

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

BACHELOR ARBEIT

Gluelump Massenberechnung in der
SU(2) Yang-Mills Theorie

Philipp Wolf

SEPTEMBER 2012

Die vorliegende Arbeit beschreibt die numerische Massenberechnung von Gluelumps in der adjungierten Darstellung der $SU(2)$ Yang-Mills Theorie auf dem Gitter. Zusätzlich wird als physikalische Observable die String Breaking Distance qualitativ verifiziert.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theorie	3
2.1	Yang-Mills Theorie auf dem Gitter	3
2.1.1	Pfadintegrale zur Bestimmung von Vakuumerwartungswerten	3
2.1.2	Eichinvarianz auf dem Gitter	3
2.2	Gluelump Massenspektroskopie	6
2.2.1	Gluelump Operator	6
2.2.2	Korrelationsfunktion	8
2.2.3	Berechnung auf dem Gitter	9
3	Numerische Berechnungen	11
3.1	APE-Smearing	11
3.2	Ergebnis der Gluelump-Masse	12
3.3	String Breaking Distance	15
3.3.1	Das adjungierte statische Quark-Antiquark-Potential	15
3.3.2	Abschätzung der String Breaking Distance	16
4	Diskussion der Ergebnisse	19

1 Einleitung

Bei der Quantenchromodynamik (QCD) handelt es sich, wie auch bei der Quantenelektrodynamik (QED), um eine sogenannte Eichtheorie. Der Name rührt daher, dass die Lagrangedichte der Theorie invariant unter gewissen *lokalen* Transformationen ist. Durch die Invarianz der QED bezüglich der abelschen Eichgruppe $U(1)$ wurde dieses Konzept auch auf andere Gruppen angewandt und hat sich als ein fundamentales Prinzip erwiesen. So ist die Quantenchromodynamik invariant bezüglich der nicht-abelschen Eichgruppe $SU(3)$ und ist als Standard-Modell der starken Wechselwirkung anerkannt. Die Gittereichtheorie bietet eine effiziente Methode, Berechnungen in Quantenfeldtheorien zu realisieren. So können Rechnungen in der QCD mit kontrollierbarem statistischem Fehler durchgeführt werden. Dazu wird die Raumzeit unter Erhaltung der Eichinvarianz diskretisiert und Kalkulationen mittels Monte-Carlo-Simulation ausgeführt. Die Fehler können durch Verkleinern des Gitterabstandes gesenkt werden, was jedoch eine höhere Rechenzeit in Anspruch nimmt. Da der Rechenaufwand in der QCD prinzipiell sehr hoch ist, werden oftmals neue Probleme nicht in voller QCD, sondern zunächst in einer unter $SU(2)$ Transformationen invarianten Theorie, untersucht. Die sogenannte $SU(2