!} f''(x_j) + \mathcal{O}(\Delta x^3). \quad (3.7)$$

respectivamente. Una combinación lineal entre las ecuaciones (3.6) y (3.1) y la evaluación de la función en  $x_j$ , que proporciona una expresión para la primera derivada a segundo orden de aproximación es  $-f(x_{j+2}) + 4f(x_{j+1}) - 3f(x_j)$ . Al dividirla por  $2\Delta x$  resulta que

$$f'(x_j) = \frac{-f(x_{j+2}) + 4f(x_{j+1}) - 3f(x_j)}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2). \quad (3.8)$$

La combinación lineal para el caso de (3.7) y (3.3) es análoga a la del caso anterior pero de signo contrario, es decir, haciendo uso ahora de los puntos a la izquierda tenemos

$$f'(x_j) = \frac{f(x_{j-2}) - 4f(x_{j-1}) + 3f(x_j)}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^2). \quad (3.9)$$

Finalmente, para un orden de aproximación mayor, digamos de cuarto orden, se debe considerar un número mayor de términos en las expansiones (con error de truncamiento de quinto orden), y encontrar una combinación lineal del tipo  $af(x_{j-2}) + bf(x_{j-1}) + cf(x_j) +$

### 3.1 Diferencias finitas

---

$df(x_{j+1}) + ef(x_{j+2})$ , hablando del caso centrado. El nuevo sistema de expansiones será

$$\begin{aligned}
 f(x_{j-2}) &= f(x_j) - \frac{2\Delta x}{1!} f'(x_j) + \frac{4(\Delta x)^2}{2!} f''(x_j) - \frac{8(\Delta x)^3}{3!} f'''(x_j) \\
 &\quad + \frac{16(\Delta x)^4}{4!} f^{(4)}(x_j) + \mathcal{O}(\Delta x^5) \\
 f(x_{j-1}) &= f(x_j) - \frac{\Delta x}{1!} f'(x_j) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x_j) - \frac{(\Delta x)^3}{3!} f'''(x_j) \\
 &\quad + \frac{(\Delta x)^4}{4!} f^{(4)}(x_j) + \mathcal{O}(\Delta x^5) \\
 f(x_j) &= f(x_j) \\
 f(x_{j+1}) &= f(x_j) + \frac{\Delta x}{1!} f'(x_j) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''(x_j) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} f'''(x_j) \\
 &\quad + \frac{(\Delta x)^4}{4!} f^{(4)}(x_j) + \mathcal{O}(\Delta x^5) \\
 f(x_{j+2}) &= f(x_j) + \frac{2\Delta x}{1!} f'(x_j) + \frac{4(\Delta x)^2}{2!} f''(x_j) + \frac{8(\Delta x)^3}{3!} f'''(x_j) \\
 &\quad + \frac{16(\Delta x)^4}{4!} f^{(4)}(x_j) + \mathcal{O}(\Delta x^5).
 \end{aligned}$$

La expresión para la primera derivada con una aproximación de cuarto orden será

$$f'(x_j) = \frac{f(x_{j-2}) - 8f(x_{j-1}) + 8f(x_{j+1}) - f(x_{j+2})}{12\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^4). \quad (3.10)$$

A manera de comentario, si lo que se busca es aproximar derivadas de segundo orden, se debe de buscar una combinación lineal para la cual solo sobrevivan los términos que contengan a dicha derivada. La aproximación de segundo orden para la segunda derivada es

$$f''(x_j) = \frac{f(x_{j+1}) - 2f(x_j) + f(x_{j-1}))}{(\Delta x)^2} + \mathcal{O}(\Delta x^2). \quad (3.11)$$



## 3.2. Evolución temporal: Método Runge-Kutta y Método de líneas

### Método de Runge-Kutta

De la sección anterior se vio que es necesaria una forma de aproximar las derivadas, y se sustentó en la expansión en serie de Taylor. Otro método que hace uso de la misma herramienta es el método de Runge-Kutta para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias con valores iniciales. De [Hurtado and Sánchez, 2002, pp. 469-471], un problema de valor inicial (PVI) que se quiere resolver numéricamente queda formulado de la siguiente manera:

1. Una ecuación diferencial de primer orden.
2. El valor de  $y$  en un punto conocido  $x_0$ , que es la condición inicial.
3. El valor  $x_f$  donde se quiera conocer el valor de  $y$ .

O de forma matemática

$$PVI = \begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Lo que se busca es, de igual forma, sustituir las derivadas por evaluaciones de una función que se conoce, y consiste en obtener un resultado que normalmente se obtendría de considerar un número finito de términos de una serie de Taylor de la forma

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2!}f'(x_i, y_i) + \frac{h^3}{3!}f''(x_i, y_i) + \dots \quad (3.13)$$

mediante una aproximación del tipo

$$y_{i+1} = y_i + h[\alpha_0 f(x_i, y_i) + \alpha_1 f(x_i + \mu_1 h, y_i + b_1 h) + \alpha_2 f(x_i + \mu_2 h, y_i + b_2 h) + \dots + \alpha_p f(x_i + \mu_p h, y_i + b_p h)]. \quad (3.14)$$

Los parámetros  $\alpha$ ,  $\mu$  y  $b$  serán determinados de tal forma que si se expande  $f(x_i + \mu_j h, y_i + b_j h)$  en serie de Taylor alrededor de  $(x_i, y_i)$  con  $j = 1, \dots, p$ , se vería que los coeficientes de las potencias de  $h$  coincidirían con los de la ecuación (3.13).

### 3.2 Evolución temporal: Método Runge-Kutta y Método de líneas

---

A manera de ejemplo, se obtendrán las expresiones para el método de Runge-Kutta de segundo orden, es decir, cuando  $p = 1$ .

Se inicia por reescribir la ecuación (3.14) para  $p = 1$  de la siguiente forma

$$y_{i+1} = y_i + h[\alpha_0 f(x_i, y_i) + \alpha_1 f(x_i + \mu h, y_i + bh)]. \quad (3.15)$$

Se puede escribir  $b$  sin pérdida de generalidad como  $b = \lambda f(x_i, y_i)$  ya que este parámetro puede manejarse más libremente.

Ahora expandemos la expresión  $f(x_i + \mu h, y_i + \lambda k_0)$  (donde  $k_0 = hf(x_i, y_i)$ ) en serie de Taylor para funciones de dos variables y obtenemos

$$\begin{aligned} f(x_i + \mu h, y_i + \lambda k_0) = & f(x_i, y_i) + \mu h \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial x} + \lambda h \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial y} + \frac{\mu^2 h^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x_i, y_i)}{\partial x^2} \\ & + \mu h \lambda k_0 \frac{\partial^2 f(x_i, y_i)}{\partial x \partial y} + \frac{\lambda^2 k_0^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x_i, y_i)}{\partial y^2} + \mathcal{O}(h^3). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Sustituyendo en la ecuación (3.15) se llega a

$$\begin{aligned} y_{i+1} = & y_i + h\alpha_0 f(x_i, y_i) + \alpha_1 h \left[ f(x_i, y_i) + \mu h \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial x} + \lambda h \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial y} \right. \\ & \left. + \frac{\mu^2 h^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x_i, y_i)}{\partial x^2} + \mu h \lambda k_0 \frac{\partial^2 f(x_i, y_i)}{\partial x \partial y} + \frac{\lambda^2 k_0^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x_i, y_i)}{\partial y^2} + \mathcal{O}(h^3) \right]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Reordenando en potencias de  $h$

$$\begin{aligned} y_{i+1} = & y_i + h(\alpha_0 + \alpha_1) f(x_i, y_i) + h^2 \alpha_1 \left( \mu \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial x} + \lambda f(x_i, y_i) \frac{\partial f(x_i, y_i)}{\partial y} \right) \\ & + \frac{h^3}{2} \alpha_1 \left[ \mu^2 \frac{\partial^2 f(x_i, y_i)}{\partial x^2} + 2\mu \lambda f(x_i, y_i) \frac{\partial^2 f(x_i, y_i)}{\partial x \partial y} + \lambda^2 f^2(x_i, y_i) \frac{\partial^2 f(x_i, y_i)}{\partial y^2} \right] + \mathcal{O}(h^4). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Lo que se busca ahora es igualar los coeficientes de (3.13) y (3.18). De esta manera se puede encontrar que

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 &= 1 \\ \mu \alpha_1 &= \frac{1}{2} \\ \lambda \alpha_1 &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

de donde sólo se tienen 3 ecuaciones para cuatro incógnitas, lo que conduce a un número infinito de soluciones. Sin embargo se propone una solución que bien podría ser la más simple

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \frac{1}{2}; \mu = \lambda = 1.$$

Así

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(x_i, y_i) + f(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i))]$$

o bien

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(k_0 + k_1) \tag{3.19}$$

con  $k_0 = f(x_i, y_i)$  y  $k_1 = f(x_i + h, y_i + hk_0)$ . Las expresiones anteriores pertenecen al método de Runge-Kutta de segundo orden.

Ahora bien, el método que se usará aquí es el método de Runge-Kutta de cuarto orden, el cual es una de las fórmulas más usadas dentro de la familia de posibilidades. Está dada como:

**Método de Runge-Kutta de cuarto orden**

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \tag{3.20}$$

donde:

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + h/2, y_i + hk_1/2)$$

$$k_3 = f(x_i + h/2, y_i + hk_2/2)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3)$$

Este método en particular se utilizará para encontrar  $\alpha$  y  $a$  en casa instante de tiempo al resolver la ecuaciones (2.3), así como para obtener el dato inicial.

**Método de Runge-Kutta TVD**

Debido a que los métodos numéricos en general trabajan desde cierto punto con aproximaciones, es de esperar que se presenten errores numéricos propios del código, los cuales

### 3.2 Evolución temporal: Método Runge-Kutta y Método de líneas

---

pueden manifestarse en forma de oscilaciones. Sin embargo, se busca que estos errores no se incrementen a cada paso de tiempo en una evolución temporal como se tiene el caso. Por esto mismo es necesario introducir el método de Runge-Kutta con la propiedad TVD, o *Total Variation Diminishing* por su siglas en inglés.

Antes de describir en qué consiste dicho método se cuantificarán de alguna manera las oscilaciones producto de los errores numéricos. Siguiendo a [Shu and Osher, 1988], se hará uso del concepto de Variación Total (TV o *Total Variation*) de una solución escalar discreta, tal como en una malla numérica, y que se define como sigue

$$TV(u) = \sum_j |u_{j+1} - u_j|, \quad (3.21)$$

donde el subíndice  $j$  se refiere a la coordenada espacial en la malla.

Para asegurar que el error no se propague y por ende decir que se mantiene la propiedad TVD, el método debe evitar que se incremente la variación total en el tiempo, es decir

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n), \quad (3.22)$$

donde  $n$  se refiere a la coordenada temporal en la malla.

Ahora bien, el método de Runge-Kutta es usado para resolver un sistema de la forma

$$u_t = L(u), \quad (3.23)$$

y el método se escribirá de manera general como sigue

$$\begin{aligned} u^{(i)} &= \sum_{k=0}^{i-1} (\alpha_{ik} u^{(k)} + \Delta t \beta_{ik} L(u^{(u)})), \quad i = 1, \dots, m, \\ u^{(0)} &= u^n, \\ u^{(m)} &= u^{n+1}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Así, se dice que el método de Runge-Kutta (3.24) es TVD bajo el coeficiente CFL (*Courant-Friedrichs-Lewy*) o mejor conocido como factor de Courant dado por

$$c = \min_{i,k} \frac{\alpha_{ik}}{\beta_{ik}} \quad (3.25)$$

con  $\alpha_{ik} \geq 0$  y  $\beta_{ik} \geq 0$ . Dicho factor es el que relaciona los pasos en el tiempo con los pasos en el espacio de la forma  $\Delta t = c\Delta r$ .

Las expresiones para los métodos de Runge-Kutta TVD de segundo y tercer orden son, para segundo orden

Runge-Kutta TVD de segundo orden

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^n + \Delta t L(u^{(n)}), \\ u^{n+1} &= \frac{1}{2}u^n + \frac{1}{2}u^{(1)} + \frac{1}{2}\Delta t L(u^{(1)}), \end{aligned} \quad (3.26)$$

con  $c = 1$ . Para tercer orden

Runge-Kutta TVD de tercer orden

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^n + \Delta t L(u^{(n)}), \\ u^2 &= \frac{3}{4}u^n + \frac{1}{4}u^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t L(u^{(1)}), \\ u^{n+1} &= \frac{1}{3}u^n + \frac{2}{3}u^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t L(u^{(2)}), \end{aligned} \quad (3.27)$$

también con  $c = 1$ .

Con este método se resolverán las ecuaciones de la hidrodinámica relativista resumidas en (2.3)

### Método de líneas

El método de líneas es, a grandes rasgos, un método numérico que permite aproximar ecuaciones diferenciales parciales por ecuaciones ordinarias. Consiste en la semi-discretización del dominio, es decir, todas salvo una de las variables independientes se discretizan. Su nombre proviene del hecho de que para los valores de las variables discretizadas se tiene un continuo en la variable no discretizada, lo que forma líneas. Así, una ecuación diferencial que fuera en principio parcial, en función del tiempo y del espacio, se podrá escribir como una ecuación diferencial ordinaria en  $t$  como sigue

$$\frac{du}{dt} = f(u) \quad (3.28)$$

### 3.2 Evolución temporal: Método Runge-Kutta y Método de líneas

---

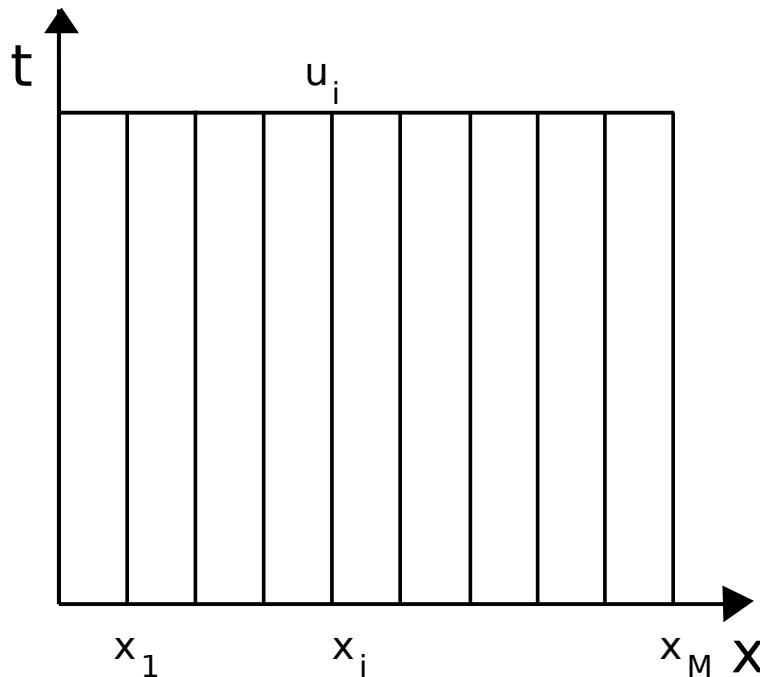
donde el lado derecho de la ecuación involucra a las derivadas parciales espaciales que han sido aproximadas por algún método (por ejemplo diferencias finitas), y que ahora es función de  $u(t, x)$ . Así, por ejemplo, una ecuación de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.29)$$

con  $v$  una constante, se puede aproximar a la expresión

$$\frac{du_i}{dt} = -v \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} \quad (3.30)$$

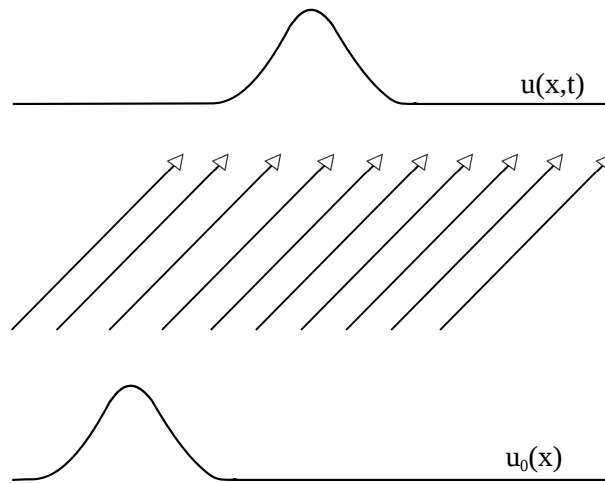
donde  $i$  designa la posición a lo largo de la malla discretizada y corre sobre  $i = 1 \dots M$  en una malla de  $M$  puntos (ver Figura (3.1)). De esta manera se tienen ahora un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para  $t$ , sin pasar de largo que son necesarias las correspondientes condiciones iniciales y de frontera. Para más información y ejemplos se puede consultar [Sadiku and Obiozor, 2000]



**Figura 3.1:** Discretización de la coordenada espacial en el método de líneas.

### 3.3. Métodos de alta resolución para captura de choques

Se sabe que las ecuaciones de la hidrodinámica relativista, que son en general ecuaciones diferenciales parciales (EDP) no lineales de tipo hiperbólico, tienden a generar soluciones que presentan ondas de choque aunque la condición inicial sea suave, es decir, formación de discontinuidades cuando se supera la velocidad de propagación de la solución.



**Figura 3.2:** Solución a una ecuación diferencial parcial de tipo hiperbólico (ecuación de *Advención*) que evoluciona en el tiempo sin generar choques.

A manera de ejemplo, una solución que no presenta ondas de choque se ve en la Figura (3.2) y corresponde a una ecuación de tipo hiperbólico en una dimensión (llamada ecuación de *Advención*)

$$u_t + au_x = 0 \quad (3.31)$$

con  $a$  una constante que representa la velocidad de propagación de la onda ya sea a la izquierda o a la derecha según su signo. El problema de Cauchy quedará definido junto con la condición inicial  $u(x, 0) = u_0(x)$ . Sin embargo, cuando la ecuación ya es de la forma

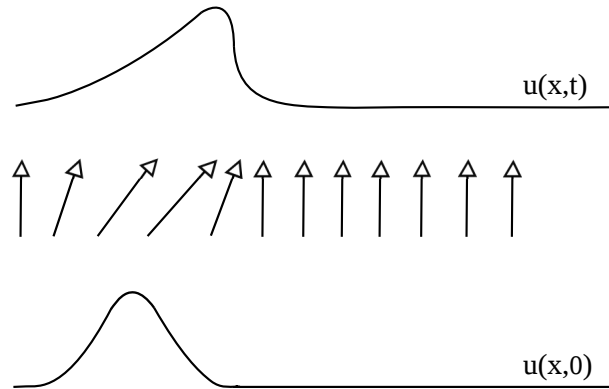
$$u_t + f(u)_x = 0 \quad (3.32)$$

se pueden generar choques y que llevarán a una solución multivaluada que carece de sentido físico. La razón, a grandes rasgos, tiene que ver con las llamadas curvas características,

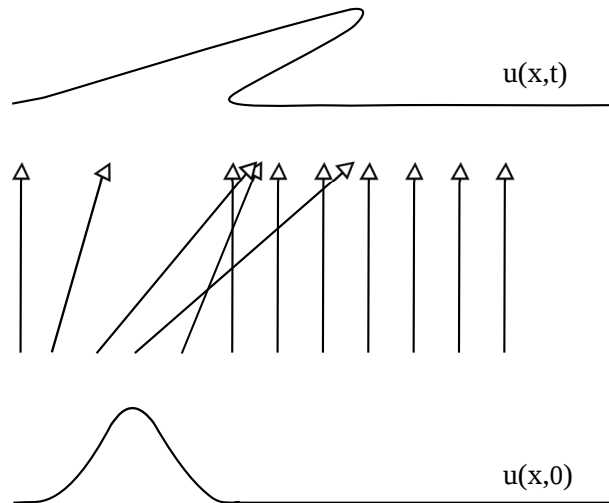
### 3.3 Métodos de alta resolución para captura de choques

---

que son curvas sobre las cuales la solución  $u(x, t)$  se mantiene constante. Los choques se generan debido al cruce entre estas curvas (ver [LeVeque, 1992, pp. 19-27] para más información). En las Figuras (3.3) y 3.4 se puede ver esquemáticamente cómo se van generando los choques, donde las curvas características están representadas por las líneas rectas en principio paralelas como en la Figura (3.2), pero que después llegan a cruzarse.



**Figura 3.3:** Solución a una EDP que comienza a generar choques.



**Figura 3.4:** Solución a una EDP que ya ha generado ondas de choque arrojando una función trivaluada.

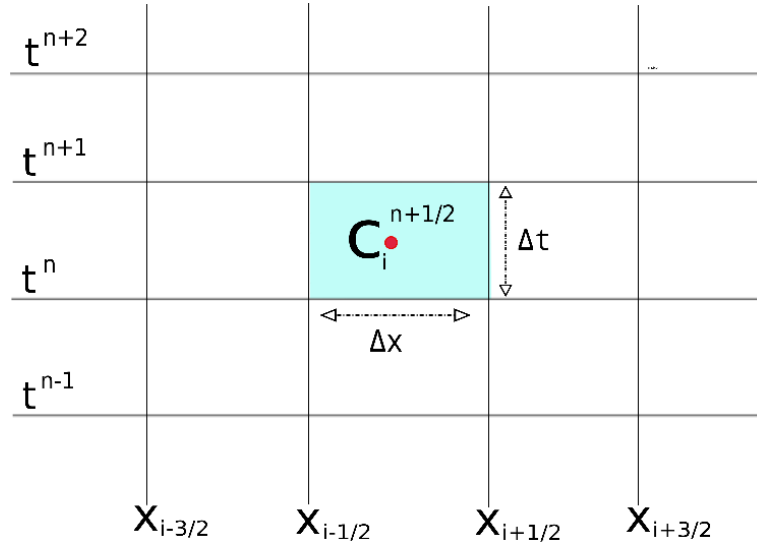
Por todo esto, es evidente que adoptar un esquema de solución basado en diferencias finitas, por ejemplo, no sería de ayuda en presencia de discontinuidades. Por otro lado, los métodos que sí resultan aplicables en estos casos son los llamados *High Resolution Shock Capturing Methods* o Métodos de captura de choques de alta resolución, los cuales se



basan en la discretización de volumen finito que se describirá a continuación, y considera la versión integral de las ecuaciones escritas en forma de ley de balance.

### 3.3.1. Volúmenes finitos

De manera similar a como se desarrolló en diferencias finitas (ver [Toro, 2009] y [Font, 2008]) se comienza por definir una malla numérica que representa al espacio-tiempo, cuyas celdas están igualmente espaciadas. Así, la coordenada temporal quedará discretizada con los valores  $t^n = n\Delta t$ , mientras que la posición del centro de la celda,  $C_i^{n+1/2}$ , en el espacio será  $x_i = i\Delta x$ . Las fronteras de la celda estarán ubicadas entonces en  $x_{i-1/2}$  y  $x_{i+1/2}$ , con un tamaño de celda de  $\Delta x\Delta t$  (Ver Figura (3.5)).



**Figura 3.5:** Discretización del espacio-tiempo en el esquema de volúmenes finitos. El volumen de control se encuentra definido por  $\Delta V = \Delta t\Delta x$  con sólo una dimensión espacial. La celda señalada se encuentra centrada en  $C_i^{n+1/2}$  y está localizada en  $(t^{n+1/2}, x_i)$ .

Como se mencionó arriba, se tienen grandes ventajas al utilizar la forma integral de la ecuación de balance de flujo, que resulta particularmente útil cuando el problema desarrolla discontinuidades. Para plantear el problema, se escribirá la ecuación de balance de flujo para un sistema conservativo unidimensional dependiente del tiempo:

$$\partial_t u + \partial_x F(u) = S \tag{3.33}$$

donde  $u$  es el vector cuyas componentes contienen a las variables conservativas,  $F(u)$  son

### 3.3 Métodos de alta resolución para captura de choques

los flujos, y  $S$  lo que se conoce como término de fuente.

Para discretizar esta expresión y escribirla en forma integral se realiza un promedio sobre la celda de espacio-tiempo, de lo que resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t \Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \partial_t u dx dt + \frac{1}{\Delta t \Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \partial_x F(u) dx dt \\ = \frac{1}{\Delta t \Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \partial_t S dx dt \end{aligned} \quad (3.34)$$

siendo  $(t^n, t^{n+1}) \times (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$  el volumen de la celda sobre la que se integra. Integrando la expresión anterior se obtiene

$$\frac{1}{\Delta t} (\bar{u}_i^{n+1} - \bar{u}_i^n) = -\frac{1}{\Delta x} (\bar{F}_{i+1/2}^{n+1/2} - \bar{F}_{i-1/2}^{n+1/2}) + \bar{S}_i^{n-1/2} \quad (3.35)$$

o de otra forma

Ecuación de evolución

$$\bar{u}_i^{n+1} = \bar{u}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{F}_{i+1/2}^{n+1/2} - \bar{F}_{i-1/2}^{n+1/2}) + \bar{S}_i^{n-1/2} \Delta t, \quad (3.36)$$

donde

$$\bar{u}_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(t^n, x) dx \quad (3.37)$$

es el promedio temporal del vector de variables conservativas,

$$\bar{F}_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} F(u(t, x_{i+1/2})) dt \quad (3.38)$$

el promedio temporal de los flujos, y

$$\bar{S}_i^{n-1/2} = \frac{1}{\Delta t \Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} S dx dt \quad (3.39)$$

el promedio tanto espacial como temporal del vector de fuente.

En particular, se debe poner especial atención al cálculo de los flujos pues, de presentarse discontinuidades en las fronteras de la celda, se tendría entonces que resolver el problema de Riemann en dichas fronteras, que es lo que se tratará a continuación.

### 3.3.2. Problema de Riemann

El problema de Riemann es un problema de valor inicial (PVI) que, dada una ecuación diferencial parcial, presenta una condición inicial discontinua (ver [Toro, 2009, pp. 49-50]). Esto es, para una función  $u = u(x, t)$ , la condición inicial se escribe como:

Problema de Riemann

$$u(x, t) = u_0(x) = \begin{cases} u_L & \text{si } x < 0, \\ u_R & \text{si } x > 0, \end{cases} \quad (3.40)$$

donde  $u_L$  (izquierda) y  $u_R$  (derecha) son dos valores constantes, como lo muestra la Figura (3.6). Es necesario resolver este problema dado que la misma discretización nos lleva a tener casos semejantes en las interceldas para los flujos como se mencionó arriba, y para ello se introducirán los reconstructores de variables que ayudará a definir las condiciones de frontera en las interceldas.

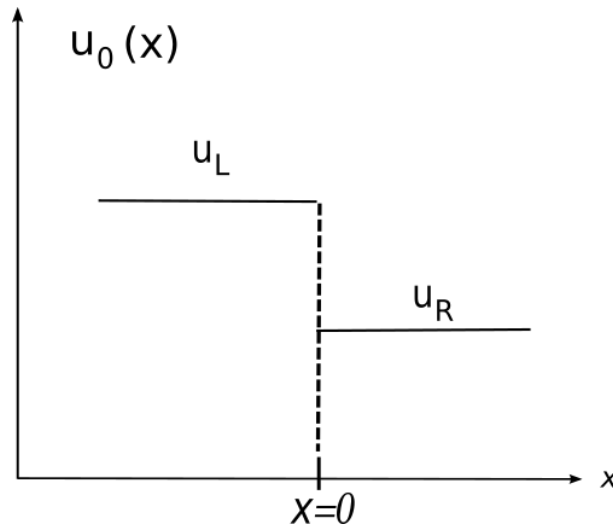
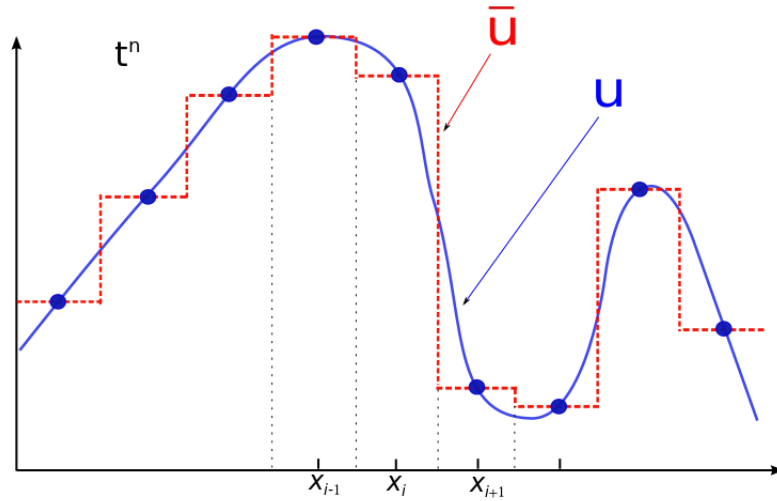


Figura 3.6: Esquema del problema de Riemann (PVI).

### 3.3.3. Reconstrucción de variables en las interceldas

#### Constante por pedazos: Método de Godunov

Anteriormente se vio que el método de volúmenes finitos involucraba promedios espaciales de las variables  $u$ , es decir  $\bar{u}$ , cuyo valor se considera constante en la celda. Para



**Figura 3.7:** Aproximación de la función  $u(x, t)$  por medio de una función constante por pedazos  $\bar{u}(x, t)$  en el método de Godunov.

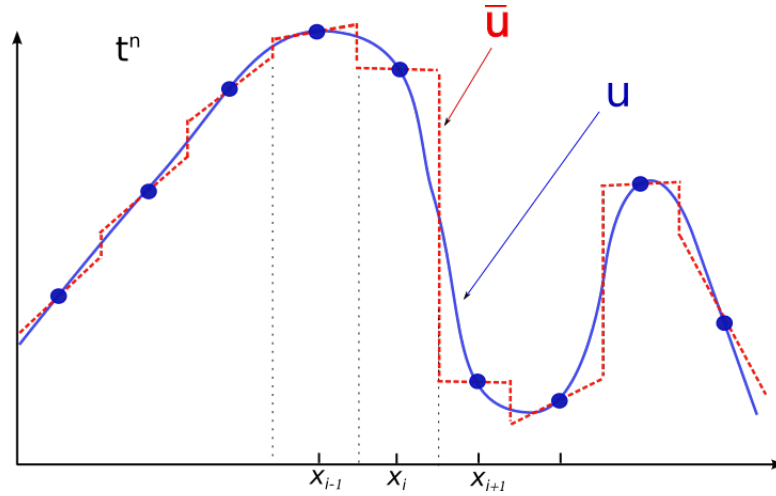
un tiempo fijo, dichos promedios definirán una función constante por pedazos en lo que se conoce como método de Godunov desarrollado por primera vez en [Godunov, 1959] (ver Figura (3.7)), y que a su vez establecerán las condiciones iniciales que definirán el problema de Riemann en las interceldas.

### Lineal por pedazos: minmod

Otra alternativa al método de Godunov para la reconstrucción de funciones son los métodos que aproximan la función real por medio de líneas rectas con cierta pendiente (ver Figura (3.8)) Básicamente cada uno de estos métodos se diferencian entre sí por la forma es que dicha pendiente es escogida. Uno de ellos es el método *minmod* ([Roe, 1986]).

Para aplicar este método se debe contar en primera instancia con los valores de la función  $u$  en los puntos  $x_{i-1}$ ,  $x_i$ ,  $x_{i+1}$  y  $x_{i+2}$ , es decir,  $u_{i-1}$ ,  $u_i$ ,  $u_{i+1}$  y  $u_{i+2}$ . Se calcularán las pendientes de las rectas a la izquierda y a la derecha de, por ejemplo, la interfase en  $x_{i+1/2}$ . Para ésto son necesarias tres pendientes auxiliares  $m_1 = m_{i-1/2}$ ,  $m_2 = m_{i+1/2}$  y  $m_3 = m_{i+3/2}$  como lo muestra la Figura (3.9). La pendiente de la recta centrada en  $x_{i+1/2}$  se define como

$$m_{i+1/2} = \frac{u_{i+1} - u_i}{x_{i+1/2} - x_i}. \quad (3.41)$$



**Figura 3.8:** Aproximación de la función  $u(x, t)$  por medio de una función lineal  $\bar{u}(x, t)$  cuya pendiente es determinada por cada uno de los métodos de este tipo.

De manera semejante se pueden obtener las otras dos pendientes auxiliares. Así, las rectas que aproximan a la función  $u$  a la izquierda y a la derecha de la interfase se escriben como

Aproximación lineal por pedazos

$$\bar{u}_{i+1/2}^L = u_i + \sigma_i(x_{i+1/2} - x_i) \tag{3.42}$$

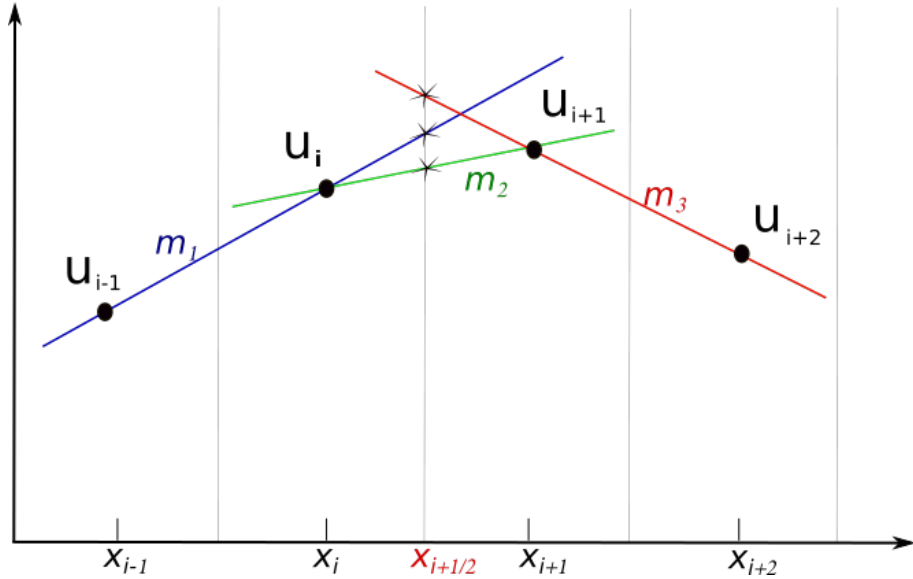
$$\bar{u}_{i+1/2}^R = u_{i+1} + \sigma_{i+1}(x_{i+1/2} - x_{i+1}), \tag{3.43}$$

donde los superíndices  $L$  y  $R$  significan izquierda (*Left*) y derecha (*Right*), y  $\sigma_i = \sigma(m_1, m_2)$  y  $\sigma_{i+1} = \sigma(m_2, m_3)$  se determinan por la función que le da el nombre a este método: la función *minmod*

Función *minmod*

$$\sigma = \text{minmod}(a, b) = \begin{cases} a & \text{si } |a| < |b|, \text{ con } ab > 0, \\ b & \text{si } |a| > |b|, \text{ con } ab > 0, \\ 0 & \text{si } ab < 0. \end{cases} \tag{3.44}$$

Como se puede ver, esta función escoge la pendiente mínima de entre las dos comparadas mientras éstas sean del mismo signo, es decir, cuyo producto sea positivo. Cuando las pendientes son de signo contrario, como el caso de  $m_2$  y  $m_3$  en la Figura (3.9), la función *minmod* asigna una función constante (de pendiente nula) con el valor de la función evaluada en el punto  $x_{i+1}$ .



**Figura 3.9:** Representación de las pendientes auxiliares necesarias para aproximar a la función  $u$  tanto a la izquierda como a la derecha de la interfase en  $x_{i+1/2}$  mediante la función minmod o MC.

### Lineal por pedazos: MC

El otro reconstructor es el llamado *MC* o *Monotonized Central* ([van Leer, 1977]). Como se dijo antes, la diferencia con *minmod* radicar  en la forma en que las pendientes de las rectas son escogidas, sin embargo la información que requiere en cuanto a las pendientes auxiliares es la misma. *MC* tiene la ventaja de que el valor de las pendientes puede ser mayor, con el fin de que la pendiente no se reduzca tan drásticamente. Las rectas que aproximan a la función estarán dadas de igual forma por las ecuaciones (3.42) y (3.43), donde ahora  $\sigma$  se escogerá mediante la función

Función MC	
$\sigma = MC(a, b) = \begin{cases} 2a & \text{si }  a  <  b  \text{ y } 2 a  <  c , \\ 2b & \text{si }  a  >  b  \text{ y } 2 b  <  c , \\ c & \text{si }  c  < 2 a  \text{ y }  c  < 2 b , \\ 0 & \text{si } ab < 0. \end{cases} \quad (3.45)$	

Aquí  $c$  es una pendiente intermedia definida como  $c = (a + b)/2$ , y en particular las pendientes son del doble de la magnitud que en el caso de *minmod*.

Puede consultarse [Cruz-Osorio, 2014] para ver otros reconstructores.

### 3.3.4. Fórmula de flujos aproximada: HLLE

Para abordar lo referente a los flujos numéricos retomaremos algunos de los puntos estudiados en la sección 2.6. En el cálculo de dichos flujos se usan métodos que resuelven el problema de Riemann de manera aproximada, y lo hacen tomando ventaja de la estructura característica de la matriz jacobiana resultante de la linealización de las ecuaciones tipo ley de balance, es decir

$$\partial_t \vec{u} + \partial_x \vec{F}(\vec{u}) = 0 \quad (3.46)$$

$$\partial_t \vec{u} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{u}} \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = 0 \quad (3.47)$$

$$\vec{A}(\vec{u}) = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{u}}, \quad (3.48)$$

donde  $\vec{A}(\vec{u})$  es la matriz jacobiana que en este caso es en la dirección  $x$ . Habrá una matriz jacobiana por cada dirección. Una vez calculada se pueden obtener sus eigenvalores y correspondientes eigenvectores. Los distintos métodos numéricos que resuelven este problema se distinguen entre sí por la información que cada uno requiere de la matriz jacobiana. Para este trabajo se utilizará sólo uno de éstos métodos: *Harten, Lax, van Leer and Einfeldt* o *HLLE* (ver [Einfeldt, 1988] y [Harten et al., 1997]).

Este método resulta ventajoso en el sentido de que sólo necesita los eigenvalores de la matriz jacobiana. Como se vio en 2.6 dichos eigenvalores representan velocidades de propagación de la onda. Pues bien, este método hace uso de las velocidades más rápidas tanto a la izquierda como a la derecha de la interfase (ver Figura (3.10)). Para hacerlo compara todos los eigenvalores, es decir

$$\lambda^+ = \max(0, \lambda_i^L, \lambda_i^R), \quad \lambda^- = \min(0, \lambda_i^L, \lambda_i^R), \quad (3.49)$$

donde  $\lambda_i$  son todos los eigenvalores de la matriz, y en el caso general  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ .

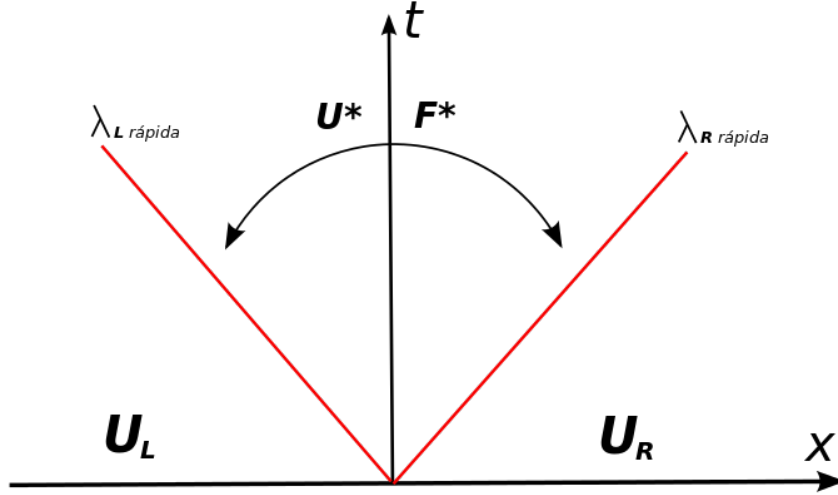
Por su parte los flujos numéricos se calculan mediante la siguiente fórmula

#### Fórmula de flujos HLLE

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^{HLLE} = \frac{\lambda^+ \mathbf{f}(\mathbf{u}_{i+1/2}^L) - \lambda^- \mathbf{f}(\mathbf{u}_{i+1/2}^R) + \lambda^+ \lambda^- (\mathbf{q}_{i+1/2}^R - \mathbf{u}_{i+1/2}^L)}{\lambda^+ - \lambda^-}, \quad (3.50)$$

### 3.4 CAFE: RMHD

con  $\mathbf{f}(\mathbf{u}_{i+1/2}^{L,R})$  los flujos numéricos en términos de las variables a izquierda y derecha de la interfase.



**Figura 3.10:** Esquema que representa a las dos velocidades de mayor magnitud de las ondas que viajan una a la derecha y otra a la izquierda de la interfase, y que son ocupadas en el método HLL. A la izquierda y derecha de ambos eigenvalores se tienen respectivamente los valores de las variables  $\tilde{u}$  dados previamente por el reconstructor de variables.

### 3.4. CAFE: RMHD

En ésta sección se describirán brevemente cuatro versiones del código CAFE, finalizando con un resumen de la versión utilizada para este trabajo.

- [Lora-Clavijo et al., 2015] Resuelve la Magnetohidrodinámica ideal relativista en 3D descrita por la conjunción de las ecuaciones de Einstein-Euler-Maxwell mediante la implementación de los métodos de Captura de Choques de Alta Resolución o *High Resolution Shock Capturing* (HRSC) para una combinación que utiliza la fórmula de flujos HLLÉ y reconstructores lineales PPM y de quinto orden WENO, mientras que la integración en el tiempo usa el método de líneas con un integrador Runge-Kutta TVD de tercer orden. Además utiliza métodos de limpieza de divergencias para controlar la divergencia de la constricción de campo magnético libre. Las pruebas con el código incluyen también el problema de Riemann en 1D y 2D para simular



ondas de choque, colisión frontal de corrientes, con o sin campo magnético, alineado o transversal, constante o discontinuo en las condiciones iniciales.

- [Cruz-Osorio et al., 2012] Resuelve la hidrodinámica relativista en simetría ecuatorial 2D con un espacio-tiempo fijo de Kerr usando la aproximación de volúmenes finitos al igual que los métodos de HRSC. Implementa también el resolvidor aproximado del problema de Riemann HLLE con un reconstructor lineal por pedazos minmod. La integración en el tiempo utiliza el método de líneas con un integrador Runge-Kutta TVD de segundo orden. En la referencia se utilizó para modelar una distribución de gas uniformemente distribuido que evoluciona alrededor de un cuerpo compacto central (un agujero negro en éste caso), y en presencia del fenómeno de inestabilidad *flip-flop*, producido si el agujero negro rota y provoca una oscilación en el cono de choque cuando el gas es supersónico.
- [Lora-Clavijo and Guzmán, 2013] Esta versión estudia y resuelve el mismo problema que el último, haciendo uso de la mismas herramientas numéricas, pero a diferencia del caso anterior posee simetría esférica axial en un espacio-tiempo fijo de Schwarzschild.
- [Lora-Clavijo et al., 2013] Resuelve las ecuaciones de Einstein-Euler en un espacio-tiempo dinámico 1D con simetría esférica para un gas ideal ultrarelativista con una ecuación de estado  $p = \rho/3$ , con el fin de modelar la acreción radial de la radiación en Hoyos Negros Primordiales (durante la era leptónica de  $t \sim 10^{-4}s$  a  $t \sim 10^2s$ ). El lado derecho de las ecuaciones de evolución de la geometría son discretizadas usando una aproximación de diferencias finitas de cuarto orden, mientras que las ecuaciones de Euler se discretizan bajo un esquema de volúmenes finitos con los métodos HRSC, la fórmula de flujos HLLE y un reconstructor minmod.
- *CAFE 1D TOV*. Esta es la versión que se ocupó para este trabajo y se describe a continuación.

En general, el código CAFE puede resumirse en el diagrama de flujo de la Figura (3.11). Comenzando con los parámetros de entrada, en la Figura (3.12) se presenta una captura como ejemplo de los datos que son introducidos previo a correr el código junto con una breve descripción. Hay que notar que para el caso presentado en la Figura (3.12) no se está

# Código CAFE

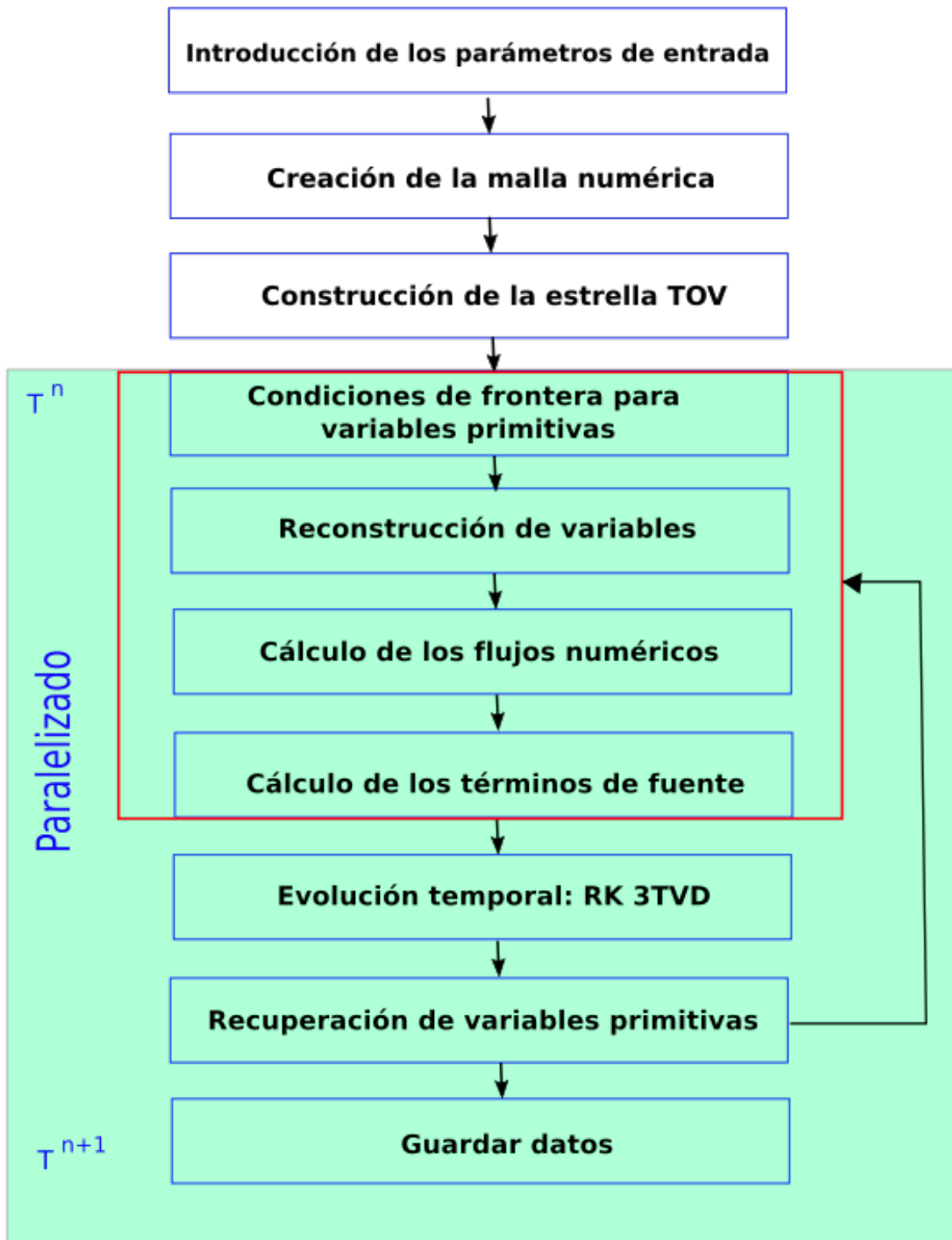


Figura 3.11: Diagrama de flujo del código CAFE

evolucionando en el tiempo ( $Ntt = 0$ ), por lo que este *input* es sólo para el dato inicial. Sin embargo, análisis de colapso, migración o estudio de la convergencia del código, sí requiere una evolución temporal ( $Ntt > 0$ ). Algo que también es importante resaltar es el factor de Courant, que nos relaciona los pasos en el tiempo con los pasos en el espacio de la siguiente manera

$$dt = cdr, \quad (3.51)$$

donde  $c$  es el factor de Courant.

```

&TOV_Input
res_num = 1 ----- Resolución
g_pts = 0 ----- Ghost points
nvars = 3 ----- Número de variables conservativas
rmin = 0.0 ----- | Dominio en la
rmax = 30.0 ----- | coordenada r
Nrr = 200000 ----- Número de pasos en el espacio
Ntt = 0 ----- Número de pasos en el tiempo
courant = 0.25 ----- Factor de Courant (c=dt/dr)
r0 = 500.0 ----- Radio inicial
every_0Dt = 1 ----- Guardado de datos en el tiempo
every_1Dt = 200 ----- Guardado de datos en el espacio
gamma = 2 ! 1.33333, 2.0, 1.66666666667-- Índice politrópico
kappa = 100 ----- Constante politrópica
den_c = 0.0025 ----- Densidad central
den_f = 0.1 ----- Densidad final
rho_atm = 1.e-5 ----- Atmósfera
Limiter = 'mm' ! mm, mc ----- Reconstructores
Riemann = 'hlle' ! hlle ----- Fórmula de flujos

```

**Figura 3.12:** Parámetros de entrada del código

La malla numérica que representa al espacio-tiempo es creada, para el espacio, dividiendo el dominio  $r \in [r_{max} - r_{min}]$  entre el número de particiones deseada ( $Nrr$ ), mientras que los pasos en el tiempo se obtienen con ayuda del factor de Courant como se expresa arriba.

A continuación se genera el dato inicial ( $t = 0$ ) para la estrella obteniendo la masa, la densidad, la presión,  $\alpha$  y  $a$  con ayuda del método de integración Runge-Kutta de cuarto orden (3.20). En general, obtenemos todas las variables primitivas en los puntos centrales de las celdas de la malla para después aplicar condiciones de frontera sobre ellas. Esto nos permitirá definir un problema de Riemann (3.40) en las interceldas para después utilizar algunos de los reconstructores de variables, ya sea minmod (3.44), mc (3.45) o de Godunov.

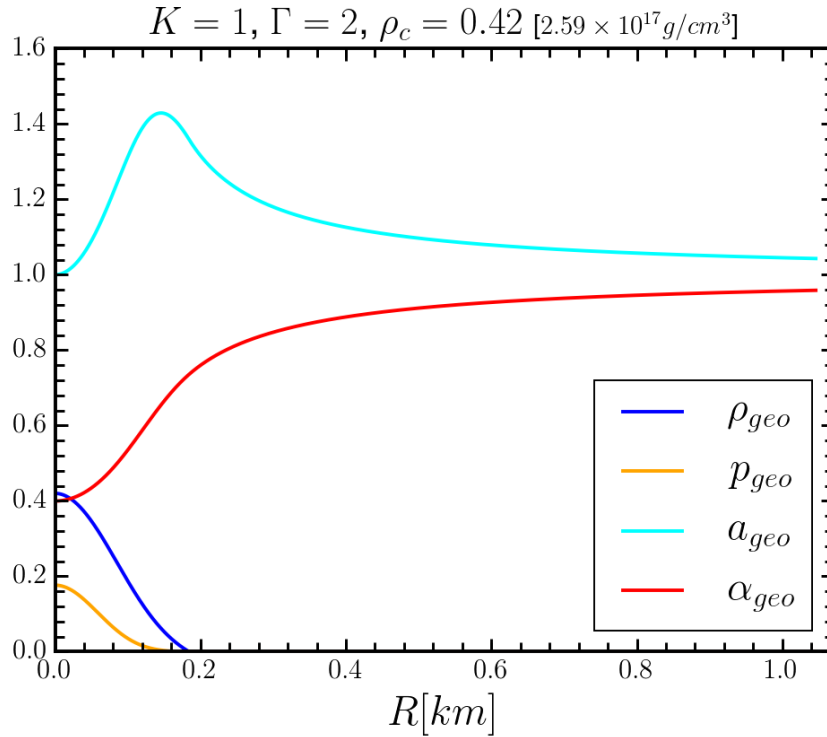
En lo que respecta a la hidrodinámica, se ocupa el método Runge-Kutta TVD de tercer orden (3.27) para resolver la ecuaciones (2.3), construyendo primeramente las variables

### 3.5 Pruebas del código

conservativas y calculando los flujos (3.50) con ayuda de los eigenvalores provenientes de la descomposición espectral. Todo esto a partir de los métodos HRSC. Posteriormente se encuentran los términos de fuente, y con toda la información previa se calculan las variables conservativas en el paso de tiempo siguiente con ayuda de la ecuación de evolución (3.36).

Posteriormente se recuperan las variables primitivas con el método de Newton-Raphson para finalizar con el guardado de datos en el nuevo paso de tiempo. Con las variables primitivas a la mano se puede reiniciar el proceso de evolución.

### 3.5. Pruebas del código

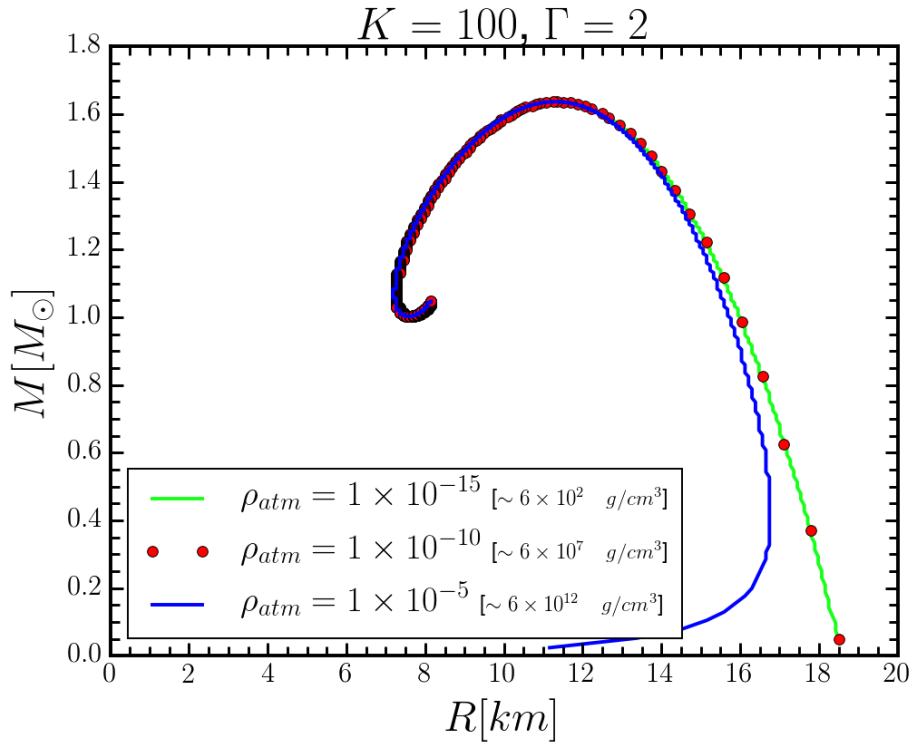


**Figura 3.13:** Variación de la densidad de masa en reposo  $\rho_0$ , la presión  $P$  y los parámetros definidos  $\alpha$  y  $a$  con respecto al radio de la estrella en kilómetros (Modelo NS 1 de la Tabla 4.1).

#### Perfiles para el dato inicial

Para comenzar con la sección de pruebas del código se obtuvo el dato inicial, es decir,

sin evolución temporal, para la configuración de una *TOV star* reportada en [Guzman et al., 2012] (Modelo NS 1, Tabla 4.1) con  $\Gamma = 2$ ,  $K = 1$  y una densidad central  $\rho_c = 0,42$  (unidades geométricas). En la Figura (3.13) se muestran los perfiles para la presión, la densidad, los parámetros  $\alpha$  y  $a$  en función del radio en kilómetros. Tanto para la densidad como para la presión se espera que su valor máximo se alcance en el centro de la estrella como se obtiene en la figura. Mientras que  $\alpha$  y  $a$  tienden a uno para un espacio-tiempo asintóticamente plano a medida que nos alejamos de la estrella como se espera para la solución de Schwarzschild donde  $\alpha(r_{max}) = 1/a(r_{max})$ .



**Figura 3.14:** Compacticidad de la estrella para distintos valores de la atmósfera ( $\rho_{floor}$ ).

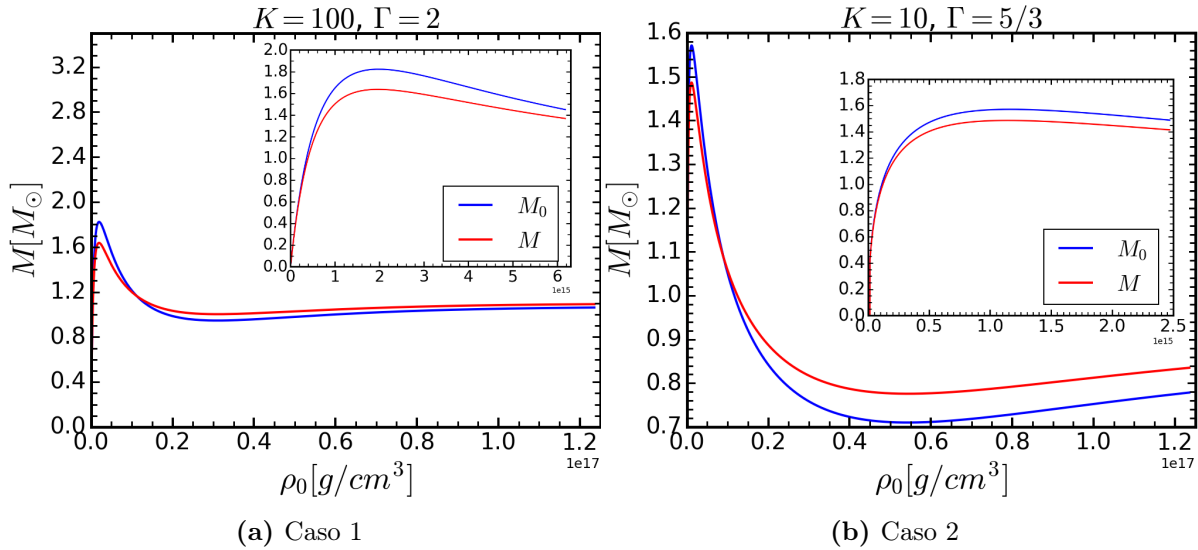
### Atmósfera

Algo que es importante mencionar a esta altura es la atmósfera de la estrella de neutrones. En realidad, una estrella de neutrones carece de una atmósfera y técnicamente se considera que fuera de la estrella se tiene vacío, lo que implicaría un valor de cero para la densidad y la presión cuando  $r$  sea igual al radio de la estrella. Sin embargo, numéricamente hablando, un cero en una computadora depende de la precisión de esta, es decir,

### 3.5 Pruebas del código

del número de dígitos decimales disponibles, pudiendo llegar hasta 38. En resumen, el cero numérico no tiene valor cero, por lo que se debe establecer un valor mínimo de la densidad a partir del cual se considere que nos encontramos fuera de la estrella. A este valor es al que nos referiremos como la atmósfera de la estrella y que se menciona en la Figura (3.13), siendo una herramienta puramente numérica.

Por otro lado, algunas simulaciones requieren manipular el valor de la atmósfera por motivos numéricos, pero debido a que no se refiere a una cantidad física se esperaría que un cambio en su valor no repercutiera en los resultados. Por este motivo se presenta la Figura (3.14), en la que se ha graficado el radio de la estrella en kilómetros contra la masa total para diferentes valores de la atmósfera en el caso de  $\Gamma = 2$ ,  $K = 100$ . Si bien las curvas son diferentes al inicio, el máximo de la masa, punto de vital importancia que caracterizará a una configuración, no se ve afectado.



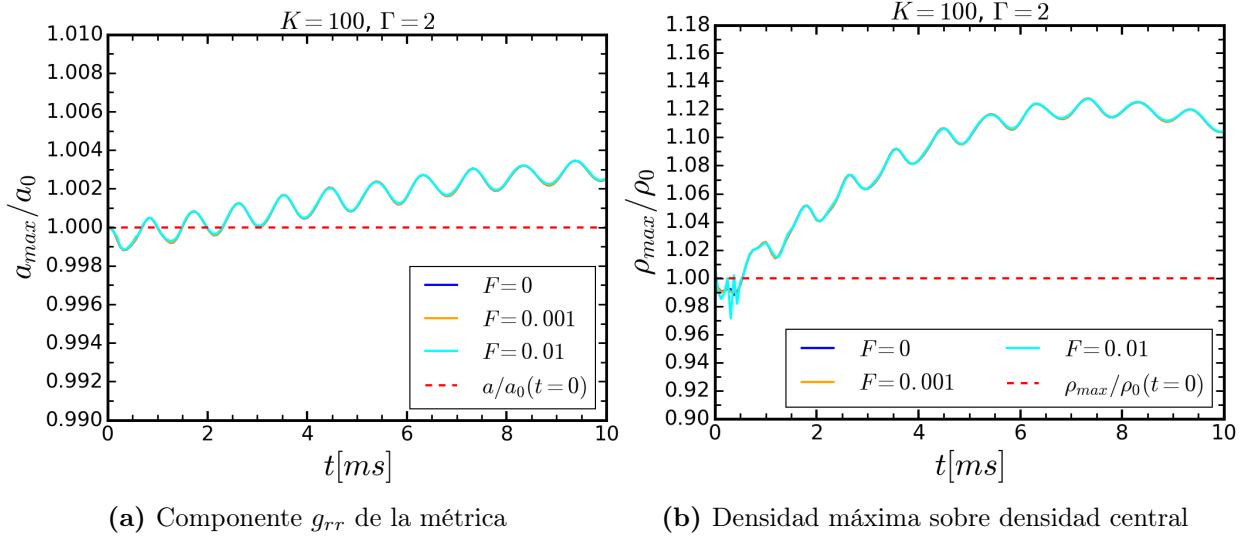
**Figura 3.15:** Densidad central de la estrella en  $g/cm^3$  contra la masa total y masa en reposo en unidades de masas solares para dos casos de  $\Gamma$  y  $K$ . La gráfica al interior es un acercamiento para los valores más pequeños de la densidad. Las corridas se hicieron con una resolución espacial  $\Delta r = 0,06$  (88,59m) en un dominio  $r \in [0, 30]$  (0 – 44,29km) y un valor de la atmósfera de  $1 \times 10^{-13}$  ( $61771,4g/cm^3$ ), ambos en unidades geométricas.

### Masa y densidad

Para la siguiente prueba de igual forma reportada en [Guzman et al., 2012] (Modelos

NS 2A y NS 2B, Tabla 4.1) se generaron diferentes configuraciones iniciales en función de la densidad central pero manteniendo la misma  $\Gamma$  y  $K$ , analizando los casos  $\Gamma = 2$ ,  $K = 100$  (Figura (3.15a)) y  $\Gamma = 5/3$ ,  $K = 10$  (Figura (3.15b)). La densidad está en unidades de  $g/cm^3$ , alcanzando órdenes de  $10^{17}$  comparable con la densidad del núcleo atómico. Se puede apreciar que existen dos posibles valores de la densidad dado un valor ya sea de la masa total o de la masa en reposo. De [Guzman et al., 2012] se sabe también que el máximo de las curvas en las gráficas de la Figura (3.15) representa un punto crítico tal que las configuraciones (puntos) que se encuentren a la izquierda del máximo son estables, y las que se encuentran a la derecha, inestables. En esta gráfica se pueden estudiar, como se verá más adelante, los puntos sobre la curva que generan configuraciones estables y de colapso para la estrella, así como estudiar los casos de migración, es decir, aquellas configuraciones que migran a otro punto de la curva [Baiotti et al., 2005].

Las siguientes pruebas se centrarán en la convergencia y estabilidad del código con el fin de garantizar la confiabilidad de los resultados.



**Figura 3.16:** Oscilación del máximo de  $a/a_0$  y para una configuración estable de la estrella con  $\Gamma = 2$ ,  $K = 100$  y  $\rho_c = 0,001$  tras agregar a mano una perturbación a la densidad de la forma  $\rho = \rho + F\rho_c \cos(5r)$  y estudiando tres valores para la amplitud de la perturbación  $F$ . La línea roja punteada marca el valor de  $a$  y  $\rho$  al tiempo cero y se puede ver que dadas las tres perturbaciones,  $a$  y  $\rho$  oscilan satisfactoriamente alrededor de este dato inicial en un tiempo de 10 milisegundos considerado el tiempo suficiente para verificar la estabilidad de la estrella. Las corridas se hicieron con una resolución espacial  $\Delta r = 0,025$  (36,91m) en un dominio  $r \in [0, 500]$  (0 – 738,255km) y un valor de la atmósfera de  $1 \times 10^{-13}$  (61771,4g/cm<sup>3</sup>), en unidades geométricas.

### Estabilidad, consistencia y convergencia

Para analizar la estabilidad del código se agregó a mano una perturbación en la densidad de la estrella para después evolucionarla en el tiempo. Cabe mencionar que no hay una forma específica para la perturbación, y que para este trabajo se ha escogido una de la forma  $\rho = \rho + F\rho_c \cos(5r)$ , donde  $F$  es la amplitud de la perturbación,  $\rho_c$  la densidad central y  $r$  el radio. Las variables monitoreadas en la evolución fueron la componente  $g_{rr}$  de la métrica,  $a$ , y la densidad máxima en cada paso de tiempo,  $\rho_{max}$ , tomando tres valores para la amplitud de 0 (sin perturbar), 0,001 y 0,01. Los resultados se pueden ver en la Figura (3.16). La línea roja punteada representa el valor de ambas variables al tiempo  $t = 0$ , y con el paso del tiempo deberían mantenerse oscilando alrededor de ese valor si la configuración es estable. Se considera que el tiempo de evolución suficiente para verificar la estabilidad de la estrella es de 10 ms, es decir, no debe colapsar durante ese periodo de tiempo. La justificación para esto tomará más fuerza cuando se aborden los casos de colapso más adelante. Se puede apreciar que los tres valores de la amplitud en la perturbación no modifican apreciablemente el perfil de evolución, y que se mantiene, al menos en el tiempo mostrado, oscilando satisfactoriamente cerca del valor inicial. En cuanto a la consistencia, se verá el comportamiento de la constricción hamiltoniana expresada en la sección 2.3 donde

$$\mathcal{H} = \partial_r a - a^3 \left[ 4\pi r (\tau + D) + \frac{m}{r^2} \right] = 0.$$

En la Figura (3.17a) se graficó el comportamiento de la constricción hamiltoniana para corridas con tres diferentes resoluciones donde *res1* es la más baja resolución y *res3* la más alta. Aquí  $\mathcal{H}_{L_1}$  es la norma 1

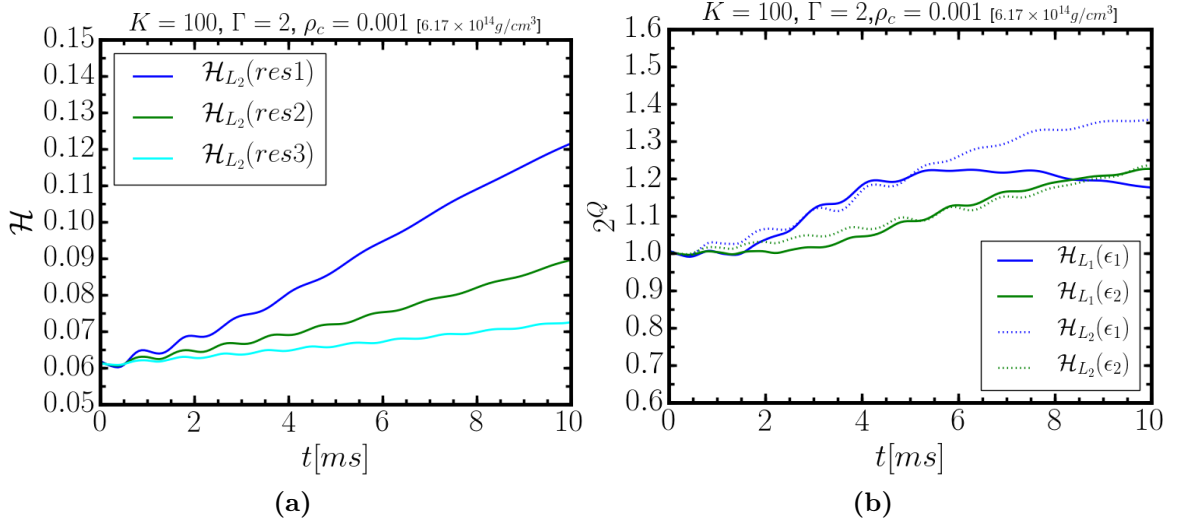
$$\mathcal{H}_{L_1} = \int_a^b |\mathcal{H}| dr, \quad (3.52)$$

y  $\mathcal{H}_{L_2}$  es la norma 2 dada por

$$\mathcal{H}_{L_2} = \sqrt{\int_a^b |\mathcal{H}|^2 dr}. \quad (3.53)$$

En principio, de la expresión para la hamiltoniana se esperaría que las gráficas iniciaran





**Figura 3.17:** Evolución en el tiempo de la constricción hamiltoniana para una configuración estable con  $\Gamma = 2$ ,  $K = 100$  y  $\rho_c = 0,1$  y para tres resoluciones distintas. En (a) se muestran la norma 2, apreciando que a mayor resolución la curva tiende a ser constante partiendo de un cierto valor inicial. En (c) se gráfica el factor de convergencia para la constricción hamiltoniana donde  $\epsilon_1 = f_1/f_2$  y  $\epsilon_2 = f_2/f_3$ , con  $f_1$ ,  $f_2$  y  $f_3$  la soluciones para las resoluciones 1, 2 y 3 respectivamente.

desde cero y se mantuvieran constantes para ambas normas, sin embargo no hay que perder de vista que, aunque las cantidades utilizadas tengan expresiones exactas, están construidas numéricamente desde el dato inicial, lo que significa que de alguna manera se está trabajando con aproximaciones propiciando que partan de un valor distinto de cero. Para fines concretos se espera que al menos la constricción hamiltoniana se mantenga constante en el tiempo, es decir, estable. Se puede ver en 3.17a que el incremento disminuye a medida que aumentamos la resolución, es decir, hacemos más pequeño el  $\Delta r$ . Por otro lado, a medida que aumentemos la resolución aumenta también el costo computacional, principal razón por la que no se siguió aumentando la resolución en este trabajo.

La consistencia está estrechamente relacionada con la resolución, y es que en teoría, a medida que aumentamos la resolución, la solución debería converger a la solución en el continuo, es decir, a la solución exacta.

Finalmente, para establecer un criterio de convergencia se necesita de al menos dos resoluciones, digamos  $\Delta r$  y una segunda resolución  $\Delta r_\kappa = \Delta r/\kappa$ , de tal forma que se obtiene

$$\frac{\text{error}_1}{\text{error}_\kappa} = \kappa^Q. \quad (3.54)$$

### 3.5 Pruebas del código

---

Si, por ejemplo,  $Q = 2$ , indica que la solución discretizada se aproxima a la solución continua de manera cuadrática a medida que aumentamos la resolución, y eso tiene que ver con que se están ocupando métodos de aproximación con errores de segundo orden. Un ejemplo de  $Q = 2$  es al resolver la ecuación de onda (ver [Guzmán, 2010]), sin embargo, éste valor  $2^2 = 4$ , es característico para ecuaciones diferenciales parciales lineales, siendo que para nuestro caso se tienen ecuaciones diferenciales parciales consideradas como altamente no lineales.

De manera general, si se conocen las funciones aproximadas  $f_1$  y  $f_2$  para las resoluciones 1 y 2 respectivamente, y además se sabe la solución exacta  $f_0$ , entonces se tiene que

$$\frac{f_1 - f_0}{f_2 - f_0} = \kappa^Q, \quad (3.55)$$

donde  $\kappa^Q$  se conoce como factor de convergencia. Para este trabajo se ha utilizado  $\kappa = 2$ , es decir, el factor de convergencia será  $2^Q$ .

Para verificar la convergencia del código, en la Figura (3.17b) se ha graficado el factor de convergencia para la restricción hamiltoniana, donde de (2.57) se tiene que la solución exacta es  $f_0 = 0$ , y se ha definido

$$\epsilon_1 = 2^{Q_1} = \frac{f_1}{f_2}, \quad \epsilon_2 = 2^{Q_2} = \frac{f_2}{f_3}. \quad (3.56)$$

De la literatura se sabe que el factor de convergencia para la hidrodinámica relativista se encuentra entre 1 y 2, por lo que se puede decir que nuestro código recrea los resultados presentados en estudios anteriores.

Para las pruebas de estabilidad, consistencia y convergencia se usó el Modelo NS 6 de la Tabla 4.1

## Simulaciones numéricas de estrellas de neutrones

Siguiendo con la motivación para este trabajo, no se tienen hasta ahora constricciones en cuanto a los valores que puede tomar el índice politrópico  $\Gamma$  ni la constante politrópica  $K$  para la construcción de una estrella de neutrones. Es por eso que en este capítulo se presenta un barrido sobre estos parámetros con valores de  $\Gamma$  que se suelen tomar en la literatura y ampliando el panorama con la propuesta de nuevos valores. También se mencionarán los casos estudiados de migración, en los que una configuración que en principio es inestable (colapsa) migra a una configuración estable, lo que sugiere la existencia de soluciones atractoras. Conforme se aborde cada uno de los resultados se detallará a la par la metodología seguida.

### 4.1. Estrellas de neutrones con ecuación de estado politrópica

Antes de exponer los resultados, en la Tabla 4.1 se resumen todos los modelos analizados en este trabajo, los cuales fueron ocupados para el estudio del dato inicial, es decir, la construcción de la estrella, así como para los casos de colapso y migración, sin dejar de lado las pruebas referentes a la consistencia, la estabilidad y la convergencia del código. Varios de estos modelos fueron usados en el capítulo anterior durante las pruebas del código.

MODELOS DE ESTRELLAS DE NEUTRONES

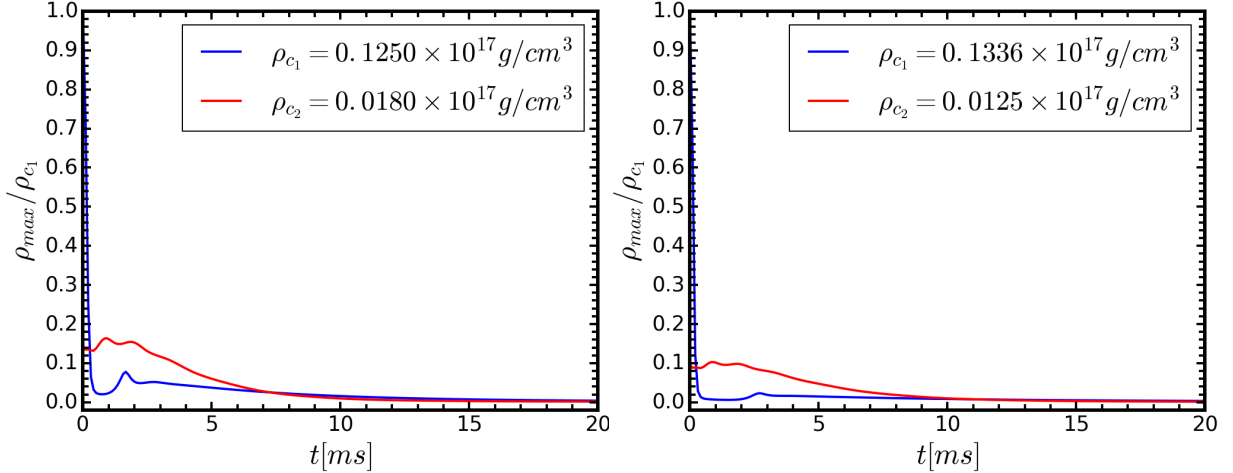
Modelo	$\Gamma$	$K$	$\rho_c$	$\rho_f$	Nrr	dr	$r_{max}$	courant	$\rho_{atm}$
NS 1	2	1	0.42	—	600000	6.66e-6	4	0.9	1e-13
NS 2A	2	100	múltiples	0.01	500	0.06	30	0.25	1e-13
NS 2B	5/3	10	múltiples	0.2	500	0.06	30	0.25	1e-13
NS 3A	2	variable	múltiples	0.1	500	0.06	30	0.25	1e-10
NS 3B	4/3	variable	múltiples	0.01	500	0.06	30	0.25	1e-5
NS 3C	5/3	variable	múltiples	0.1	500	0.06	30	0.25	1e-10
NS 3D	2.75	variable	múltiples	0.1	500	0.06	30	0.25	1e-5
NS 3E	1.1	variable	múltiples	0.01	5000	0.006	30	0.25	1e-5
NS 3F	5	variable	múltiples	0.1	5000	0.006	30	0.25	1e-5
NS 4A	2	100	0.0032	—	1024	0.048	50	0.25	1e-8
NS 4B	5/3	10	0.0025	—	500	0.06	30	0.25	1e-13
NS 5A	2	100	0.009 y 0.0013	—	300000	0.01	500	0.2	1e-13
NS 5B	2	100	0.00104 y 0.01104	—	300000	0.01	500	0.2	1e-13
NS 6	2	100	0.001	—	5000	0.025	500	0.25	1e-13

**Cuadro 4.1:** Valores de entrada en el input del código para cada uno de los modelos estudiados. La notación NS viene de Neutron Star seguido de un número que hace referencia al estudio para el que se ocupó el modelo: 1 perfiles para el dato inicial, 2 masa y densidad, 3 dato inicial, 4 colapso, 5 migración y 6 estabilidad y convergencia. La letra final da cuenta de un caso particular en cada estudio.  $\Gamma$  es el índice politrópico,  $K$  la constante politrópica,  $r_{max}$  el radio máximo y el factor courant se define como en (3.51). La densidad central ( $\rho_c$ ), densidad final ( $\rho_f$ ) y el valor de la atmósfera ( $\rho_{atm}$ ) están dados en unidades geométricas.

### 4.1.1. Migración

En [Baiotti et al., 2005] se analiza el caso de la migración de una configuración a otra, es decir, cuando un punto en la gráfica de la Figura (3.15) se mueve a otro. En la referencia la migración se da para configuraciones con el mismo valor de la masa y diferentes densidades, siendo la dirección de la migración de la configuración con mayor densidad central a la que posee una menor densidad. Por ésto, se tomaron cuatro configuraciones distintas a la ocupada en la referencia, dos para cada una de las masas estudiadas y se graficó la evolución de la densidad normalizada (ver Figura (4.1)). Se puede ver que la configuración para la densidad central en color azul decrece bruscamente para migrar a la configuración

con la densidad central en color rojo siendo que al final ambas curvas se unen.



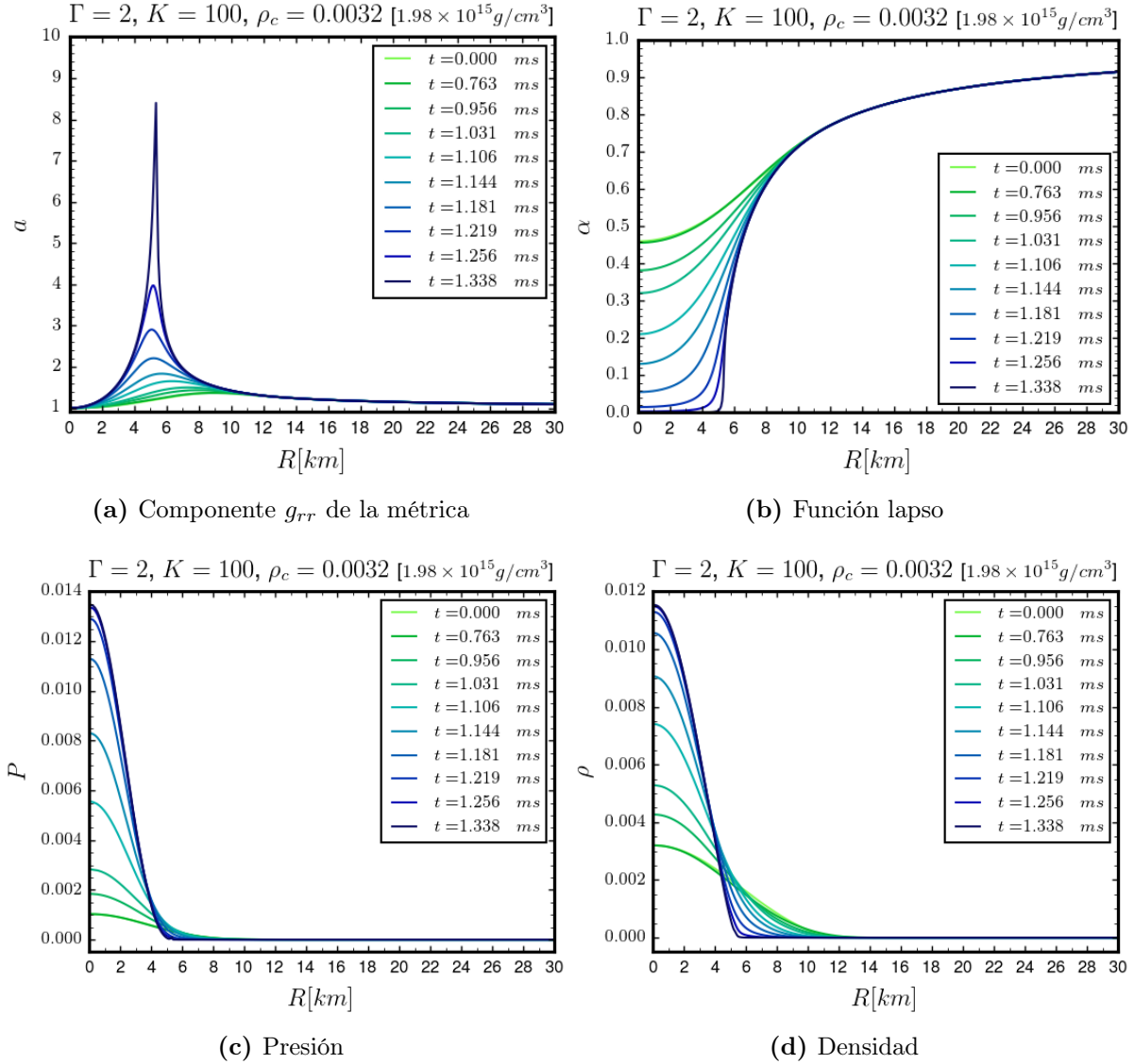
**Figura 4.1:** Casos de migración para dos casos con un tiempo de corrida de 20 milisegundos y con valores de  $\Gamma = 2$  y  $K = 100$ . Para las corridas se utilizaron los modelos NS 5A Y NS 5B de la Tabla 4.1.

En contraste con la figura presentada en [Baiotti et al., 2005], en la cual se aprecia un mayor número de oscilaciones antes de que una configuración migre por completo a otra, en la Figura (4.1) la migración ocurre más rápidamente debido al uso de reconstructores de variables altamente disipativos, es decir, que eliminan oscilaciones ya que aproximan funciones continuas por funciones más sencillas ya sea constante por pedazos (método de Godunov) o lineal por pedazos (minmod o MC).

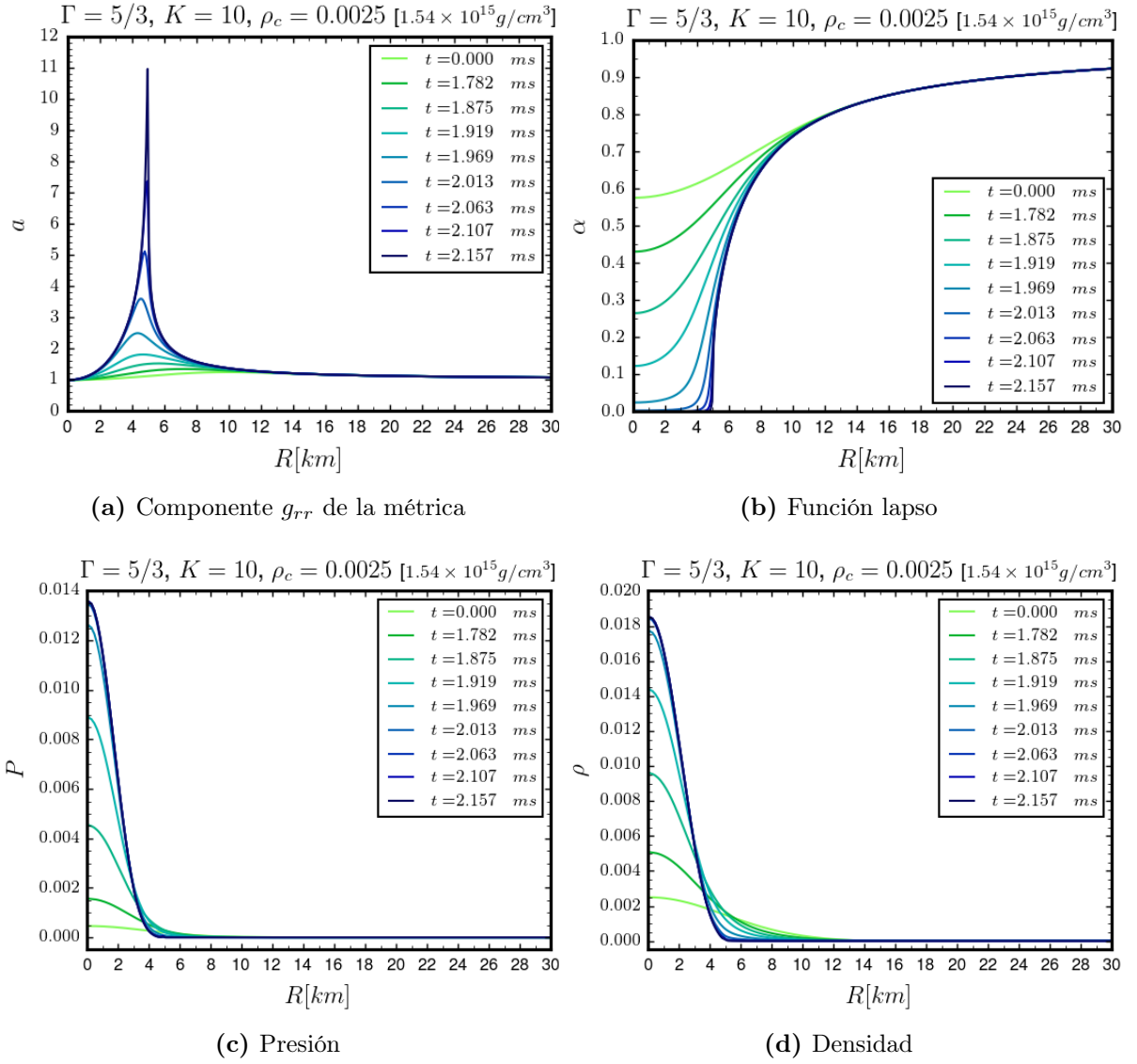
#### 4.1.2. Configuraciones de colapso

Para estudiar el colapso de una estrella de neutrones debido a que la presión de degeneración de las partículas constituyentes no es capaz de equilibrar a la acción de la gravedad dada su misma masa, se tomaron dos casos de configuraciones inestables que colapsan a un agujero negro de Schwarzschild, una de las cuales es reportada en [Guzman et al., 2012]. Dichas configuraciones son para  $\Gamma = 2$ ,  $k = 100$ ,  $\rho_0 = 0,0032(1,98 \times 10^{15}g/cm^3)^3$  en la Figura (4.2) y  $\Gamma = 5/3$ ,  $k = 10$ ,  $\rho_0 = 0,0025(1,54 \times 10^{15}g/cm^3)^3$  en la Figura (4.3a). Para cada caso se graficó la evolución temporal de los parámetros  $\alpha$ ,  $a$ , la presión y la densidad, donde cada curva en las gráficas representa el perfil en cada paso de tiempo, observando un comportamiento similar en ambos casos.

#### 4.1 Estrellas de neutrones con ecuación de estado politrópica



**Figura 4.2:** Evolución temporal de las variables  $a$ ,  $\alpha$ ,  $P$  y  $\rho$  en una configuración de colapso a un agujero negro de Schwarzschild para una estrella con  $\Gamma = 2$ ,  $k = 100$  y  $\rho_0 = 0,0032$ , graficada en función del radio en unidades de masas solares para cada paso de tiempo. En las corridas se usó el modelo NS 4A de la Tabla 4.1.



**Figura 4.3:** Evolución temporal de las variables  $a$ ,  $\alpha$ ,  $P$  y  $\rho$  en una configuración de colapso a un agujero negro de Schwarzschild para una estrella con  $\Gamma = 5/3$ ,  $k = 10$  y  $\rho_0 = 0,0025$ , graficada en función del radio en unidades de masas solares para cada paso de tiempo. En las corridas se usó el modelo NS 4B de la Tabla 4.1.

## 4.1 Estrellas de neutrones con ecuación de estado politrópica

---

De la sección 2.2.2 se sabe que la función lapso,  $\alpha$ , representa la separación entre hipersuperficies y ante la presencia de cuerpos muy masivos estas hipersuperficies se compactan, de tal manera que  $\alpha$  tiende a cero, tal como se muestra en las gráficas de las Figuras (4.2b) y 4.3b. A medida que corre el tiempo de evolución,  $\alpha$  llega a ser cero en un punto específico de la coordenada radial indicando la aparición de un horizonte de eventos para un agujero negro de Schwarzschild. Como efecto del mismo fenómeno, la componente  $g_{rr}$  de la métrica,  $g_{rr} = a^2$ , diverge en el mismo punto de colapso de  $\alpha$ , siendo el máximo el equivalente a nuestro infinito numérico. Por su parte, se puede observar que tanto la presión como la densidad se incrementan rápidamente para  $r = 0$ , indicando la presencia de la singularidad. Los valores de la densidad y presión que se obtienen en las gráficas al momento del colapso no están relacionados con la presión y densidad del agujero negro, simplemente es para nosotros una prueba numérica de que estas cantidades se comportan correctamente durante el colapso, y es que después del colapso se desconoce el comportamiento de la materia dentro del horizonte de eventos.

Cabe mencionar que el colapso se da en cuestión de milisegundos, sin exceder incluso los 3 ms. Es por ésto que en el estudio de la estabilidad de la estrella en la sección 3.5 se considera suficiente simular únicamente los primeros 10 milisegundos de evolución para corroborar que una configuración es estable.

### 4.1.3. Barrido de parámetros en la ecuación de estado politrópica

Llegando a la parte central de este trabajo, se presenta a continuación el barrido de parámetros para el índice politrópico  $\Gamma$  y la constante politrópica  $K$ , construyendo únicamente el dato inicial con cada configuración. Se tomaron en total 6 valores para gamma:  $\Gamma = 1, 10, 4/3, 5/3, 2, 00, 2, 75, 5, 00$ ; y se probaron entre 12 y 19 valores de  $K$  para cada uno de los valores de  $\Gamma$ . Los valores del índice politrópico fueron seleccionados con base en casos estudiados en la literatura, mientras que los valores de la constante politrópica se escogieron de tal forma que en el dato inicial se obtuviera una estrella con una masa y un radio dentro de un rango de valores aceptables que incluyera los valores típicos para estos parámetros.

Para cada valor de  $\Gamma$  se graficaron la compacticidad, es decir, el radio contra la masa total, y la densidad contra la masa total, ambos casos se presentan en las Figuras (4.4) a



4.10. En lo que se refiere a la gráfica de la compacticidad, se presentan en distintos colores las curvas correspondientes a cada valor de  $K$ , haciendo notar que es el máximo de cada curva el valor que se toma como referencia para cada caso. El recuadro gris en cada una de las gráficas representa los valores aceptables tanto para el radio como para la masa, tomando un rango para la masa de 1 a  $2 M_{\odot}$  con base a la Figura (1.4), mientras que para el radio se maneja un intervalo de 10 a 15 km según... Por su parte, el recuadro azul claro es una extensión de los valores permitidos de  $K$  que arrojan masas dentro del rango mencionado anteriormente, aunque no sea el caso en el radio. Para algunos valores en particular, como  $\Gamma = 2,75$  (Figura (4.8)), se agregó un recuadro en color rojo para señalar un rango en el que se encuentra una configuración de  $\Gamma$  y  $K$  citada en alguna referencia, y que está representada por una línea punteada. Dicha referencia puede ser consultada en la leyenda de la figura correspondiente. Hay que mencionar también que para algunos valores del índice politrópico, como  $\Gamma = 4/3$  (Figura (4.6) y Figura (4.7)), se encontraron dos rangos de valores separados entre ellos que arrojan masas que van de 1 a  $2 M_{\odot}$ , por lo que cada rango aparece en gráficas separadas. Se puede notar que uno de los rangos tiene un comportamiento creciente en los máximos mientras que el otro es decreciente. En lo que respecta al radio, es el rango con valores crecientes en el máximo el que arroja valores más aceptables (de 10 a 15 km). Para el caso de  $\Gamma = 1,1$  (Figura (4.10)), ambos rangos se encuentran continuos uno de otro, por lo que se presentan en una misma gráfica. Se desconoce si el resto de los valores de  $\Gamma$  posee un comportamiento similar, puesto que también se desconoce el punto donde los máximos comienzan a disminuir para cada caso, razón por la cual no se presentan dos rangos para otros valores.

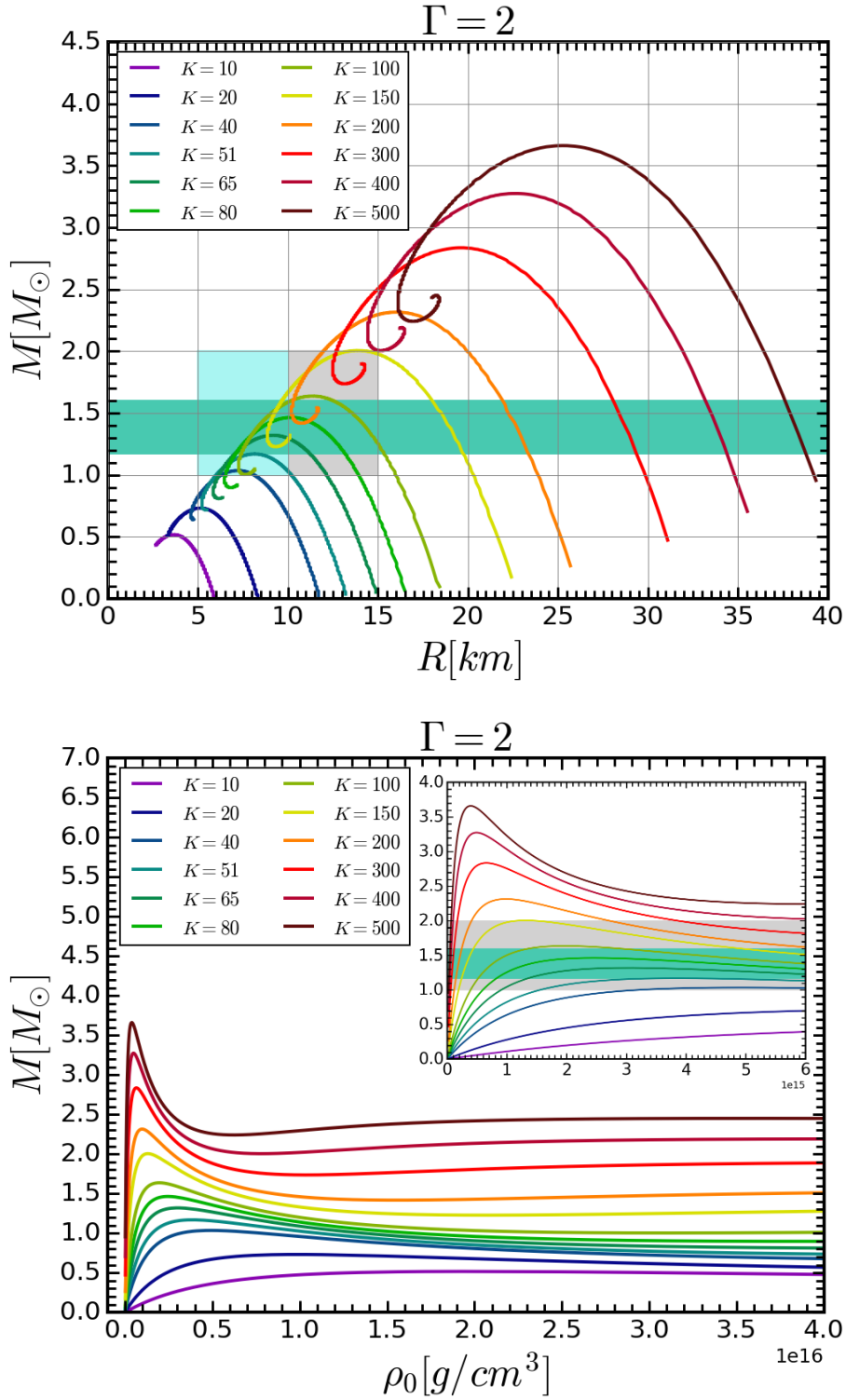
Pasando a las gráficas de la densidad contra la masa total, se presentan con el mismo código de colores las curvas para cada  $K$ , siendo de igual forma la posición del máximo de la masa el punto de interés. Se observa que el máximo aumenta para el rango creciente de  $K$ , presentando además un corrimiento a la izquierda. Caso contrario al que se tiene con un rango decreciente de  $K$ . Cada gráfica contiene en su interior un *zoom* de los máximos y en donde la franja en color gris representa también los valores de la masa aceptados con el mismo criterio que en las gráficas para la compacticidad.

Finalmente, la franja de color verde claro por encima de los demás recuadros representa el rango de masas posible para las estrellas de neutrones que se detectaron recientemente el 17 de Octubre y que se reportan en [Abbott et al., 2017], el cual va de 1.17 a  $1.60 M_{\odot}$ . El que sea un rango relativamente pequeño nos permite acotar aún más los valores de

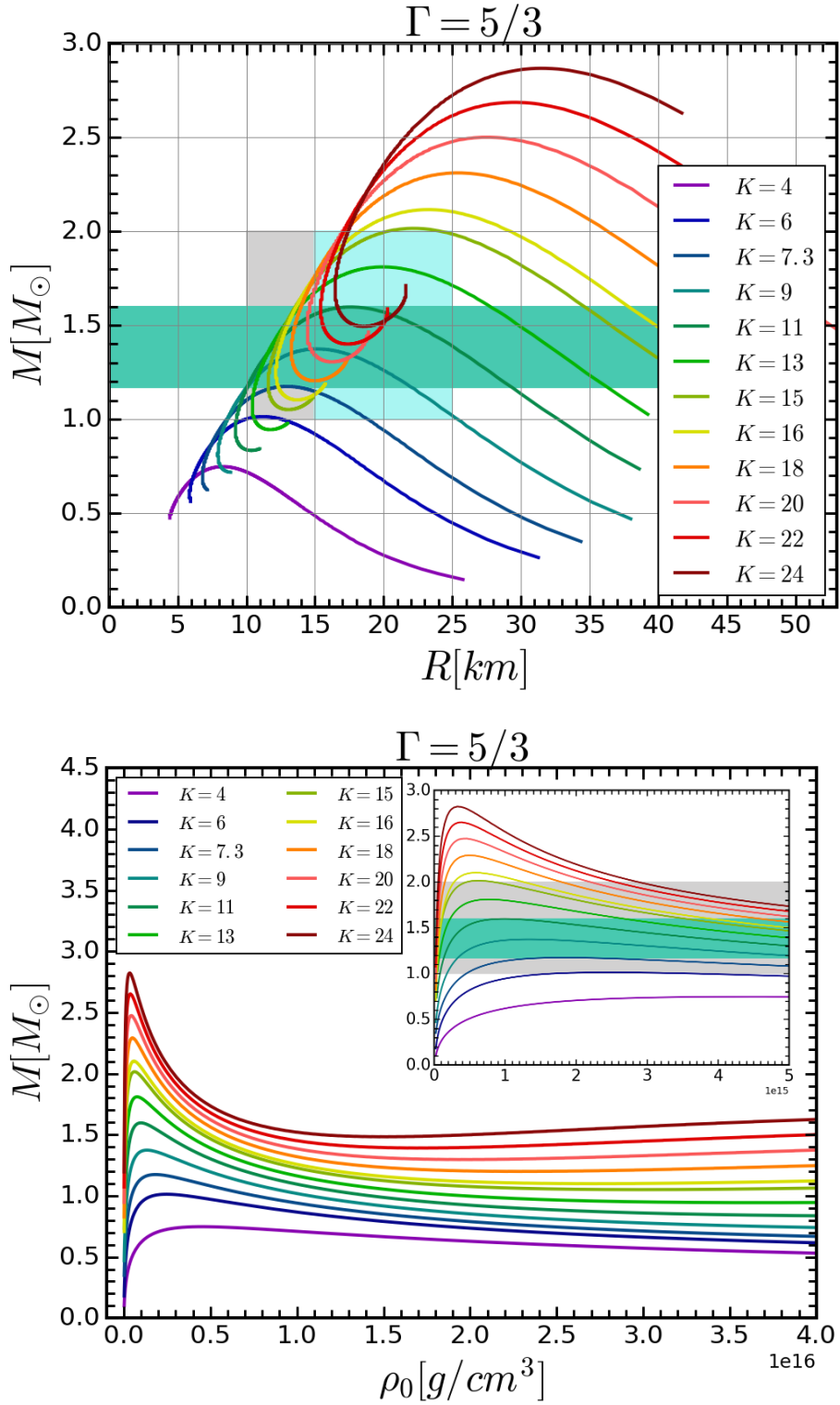
#### 4.1 Estrellas de neutrones con ecuación de estado politrópica

---

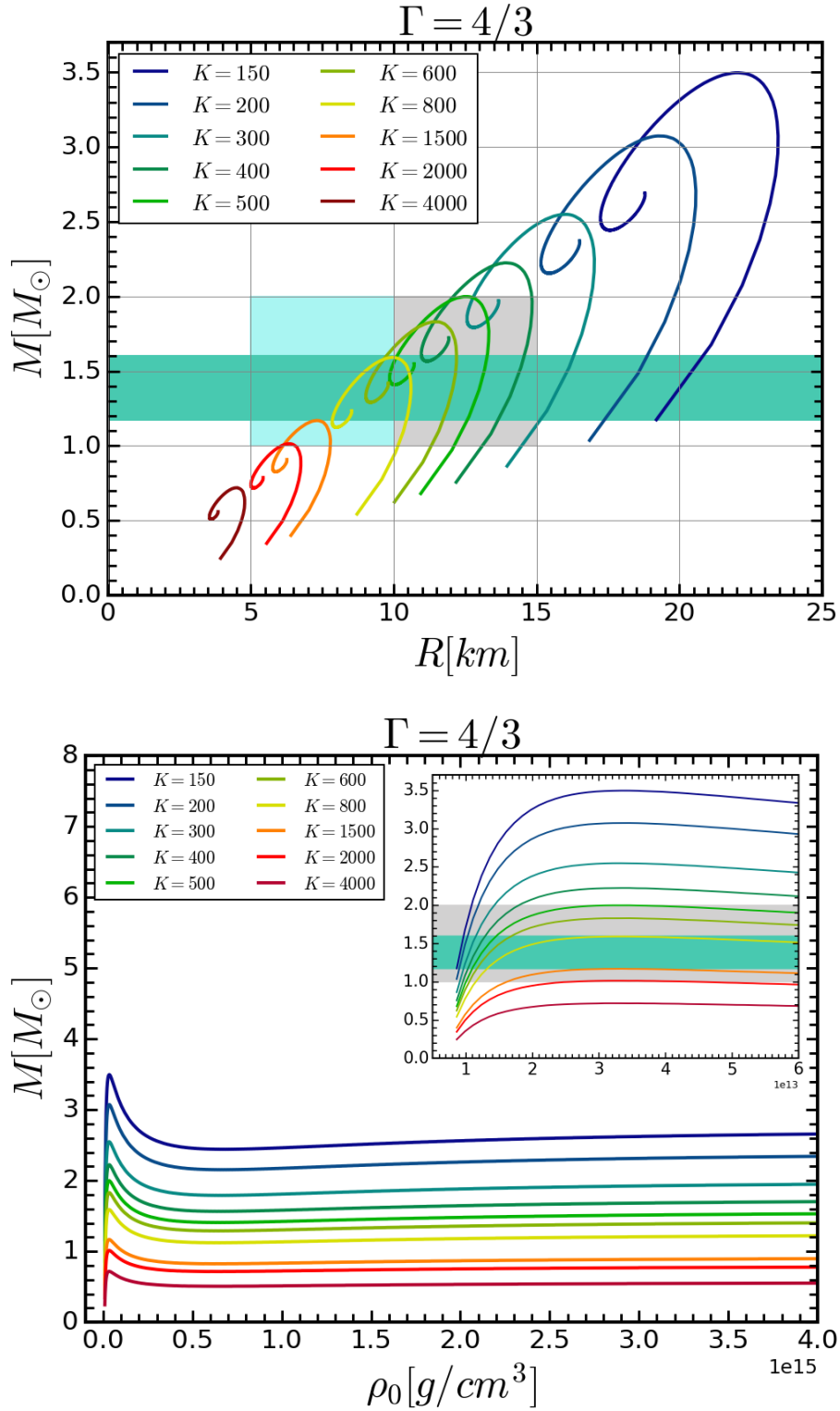
la constante politrópica  $K$  más allá de los valores típicos. Además, hablamos del primer evento detectado tanto en ondas gravitacionales como en el espectro electromagnético, que a parte de ser reciente confirma la existencia de las estrellas de neutrones y da más peso a nuestros resultados.



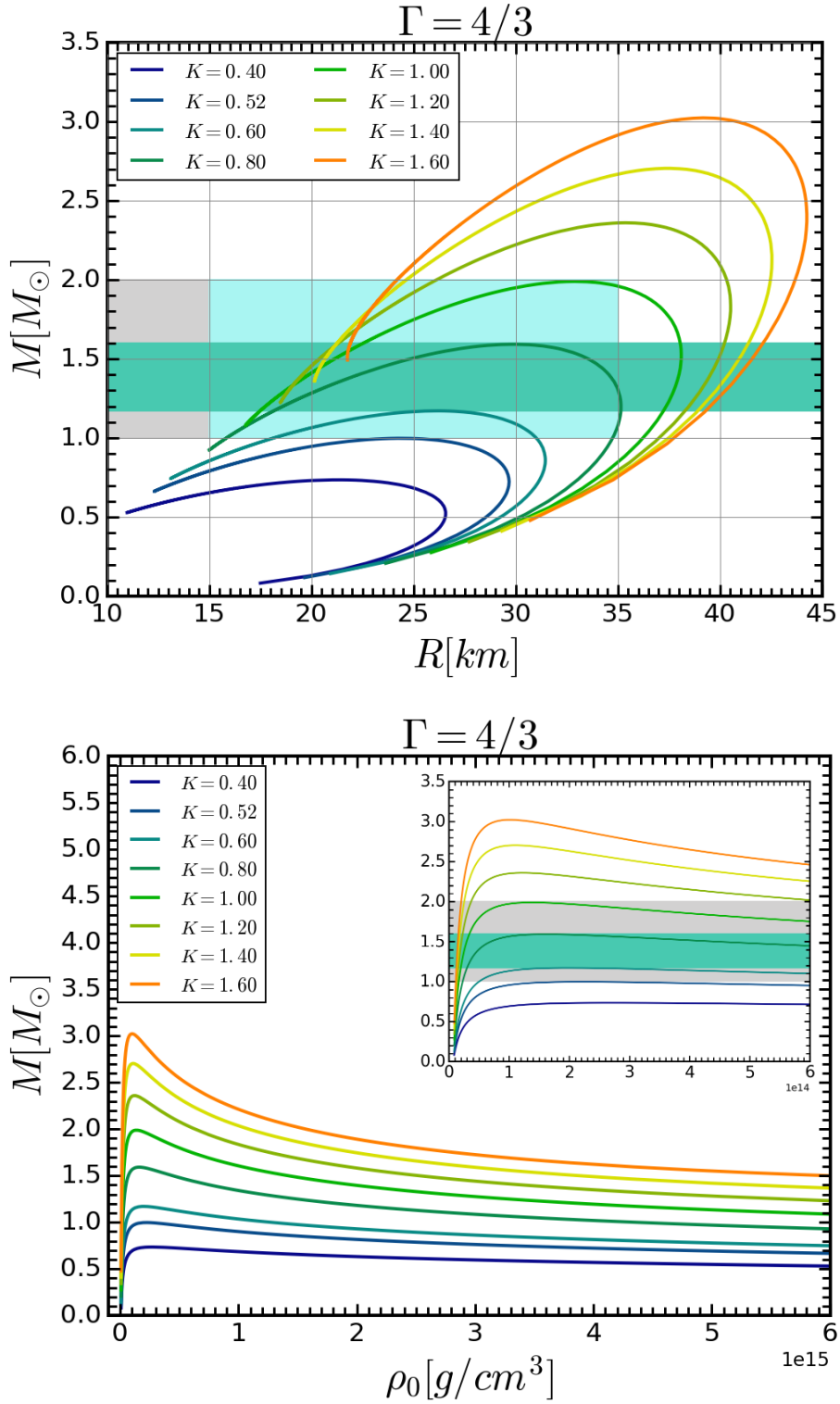
**Figura 4.4:** Radio de la estrella en kilómetros contra la masa total en unidades de masas solares para  $\Gamma = 2$  y distintas  $K$ . Densidad central de la estrella en  $\text{g/cm}^3$  contra la masa total en unidades de masas solares. En la simulación se ocupó el modelo NS 3A de la Tabla 4.1.



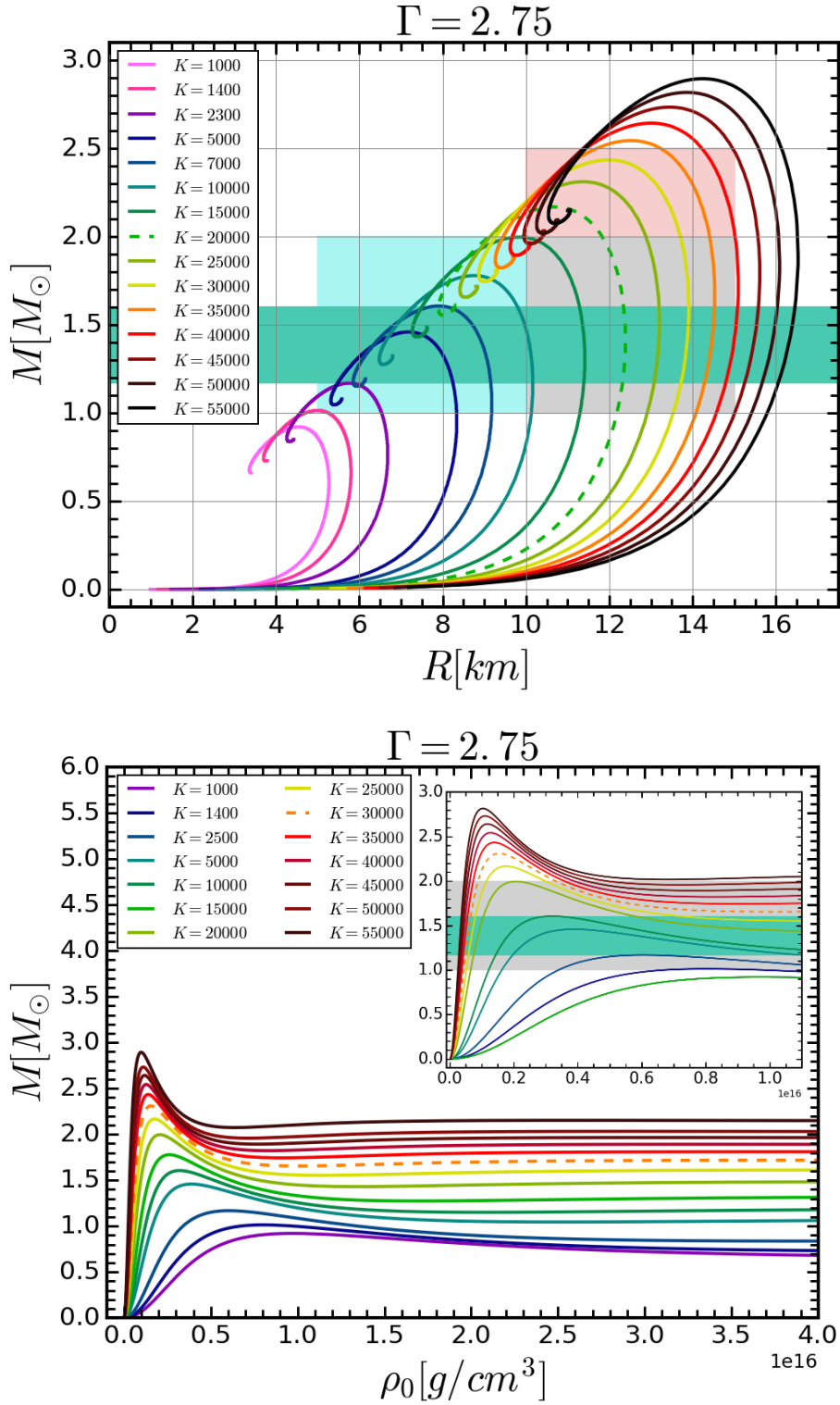
**Figura 4.5:** Radio de la estrella en kilómetros contra la masa total en unidades de masas solares para  $\Gamma = 5/3$  y distintas  $K$ . Densidad central de la estrella en  $\text{g/cm}^3$  contra la masa total en unidades de masas solares. En este caso se ocupó el modelo NS 3C de la Tabla 4.1.



**Figura 4.6:** Radio de la estrella en kilómetros contra la masa total en unidades de masas solares para  $\Gamma = 4/3$  y un primer rango de  $K$ . Densidad central de la estrella en  $g/cm^3$  contra la masa total en unidades de masas solares. Se utilizó el modelo NS 3B de la Tabla 4.1.

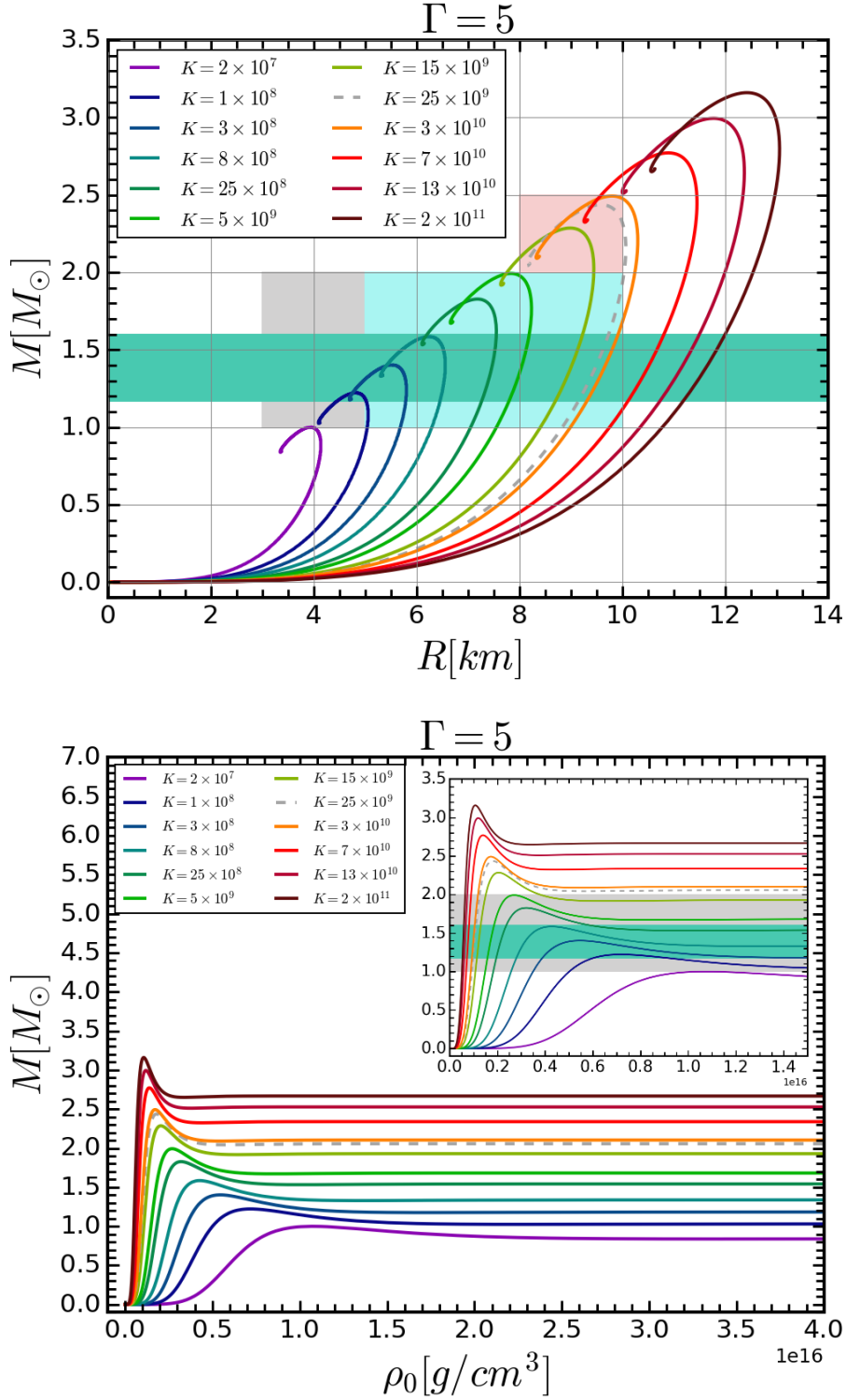


**Figura 4.7:** Radio de la estrella en kilómetros contra la masa total en unidades de masas solares para  $\Gamma = 4/3$  y un segundo rango de  $K$ . Densidad central de la estrella en  $\text{g/cm}^3$  contra la masa total en unidades de masas solares. Se utilizó el modelo NS 3B de la Tabla 4.1.



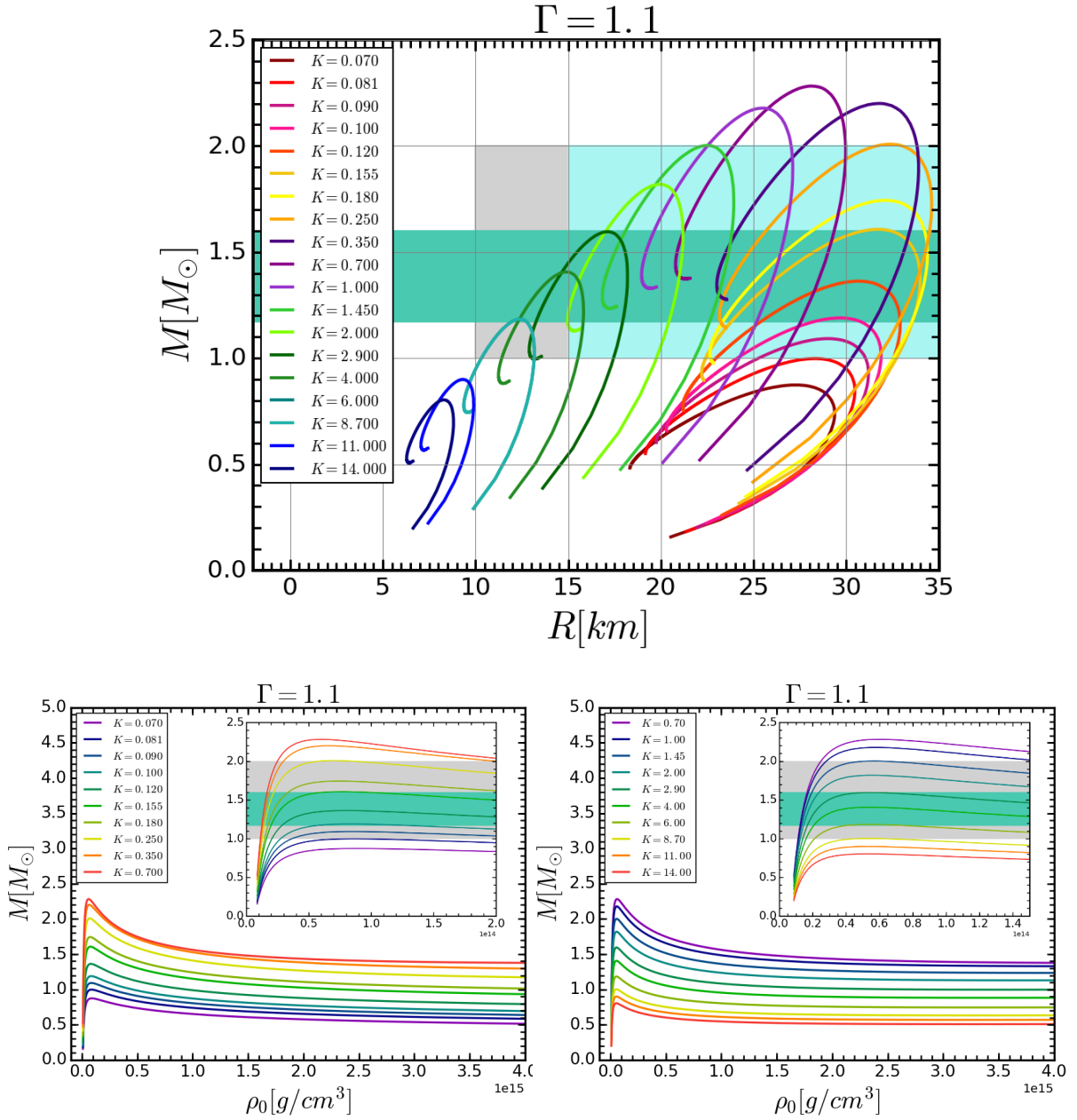
**Figura 4.8:** Radio de la estrella en kilómetros contra la masa total en unidades de masas solares para  $\Gamma = 2,75$  y distintas  $K$ . El recuadro rojo contiene al valor de  $K = 30000$  con línea punteada reportado en [Giacomazzo and Perna, 2013] y que fue la motivación para tomar este valor de  $\Gamma$ . Densidad central de la estrella en  $g/cm^3$  contra la masa total en unidades de masas solares. Las corridas se hicieron con el modelo NS 3D de la Tabla 4.1.

4.1 Estrellas de neutrones con ecuación de estado politrópica

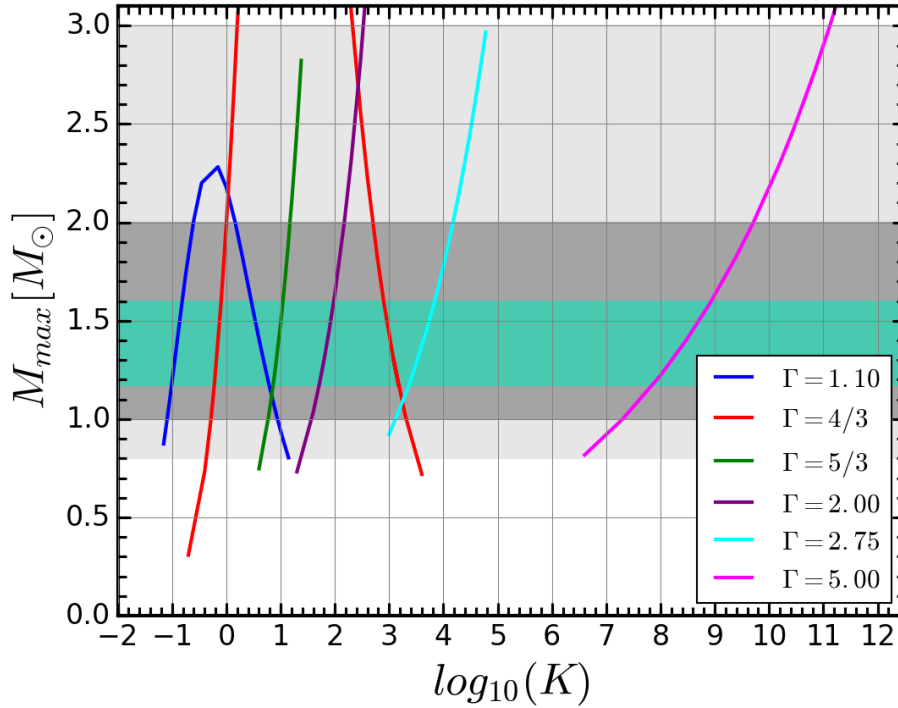


**Figura 4.9:** Radio de la estrella en kilómetros contra la masa total en unidades de masas solares para  $\Gamma = 5$  y distintas  $K$ . El recuadro rojo contiene al valor de  $K = 25 \times 10^9$  que recrea el valor de la masa igual a 2.43  $M_\odot$  citado en [Giacomazzo and Perna, 2013], pero con un valor distinto de  $\Gamma$ . Densidad central de la estrella en  $g/cm^3$  contra la masa total en unidades de masas solares. Resultados obtenidos con el modelo NS 3F de la Tabla 4.1.





**Figura 4.10:** Radio de la estrella en kilómetros contra la masa total en unidades de masas solares para  $\Gamma = 1, 10$  y distintas  $K$ . Densidad central de la estrella en  $\text{g/cm}^3$  contra la masa total en unidades de masas solares. Resultados obtenidos con el modelo NS 3E de la Tabla 4.1.



**Figura 4.11:** Logaritmo de  $K$  contra la masa total máxima en unidades de masas solares para distintos valores de  $\Gamma$ . La franja en gris oscuro representa los valores aceptables para la masa de acuerdo a las observaciones, mientras que en las franjas gris claro se encuentran algunos casos especiales de estrellas ya reportados. Las corridas se hicieron con una resolución espacial  $\Delta r = 0,06$  (88,59m) en un dominio  $r \in [0, 30]$  (0 – 44,29km) y un valor de la atmósfera de  $1 \times 10^{-13}$  (61771,4g/cm<sup>3</sup>), ambos en unidades geométricas.

En la Figura (4.11) se tomó el logaritmo de la constante politrópica  $K$  y se graficó contra el máximo de la masa para cada una de las figuras anteriores, se pueden notar claramente los dos rangos estudiados para los casos de  $\Gamma = 4/3$  y  $1,1$ . La franja en azul y gris oscuro representan los valores aceptables en la masa bajo el mismo criterio que se ha mantenido hasta el momento con relación a la Figura (1.4). Se puede notar además que con el aumento del índice politrópico  $\Gamma$ , se requiere también de un aumento considerable en el valor de la constante politrópica  $K$  para generar apenas un pequeño incremento en el máximo de la masa, como se puede apreciar en la Figura (4.9) para  $\Gamma = 5$  que posee valores de  $K$  muy por arriba del resto de los casos. Esto se debe a que un valor más grande para  $\Gamma$  da cuenta de una estrella más *dura*, es decir, que presenta una dificultad más grande para comprimirla, lo que se ve reflejado en los grandes valores de  $K$ , puesto que con el aumento de dicha cantidad se construye una estrella cada vez más compacta, resultado esperado gracias a la relación directa de  $K$  con la presión proveniente de la

ecuación de estado.

A manera de resumen, en la gráfica superior de la Figura (4.12) se tomaron todos los máximos de la masa total en las curvas de las Figuras (4.4) a la 4.10 para cada valor de  $\Gamma$ , tomando únicamente el rango que va de 0 a  $3 M_{\odot}$  y descartando los puntos por arriba de estos valores. Se puede notar el comportamiento creciente en las curvas salvo para los casos en los que se identificaron dos rangos de  $K$ , en donde se aprecia también un comportamiento decreciente tras alcanzar un máximo. El código de colores usado en las franjas de colores azul y gris oscuro es de igual forma el mismo que para los casos anteriores, mientras que la franja gris claro es una extensión de valores de la masa para abarcar algunas configuraciones reportadas como el caso de la Figura (4.9). Los valores extremos en cada rango pueden consultarse en la Tabla 4.2, donde también se ha calculado la temperatura de acuerdo con la sección 2.5.

**Resultados numéricos**

$\Gamma$	$K$ ( $1[M_{\odot}] - 2[M_{\odot}]$ )	Temperatura [ $^{\circ}K$ ]	$K$ ( $1,17[M_{\odot}] - 1,60[M_{\odot}]$ )	Temperatura [ $^{\circ}K$ ]
1,1	1,450 – 8,700	$\sim 6,22 \times 10^{12} - 3,69 \times 10^{13}$	2,900 – 6,000	$\sim 1,24 \times 10^{13} - 2,56 \times 10^{13}$
2	40 – 150	$\sim 3,45 \times 10^{12} - 3,52 \times 10^{12}$	51 – 100	$\sim 3,46 \times 10^{12} - 3,48 \times 10^{12}$
5/3	6 – 15	$\sim 1,63 \times 10^{12} - 1,65 \times 10^{12}$	7,3 – 11	$\sim 1,637 \times 10^{12}$
4/3	500 – 2000	$\sim 2,08 \times 10^{14} - 8,12 \times 10^{14}$	800 – 1500	$\sim 3,28 \times 10^{14} - 6,16 \times 10^{14}$
2,75	1400 – 15000	$\sim 7,64 \times 10^{12} - 7,65 \times 10^{12}$	2300 – 7000	$\sim 7,61 \times 10^{12} - 7,63 \times 10^{12}$
5	$2 \times 10^7 - 5 \times 10^9$	$\sim 1,94 \times 10^{13} - 2,00 \times 10^{13}$	$1 \times 10^8 - 8 \times 10^8$	$\sim 1,96 \times 10^{13} - 1,97 \times 10^{13}$

**Cuadro 4.2:** *Constricción de la constante politrópica para cada valor de  $\Gamma$  de acuerdo a las observaciones.*

Finalmente, en la gráfica inferior de la Figura (4.12) se graficó la masa contra el logaritmo de la temperatura en grados Kelvin para la escala de la izquierda mediante la expresión (2.75), y en electronvolts (eV) en la escala de la derecha tomando en cuenta que

$$1 \text{ grado Kelvin} = 8,621738 \times 10^{-5} \text{ eV} \tag{4.1}$$

utilizando cada una de las  $K$  en cada valor de  $\Gamma$  estudiado, y con distintos valores de la densidad central para el dato inicial, es decir, esta temperatura es la temperatura de la estrella cuando nace, sin considerar si se mantendrá estable o colapsará en un futuro. Se puede ver que todos los casos de  $\Gamma$  estudiados poseen al menos un rango de  $K$  que arroja valores de la masa en este rango .

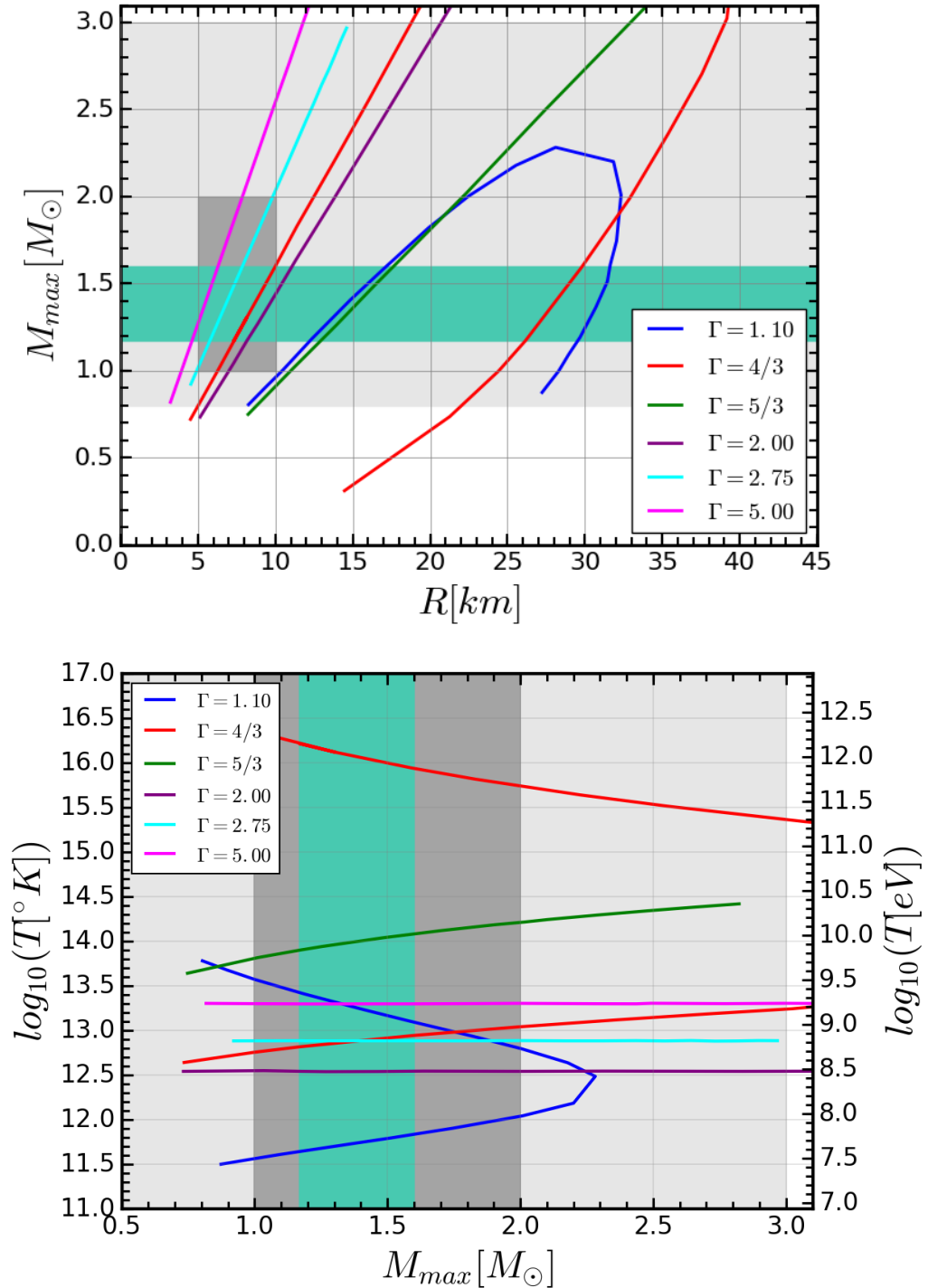
Algo destacable de esta gráfica, y que ya se venía mencionando, es que para los casos

## 4.1 Estrellas de neutrones con ecuación de estado politrópica

---

de  $\Gamma = 5$ ,  $2,75$ , y  $2$  el valor de la temperatura es prácticamente constante, lo que nos habla de que sin importar el valor de  $K$  o de la densidad central, la estrella tendrá la misma temperatura, es decir, es una característica intrínseca propia de estos valores de  $\Gamma$ .

En resumen, hasta el momento se han estudiado brevemente un par de casos de migración así como algunas configuraciones de colapso, pero lo destacable de este capítulo es que, dados los valores de  $\Gamma$  estudiados, hemos sido capaces de identificar qué rangos de la constante politrópica  $K$  nos devuelven estrellas cuya masa se encuentra en los rangos aceptables para la masa de acuerdo a las observaciones, haciendo uso de información reciente como lo son las observaciones en ondas gravitacionales de la colisión de dos estrellas de neutrones. Además, los rangos de  $K$  también nos permitieron encontrar a su vez los rangos de la temperatura para la estrella, y con ella distinguir un comportamiento constante para algunos casos de  $\Gamma$ . Por lo que sigue, en el capítulo siguiente nos centraremos aún más en la constricción de los valores de la constante politrópica, haciendo notar cuáles de los valores de  $\Gamma$  son realmente viables, y bajo este modelo, aterrizar nuestros resultados para describir algunos de los objetos observados de los que únicamente conocemos la masa.



**Figura 4.12:** Compactness tomando radios y masa máximas en cada caso de  $K$  para distintos valores de  $\Gamma$ . Masa en unidades de masas solares contra el logaritmo de la temperatura en grados Kelvin para distintos valores de  $\Gamma$ . El color gris representa los valores aceptados en la masa de acuerdo a las observaciones de la Figura (1.4), mientras que el color verde claro representa el rango de masas reportado en [Abbott et al., 2017] para estrellas de neutrones que se detectaron recientemente.

## 4.1 Estrellas de neutrones con ecuación de estado politrópica

---

## Análisis y Conclusiones

En este capítulo se tomarán todos los resultados de las simulaciones numéricas de las diferentes configuraciones de estrellas de neutrones, variando los parámetros que definen la ecuación de estado politrópica,  $p = K\rho^\Gamma$ , con el fin de hacer una comparación con las observaciones tanto en la banda electromagnética [Lattimer, 2012] como en la banda de ondas gravitacionales [Abbott et al., 2017], buscando constreñir los parámetros  $\Gamma$  y  $K$  tomando en cuenta la masa observada. Como resultado de esta comparación se pretende obtener un rango de temperaturas y radios aceptables.

Para la constricción nos centraremos en la región de interés para este trabajo, región delimitada por el recuadro gris oscuro que interseca con la franja en azul en la Figura (4.12a), y que fue determinada a partir de las observaciones en radio y rayos X así como en ondas gravitacionales. Por esto, se realizó un acercamiento dicha región y se establecieron los puntos extremos representados por letras mayúsculas para cada uno de los cuatro valores de  $\Gamma$  en la Figura (5.1). Los rangos de  $K$  y de la temperatura para estos puntos pueden ser consultados en la Tabla 5.2 (el cálculo de la temperatura se explica a detalle en la sección 2.5). Por otro lado, la región en color naranja en la Figura (5.1) es una constricción para la masa de las estrellas de neutrones tomando como referencia la reciente detección de la colisión de dos estrellas de neutrones sobre la que se ha venido hablando, y que es reportada en [Rezzolla et al., 2017]. Los únicos valores del índice politrópico que entran en esta región son  $\Gamma = 2,75$  y  $\Gamma = 5$ , mientras que los rangos de valores de  $K$  pueden verse en la Tabla 5.1

Para mostrar el alcance de conocer estos rangos se tomaron tres estrellas seleccionadas

$\Gamma$	Puntos	$K$ ( $1,17[M_{\odot}] - 1,60[M_{\odot}]$ )	Temperatura [ $^{\circ}K$ ]	Temperatura [ $MeV$ ]
2	G-H	51 – 100	$\sim 3,46 \times 10^{12} - 3,48 \times 10^{12}$	$\sim 300$
4/3	F-E	800 – 1500	$\sim 3,28 \times 10^{14} - 6,16 \times 10^{14}$	$\sim 28280 - 53110$
2,75	C-D	2300 – 7000	$\sim 7,61 \times 10^{12} - 7,63 \times 10^{12}$	$\sim 657$
5	A-B	$1 \times 10^8 - 8 \times 10^8$	$\sim 1,96 \times 10^{13} - 1,97 \times 10^{13}$	$\sim 1689$

**Cuadro 5.1:** *Constricción de valores de  $K$  para los puntos marcados con letras en la Figura (5.1).*

$\Gamma$	Puntos	$K$ ( $2,012[M_{\odot}] - 2,16[M_{\odot}]$ )	Temperatura [ $^{\circ}K$ ]	Temperatura [ $MeV$ ]
2,75	K-L	15400 – 16000	$\sim 7,6 \times 10^{12}$	$\sim 655$
5	I-J	$5,42 \times 10^9 - 9,6 \times 10^9$	$\sim 2 \times 10^{13}$	$\sim 1724$

**Cuadro 5.2:** *Constricción de valores de  $K$  para los puntos marcados con letras en la Figura (5.1) que caen dentro de la región color naranja para una constricción de la masa tomada de [Rezzolla et al., 2017].*

de la Figura (1.4) que presentaran una barra de error casi cero para su masa, cada uno perteneciente a una franja distinta: binarias de doble estrella de neutrones, binarias estrella de neutrones-enana blanca y binarias estrella de neutrones-estrella en secuencia principal. El valor de la masa de estos objetos se trazó en forma de línea punteada horizontal poniendo su nombre por debajo de cada línea, y se encontraron las intersecciones con las curvas para cada  $\Gamma$ . Al encontrar dichas intersecciones se conocen entonces el valor del radio, su correspondiente  $K$  y densidad, y con éstas dos últimas se puede conocer su temperatura, la cual se graficó en la Figura (5.2) tanto en grados Kelvin como en electronvolts (eV) mediante la fórmula 4.1 <sup>1</sup>. Considerando que lo único que en principio se sabe es su masa, con ayuda de nuestro modelo se han encontrados otros dos parámetros importantes y que pueden ser físicamente observables en un futuro como lo son el radio y la temperatura. Los resultados están resumidos en la Tabla 5.3.

Así, el objeto J1903+0327 correspondiente a una estrella de neutrones en un sistema binario con una estrella en secuencia principal le corresponde una masa de  $1.7 M_{\odot}$  con radios que van de 6.73 a 11.85 km para un orden descendente de valores de  $\Gamma$ , y temperaturas del orden de  $10^{12} - 10^{14}$  Kelvin. Por su parte, el objeto B1913+16 con una masa de  $1.4 M_{\odot}$  en un sistema binario con otra estrella de neutrones posee radios de entre 5.52 a 10.18 km, mientras que para J1141-6545, una estrella de masa aproximadamente igual a  $1.25 M_{\odot}$  que se encuentra en un sistema binario con una enana blanca, tiene radios más pequeños de 4.81 a 8.85 km. La temperatura de estos dos últimos objetos oscila en los

<sup>1</sup>A recordar,  $1 \text{ grado Kelvin} = 8,621738 \times 10^{-5} \text{ eV}$

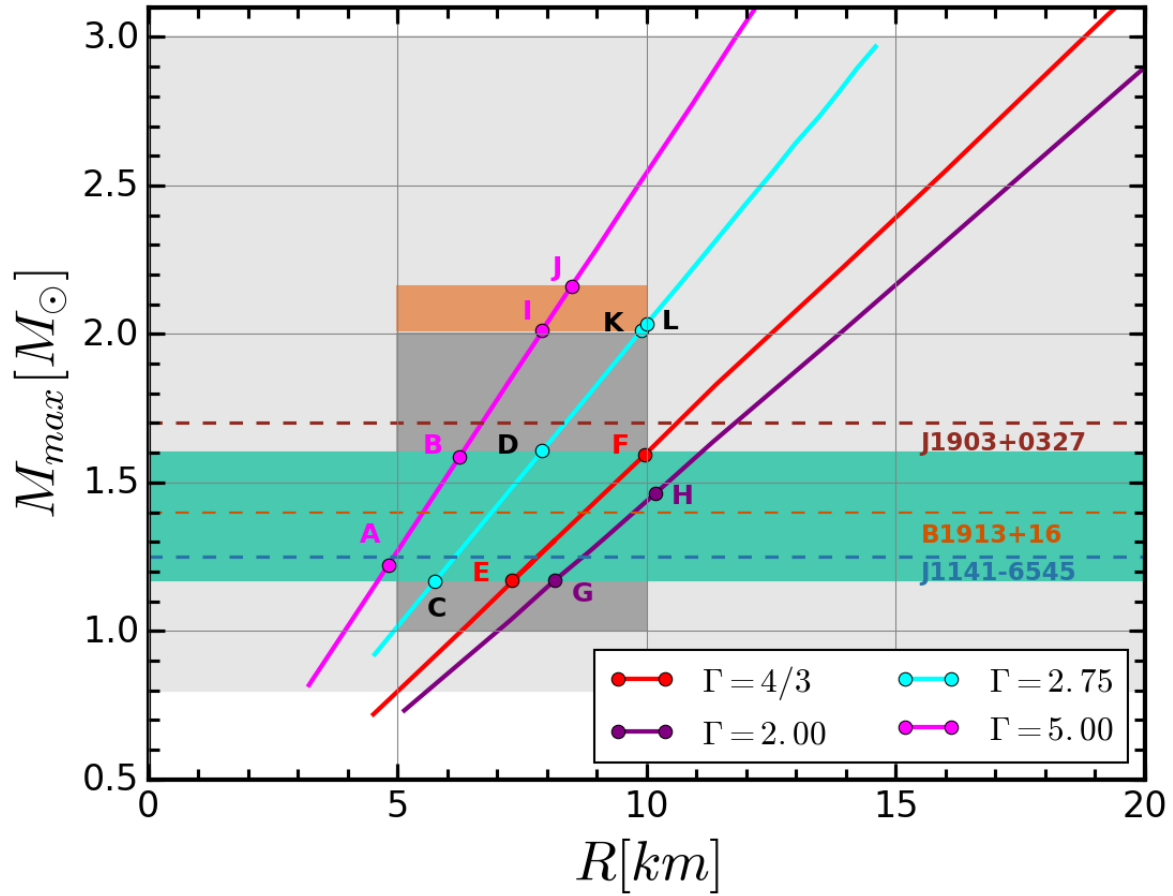


Objeto	$\Gamma = 5$	$\Gamma = 2,75$	$\Gamma = 4/3$	$\Gamma = 2$
J1903+0327	$K = 15 \times 10^8$	$K = 9000$	$K = 700$	$K = 110$
	$T \sim 2,00 \times 10^{13}$	$T \sim 7,61 \times 10^{12}$	$T \sim 2,87 \times 10^{14}$	$T \sim 3,46 \times 10^{12}$
	$M = 1,7[M_{\odot}]$	$M = 1,7[M_{\odot}]$	$M = 1,7[M_{\odot}]$	$M = 1,7[M_{\odot}]$
	$R = 6,73[km]$	$R = 8,48[km]$	$R = 10,63[km]$	$R = 11,85[km]$
B1913+16	$\rho_c = 3,66 \times 10^{15}$	$\rho_c = 2,77 \times 10^{15}$	$\rho_c = 3,34 \times 10^{13}$	$\rho_c = 1,79 \times 10^{15}$
	$K = 3 \times 10^8$	$K = 5000$	$K = 1000$	$K = 80$
	$T \sim 2,00 \times 10^{13}$	$T \sim 7,61 \times 10^{12}$	$T \sim 4,06 \times 10^{14}$	$T \sim 3,46 \times 10^{12}$
	$M = 1,4[M_{\odot}]$	$M = 1,4[M_{\odot}]$	$M = 1,4[M_{\odot}]$	$M = 1,4[M_{\odot}]$
J1141-6545	$R = 5,52[km]$	$R = 7,17[km]$	$R = 8,96[km]$	$R = 10,18[km]$
	$\rho_c = 5,45 \times 10^{15}$	$\rho_c = 3,88 \times 10^{15}$	$\rho_c = 3,20 \times 10^{13}$	$\rho_c = 2,45 \times 10^{15}$
	$K = 1 \times 10^8$	$K = 3000$	$K = 1300$	$K = 60$
	$T \sim 2,00 \times 10^{13}$	$T \sim 7,61 \times 10^{12}$	$T \sim 5,27 \times 10^{14}$	$T \sim 3,46 \times 10^{12}$
J1141-6545	$M = 1,25[M_{\odot}]$	$M = 1,25[M_{\odot}]$	$M = 1,25[M_{\odot}]$	$M = 1,25[M_{\odot}]$
	$R = 4,81[km]$	$R = 6,20[km]$	$R = 7,86[km]$	$R = 8,85[km]$
	$\rho_c = 7,17 \times 10^{15}$	$\rho_c = 5,20 \times 10^{15}$	$\rho_c = 3,20 \times 10^{13}$	$\rho_c = 3,25 \times 10^{15}$

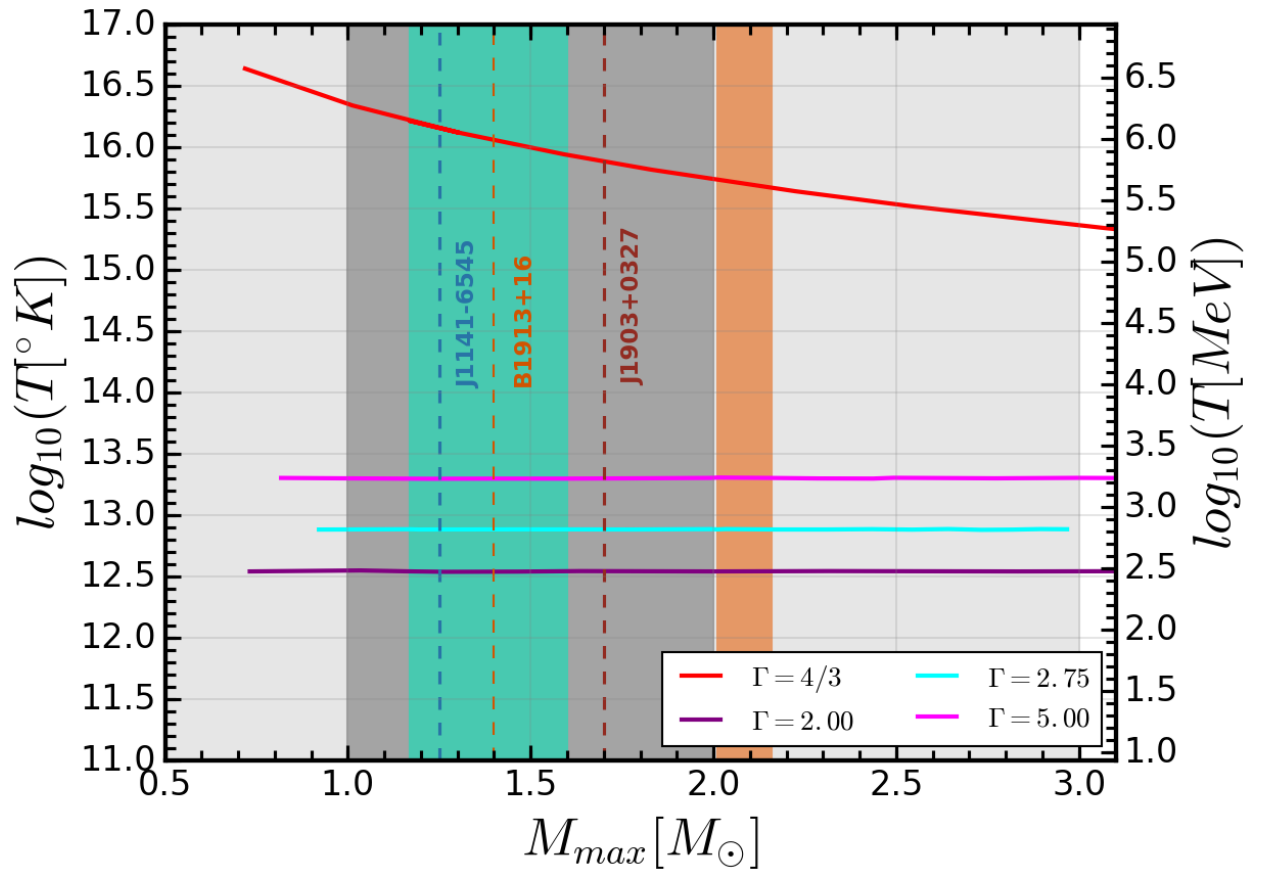
**Cuadro 5.3:** Posibles parámetros de tres objetos observados de la Figura (4.12a). El valor de la temperatura está en  $[\text{°K}]$ , y la densidad en  $[g/cm^3]$ .

mismo ordenes de magnitud del primer objeto, de  $10^{12} - 10^{14}$  Kelvin.

Como se dijo anteriormente, el valor de  $\Gamma$  da cuenta de la dureza de la estrella, un valor más grande nos habla de una estrella más dura y por ende más difícil de compactar, lo que se refleja en los grandes valores de  $K$  puesto que está relacionada directamente con la presión. Esto se ve claramente reflejado en los valores del radio para cada objeto en la Tabla 5.3, siendo menores para valores grandes de  $\Gamma$  y obteniendo entonces una estrella más compacta, caso contrario con valores pequeños de  $\Gamma$  en donde la estrella es más extendida. Los valores de la temperatura corren del orden de  $10^{12}$  a  $10^{14}$  Kelvin, lo cual resulta considerable dada la temperatura superficial del orden de  $10^{10}$  Kelvin. Por otra parte, los valores de la temperatura para cada objeto dado un mismo valor para  $\Gamma$ , no cambian considerablemente, lo que nos invita a pensar que la temperatura, sólo para algunos casos de  $\Gamma$ , es una propiedad intrínseca constante sin importar el valor de  $K$  y la densidad central. Esto se verá a detalle en la siguiente sección.



**Figura 5.1:** Compacticidad tomando radios y masa máximas, y haciendo un zoom a la región de interés ubicada en la intersección entre el recuadro gris oscuro y cuyos puntos están representados por letras mayúsculas. Las líneas punteadas horizontales corresponden a tres objetos observados con sus respectivos nombres presentados en la Figura (1.4). La región en color naranja es una constricción para la masa tomada de [Rezzolla et al., 2017].



**Figura 5.2:** masa con la temperatura en grados Kelvin haciendo un zoom a la región de interés ubicada en la intersección entre el franja gris oscuro y la franja azul. Las líneas punteadas verticales corresponden a tres objetos observados con sus respectivos nombres presentados en la Figura (1.4). La región en color naranja es una restricción para la masa tomada de [Rezzolla et al., 2017].

---

Para finalizar, las conclusiones más importantes producto de este trabajo de tesis se enlistan a continuación:

- Dados los rangos de masas aceptables proporcionados por las observaciones tanto en el espectro electromagnético [Lattimer, 2012] como en ondas gravitacionales [Abbott et al., 2017], así como el rango típico de valores para el radio de una estrella de neutrones, se determinó que con cuatro de los seis valores estudiados para el índice politrópico con valores de  $\Gamma = 2, 4/3, 2,75$  y  $5$  es posible construir una estrella de neutrones cuya masa y radio se encuentre en dichos rangos para valores de la constante politrópica  $K$  específicos, determinando a su vez la temperatura con ayuda de la ecuación de estado politrópica  $p = K\rho^\Gamma$ .
- Se observó que para tres de los valores del índice politrópico  $\Gamma = 2, 2,75$  y  $5$  se obtiene una temperatura constante para la estrella de neutrones sin importar el valor que tome la constante politrópica  $K$  y la densidad central, lo que sugiere que dicha temperatura es una solución atractiva característica de esos valores de  $\Gamma$ .
- Se compararon los resultados numéricos obtenidos en este trabajo con las observaciones al tomar tres objetos: J1903+0327, B1913+16 y J1141-6545, para determinar qué valores de  $\Gamma$  y  $K$  nos devuelven la masa reportada, y con ello determinar otras tres propiedades importantes en la caracterización de una estrella no rotante como lo son el radio, temperatura y densidad central.

Con el modelo basado en la ecuación de estado politrópica desarrollado hasta el momento, hemos sido capaces de constreñir tanto los parámetros de la ecuación de estado como observables importantes: temperatura, radio y densidad central, en la descripción de las estrellas de neutrones y en general de cualquier tipo de estrella. Este mismo estudio puede ser realizado para otras ecuaciones de estado más realistas como una ecuación de estado politrópica por pedazos, entre otras, por lo que el campo de estudio es y seguirá siendo ampliamente extenso mientras se desconozca qué tipo de materia constituye a una estrella de neutrones y la ecuación de estado que la describe.

# A

## Detalles de las ecuaciones

### A.1. Ecuaciones de Einstein en simetría esférica

Los símbolos de Christoffel que resultan diferentes de cero para la métrica en (2.44) se enlistan a continuación

$$\begin{aligned}\Gamma_{tt}^t &= \frac{1}{\alpha} \dot{\alpha} & \Gamma_{tt}^r &= \frac{\alpha}{a^2} \alpha' \\ \Gamma_{rr}^t &= \frac{a}{\alpha^2} \dot{a} & \Gamma_{rr}^r &= \frac{1}{a} a' \\ \Gamma_{\theta\theta}^r &= -\frac{r}{a^2} & \Gamma_{\phi\phi}^r &= -\frac{r \sin^2 \theta}{a^2} \\ \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta & \Gamma_{rt}^r &= \Gamma_{tr}^r = \frac{1}{a} \dot{a} \\ \Gamma_{\theta r}^\theta &= \Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r} & \Gamma_{\phi r}^\phi &= \Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\phi\theta}^\phi &= \Gamma_{\theta\phi}^\phi = \cot \theta & \Gamma_{rt}^t &= \Gamma_{tr}^t = \frac{1}{\alpha} \alpha',\end{aligned}\tag{A.1}$$

donde  $\dot{\phantom{x}}$  se refiere a la derivada parcial con respecto a  $t$  y  $\prime$  derivada parcial con respecto a  $r$ . Sustituyendo en la ecuación (2.34) obtenemos las siguientes componentes para el tensor de Einstein

$$G_{tt} = \frac{\alpha^2}{r^2 a^3} (2ra' + a^3 - a)$$

## A.1 Ecuaciones de Einstein en simetría esférica

---

$$\begin{aligned}
 G_{tr} &= \frac{2}{ra} \dot{a} \\
 G_{rr} &= -\frac{-2r\alpha' + a^2\alpha - \alpha}{\alpha r^2} \\
 G_{\theta\theta} &= \frac{r}{\alpha^3 a^3} (-\alpha^2 a\alpha' + \alpha^3 a' + r\alpha^2 \alpha' a' - r\alpha^2 a\alpha'' + r\alpha a^2 \ddot{a} - ra^2 \dot{\alpha} \dot{a}) \\
 G_{\phi\phi} &= -\frac{r \text{sen}^2 \theta}{\alpha^3 a^3} (-\alpha^2 a\alpha' + \alpha^3 a' + r\alpha^2 \alpha' a' - r\alpha^2 a\alpha'' + r\alpha a^2 \ddot{a} - ra^2 \dot{\alpha} \dot{a}).
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

- Cálculo de  $G_{tt} = 8\pi T_{tt}$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\alpha^2}{r^2 a^3} (2r\partial_r a + a^3 - a) &= 8\pi\alpha^2(\rho_0 h W^2 - p) \\
 2r\partial_r a + a^3 - a &= 8\pi r^2 a^3 (\rho_0 h W^2 - p) \\
 \partial_r a &= \frac{1}{2r} [8\pi r^2 a^3 (\rho_0 h W^2 - p) - a^3 + a] \\
 \partial_r a &= a^3 \left[ 4\pi r (\rho_0 h W^2 - p) + \frac{1}{2r} \left( -1 + \frac{1}{a^2} \right) \right] \\
 \partial_r a &= a^3 \left[ 4\pi r (\tau + D) + \frac{1}{2r} \left( -1 + 1 - \frac{2m}{r} \right) \right] \\
 \partial_r a &= a^3 \left[ 4\pi r (\tau + D) + \frac{m}{r^2} \right].
 \end{aligned}$$

- Cálculo de  $G_{tr} = 8\pi T_{tr}$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{ra} \partial_t a &= -8\pi a^2 \alpha \rho_0 h W^2 v^r \\
 \partial_t a &= -4\pi r a^3 \alpha \rho_0 h W^2 \frac{v_r}{a^2} \\
 \partial_t a &= -4\pi r a \alpha S_r.
 \end{aligned}$$

- Cálculo de  $G_{rr} = 8\pi T_{rr}$ :

$$\begin{aligned}
 -\frac{-2r\partial_t \alpha + a^2\alpha - \alpha}{\alpha r^2} &= 8\pi \left( \rho_0 h W^2 v^r v^r + \frac{p}{a^2} \right) \\
 -2r\partial_t \alpha + a^2\alpha - \alpha &= -\alpha a^2 r^2 8\pi (\rho_0 h W^2 v_r v^r + p) \\
 -2r\partial_t \alpha + a^2\alpha - \alpha &= -\alpha a^2 r^2 8\pi (S_r v^r + p)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-2r\partial_t\alpha &= -\alpha a^2 r^2 8\pi (S_r v^r + p) - a^2\alpha + \alpha \\
2r\frac{\partial_t\alpha}{\alpha} &= a^2 \left[ 8\pi r^2 (S_r v^r + p) + 1 - \frac{1}{a^2} \right] \\
2r\frac{\partial_t\alpha}{\alpha} &= a^2 \left[ 8\pi r^2 (S_r v^r + p) + \frac{2m}{r} \right] \\
\frac{\partial_t\alpha}{\alpha} &= a^2 \left[ 4\pi r (S_r v^r + p) + \frac{2m}{r^2} \right].
\end{aligned}$$

## A.2. Ecuaciones para el dato inicial

Los símbolos de Christoffel para la métrica en (2.87) son:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{tt}^r &= -\frac{(-r+2m)\alpha}{r}\alpha' & \Gamma_{tr}^t &= \frac{1}{\alpha}\alpha' & \Gamma_{rr}^r &= \frac{-(m')r+m}{r(-r+2m)} \\
\Gamma_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{r} & \Gamma_{r\phi}^\phi &= \frac{1}{r} & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r+2m \quad (\text{A.3}) \\
\Gamma_{\theta\phi}^\phi &= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} & \Gamma_{\phi\phi}^r &= (-r+2m)\text{sen}^2(\theta) & \Gamma_{\phi\phi}^\theta &= -\text{sen}\theta\cos\theta.
\end{aligned}$$

Dada la dependencia de la métrica, la  $\prime$  significa derivada total con respecto a  $r$ . En cuanto a las componentes del tensor de Einstein

$$\begin{aligned}
G_{tt} &= \frac{2\alpha^2}{r^2}m' \\
G_{rr} &= \frac{2[2rm(\alpha') + \alpha m - r^2(\alpha')]}{\alpha r^2(-r+2m)} \\
G_{\theta\theta} &= \frac{1}{\alpha r} [r^2(\alpha') - rm(\alpha') - \alpha r(m') + \alpha m - r^2(\alpha')(m') \\
&\quad + r^3(\alpha'') - 2r^2m(\alpha'')] \\
G_{\phi\phi} &= \frac{\text{sen}^2(\theta)}{\alpha r} [r^2(\alpha') - rm(\alpha') - \alpha r(m') + \alpha m - r^2(\alpha')(m') \\
&\quad + r^3(\alpha'') - 2r^2m(\alpha'')].
\end{aligned} \tag{A.4}$$

- Cálculo de la divergencia del tensor de energía momento

$$\begin{aligned}
 & -\frac{(-r+2m)\left(\rho_0 h \frac{d\alpha}{dr} + \alpha \frac{dP}{dr}\right)}{\alpha r} = 0 \\
 & (-r+2m)\left(\rho_0 h \frac{d\alpha}{dr} + \alpha \frac{dP}{dr}\right) = 0 \\
 & (-r+2m)\rho_0 h \frac{d\alpha}{dr} + (-r+2m)\alpha \frac{dP}{dr} = 0 \\
 & \frac{dP}{dr} = -\frac{1}{(-r+2m)\alpha}(-r+2m)\rho_0 h \frac{d\alpha}{dr} \\
 & = -\frac{\rho_0 h}{\alpha} \frac{d\alpha}{dr} \\
 & = \rho_0 h a^2 \left[4\pi r(S_r v^r + P) + \frac{m}{r^2}\right] \\
 & = \rho_0 h a^2 \left[4\pi r P + \frac{m}{r^2}\right] \\
 & = -(\rho + P) \frac{m}{r^2} \left[1 + \frac{4\pi r^3 P}{m}\right] \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \\
 & = -(\rho + P) \frac{m}{r^2} \left(\frac{m + 4\pi r^3 P}{m}\right) \left(\frac{r - 2m}{r}\right)^{-1} \\
 & = -(\rho + P) \frac{m + 4\pi r^3 P}{r^2} \frac{r}{r - 2m} \\
 & \frac{dP}{dr} = -(\rho + P) \frac{m + 4\pi r^3 P}{r(r - 2m)}
 \end{aligned}$$

- Cálculo de  $G_{tt} = 8\pi T_{tt}$

$$\begin{aligned}
 & \frac{2\left[2rm\left(\frac{d\alpha}{dr}\right) + \alpha m - r^2\left(\frac{d\alpha}{dr}\right)\right]}{\alpha r^2(-r+2m)} = 8\pi \frac{P}{1 - \frac{2m}{r}} \\
 & 4rm\left(\frac{d\alpha}{dr}\right) + 2\alpha m - 2r^2\left(\frac{d\alpha}{dr}\right) = -8\pi\alpha r^3 P \\
 & \left(\frac{d\alpha}{dr}\right)(4rm - 2r^2) = -8\pi\alpha r^3 P - 2\alpha m \\
 & \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dr} = \frac{2m + 8\pi r^3 P}{2r^2 - 4rm} \\
 & \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dr} = \frac{m + 4\pi r^3 P}{r(r - 2m)}
 \end{aligned}$$



$$= -\frac{1}{\rho + P} \frac{dP}{dr}$$



## Referencias

- B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, T. Adams, P. Addesso, R. X. Adhikari, V. B. Adya, and et al. Gravitational Waves and Gamma-Rays from a Binary Neutron Star Merger: GW170817 and GRB 170817A. *Apjl*, 848: L13, October 2017. doi: 10.3847/2041-8213/aa920c. [6](#), [67](#), [79](#), [81](#), [86](#)
- Miguel Alcubierre. *Introduction to 3 + 1 Numerical relativity*. Oxford University Press, EU, 2008. [17](#)
- L. Baiotti, I. Hawke, P. J. Montero, F. Löffler, L. Rezzolla, N. Stergioulas, J. A. Font, and E. Seidel. Three-dimensional relativistic simulations of rotating neutron-star collapse to a Kerr black hole. *Prd*, 71(2):024035, January 2005. doi: 10.1103/PhysRevD.71.024035. [57](#), [62](#), [63](#)
- Thomas W. Baumgarte and Stuart L. Shapiro. *NUNERICAL RELATIVITY: Solving Einstein's Equations in the Computer*. Cambridge Univertsity Press,UK, UK, 2010. [17](#)
- C. Campuzano. Solución de vacio para espacios estacionarios con dos simetrias y conformalmente planos. Tesis de licenciatura, Universidad Autónoma de Puebla, 2 2014. [13](#)
- G. Carmona. *Termodinámica clásica*. Prensas de ciencias. UNAM. Fac. de Ciencias, 2007. ISBN 9789703244973. URL <https://books.google.com.mx/books?id=H6LEYgEACAAJ>. [10](#)

## REFERENCIAS

---

- S. Chandrasekhar. The Maximum Mass of Ideal White Dwarfs. , 74:81, July 1931. doi: 10.1086/143324. 3
- A. Cruz-Osorio. *Implementación numérica de la Magnetohidrodinámica ideal relativista*. PhD thesis, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, 7 2014. 48
- A. Cruz-Osorio, F. D. Lora-Clavijo, and F. S. Guzmán. Is the flip-flop behaviour of accretion shock cones on to black holes an effect of coordinates? *Mnras*, 426:732–738, October 2012. doi: 10.1111/j.1365-2966.2012.21794.x. 51
- Bernd Einfeldt. On godunov-type methods for gas dynamics. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 25(2):294–318, 1988. doi: 10.1137/0725021. URL <https://doi.org/10.1137/0725021>. 49
- J. A. Font, M. Miller, W. M. Suen, and M. Tobias. Three-dimensional numerical general relativistic hydrodynamics: Formulations, methods, and code tests. *Prd*, 61(4):044011, February 2000. doi: 10.1103/PhysRevD.61.044011. 24, 26
- José A. Font. Numerical hydrodynamics and magnetohydrodynamics in general relativity. *Living Reviews in Relativity*, 11(1):7, Sep 2008. ISSN 1433-8351. doi: 10.12942/lrr-2008-7. URL <https://doi.org/10.12942/lrr-2008-7>. 43
- Bruno Giacomazzo and Rosalba Perna. Formation of stable magnetars from binary neutron star mergers. *The Astrophysical Journal Letters*, 771(2):L26, 2013. URL <http://stacks.iop.org/2041-8205/771/i=2/a=L26>. 71, 74
- S.K. Godunov. A Difference Scheme for Numerical Solution of Discontinuous Solution of Hydrodynamic Equations. *Mat. Sb., Nov. Ser.*, 47:271–306, 1959. 46
- Ericourgoulhon. *3 + 1 Formalism in General Relativity: Bases of Numerical Relativity*. Springer: Lecture Notes in Physics, Vol. 846, 2012. 17
- F. S. Guzman, F. D. Lora-Clavijo, and M. D. Morales. Revisiting spherically symmetric relativistic hydrodynamics. *ArXiv e-prints*, December 2012. 24, 55, 56, 57, 63
- F.S. Guzmán. Solución de la ecuación de onda como un problema de valores iniciales usando diferencias finitas. *Revista mexicana de física E*, 56:51 – 68, 06

- 
2010. ISSN 1870-3542. URL [http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci\\_arttext&pid=S1870-35422010000100007&nrm=iso](http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1870-35422010000100007&nrm=iso). 60
- Amiram Harten, Peter D. Lax, and Bram van Leer. *On Upstream Differencing and Godunov-Type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws*, pages 53–79. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1997. ISBN 978-3-642-60543-7. doi: 10.1007/978-3-642-60543-7\_4. URL [https://doi.org/10.1007/978-3-642-60543-7\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-642-60543-7_4). 49
- A. Hewish, S. J. Bell, J. D. H. Pilkington, P. F. Scott, and R. A. Collins. Observation of a Rapidly Pulsating Radio Source. *Nat*, 217:709–713, February 1968. doi: 10.1038/217709a0. 5
- A.N. Hurtado and F.C.D. Sánchez. *Métodos numéricos: aplicados a la ingeniería*. Compañía Editorial Continental, 2002. ISBN 9789702402589. URL <https://books.google.com.pe/books?id=3mvSAAAACAAJ>. 24, 35
- J. M. Lattimer. The Nuclear Equation of State and Neutron Star Masses. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, 62:485–515, November 2012. doi: 10.1146/annurev-nucl-102711-095018. 6, 8, 81, 86
- J. M. Lattimer and M. Prakash. Neutron Star Structure and the Equation of State. *Apj*, 550:426–442, March 2001. doi: 10.1086/319702. 13
- R.J. LeVeque. *Numerical Methods for Conservation Laws*. Lectures in Mathematics ETH Zürich, Department of Mathematics Research Institute of Mathematics. Birkhäuser Basel, 1992. ISBN 9783764327231. URL <https://books.google.com.mx/books?id=3WhqLPcMdPsC>. 42
- F. D. Lora-Clavijo and F. S. Guzmán. Axisymmetric Bondi-Hoyle accretion on to a Schwarzschild black hole: shock cone vibrations. *Mnras*, 429:3144–3154, March 2013. doi: 10.1093/mnras/sts573. 51
- F. D. Lora-Clavijo, F. S. Guzmán, and A. Cruz-Osorio. PBH mass growth through radial accretion during the radiation dominated era. *Jcap*, 12:015, December 2013. doi: 10.1088/1475-7516/2013/12/015. 51
- F. D. Lora-Clavijo, A. Cruz-Osorio, and F. S. Guzmán. CAFE: A New Relativistic MHD Code. *Apjs*, 218:24, June 2015. doi: 10.1088/0067-0049/218/2/24. 50

## REFERENCIAS

---

- J. R. Oppenheimer and G. M. Volkoff. On massive neutron cores. *Phys. Rev.*, 55:374–381, Feb 1939. doi: 10.1103/PhysRev.55.374. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.55.374>. 18
- Dany Page and Sanjay Reddy. Dense matter in compact stars: Theoretical developments and observational constraints. *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.*, 56:327–374, 2006. 3, 5
- L. Rezzolla, E. R. Most, and L. R. Weih. Using gravitational-wave observations and quasi-universal relations to constrain the maximum mass of neutron stars. *ArXiv e-prints*, November 2017. 81, 82, 84, 85
- P. L. Roe. Characteristic-based schemes for the Euler equations. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 18:337–365, 1986. doi: 10.1146/annurev.fl.18.010186.002005. 46
- M. N. O. Sadiku and C. N. Obiozor. A simple introduction to the method of lines. *International Journal of Electrical Engineering Education*, 37(3):282–296, 2000. doi: 10.7227/IJEEE.37.3.8. URL <https://doi.org/10.7227/IJEEE.37.3.8>. 40
- P Salas and MA Solís. Estrellas de neutrones. *Revista mexicana de física E*, 52(1):37–46, 2006. 5
- Bernard Schutz. *A First Course in General Relativity*. Cambridge University Press, EU, 2009. 13
- Chi-Wang Shu and Stanley Osher. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes. *J. Comput. Phys.*, 77(2):439–471, August 1988. ISSN 0021-9991. doi: 10.1016/0021-9991(88)90177-5. URL [http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991\(88\)90177-5](http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991(88)90177-5). 38
- Z. Simay. Vom neutronenstern zum hybridstern. Master’s thesis, Goethe Universität, 8 2017. 4
- Richard C. Tolman. Static solutions of einstein’s field equations for spheres of fluid. *Phys. Rev.*, 55:364–373, Feb 1939. doi: 10.1103/PhysRev.55.364. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.55.364>. 18
- E.F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction*. Springer Berlin Heidelberg, 2009. ISBN 9783540498346. URL <https://books.google.com.mx/books?id=SqEjX0um8o0C>. 32, 43, 45

Bram van Leer. Towards the ultimate conservative difference scheme iii. upstream-centered finite-difference schemes for ideal compressible flow. 23:263–275, 03 1977.

[48](#)

Olindo Zanotti, Luciano Rezzolla, Luca Del Zanna, and Carlos Palenzuela. Electromagnetic counterparts of recoiling black holes: general relativistic simulations of non-keplerian discs. *Astronomy & Astrophysics*, 523:A8, 2010. [25](#)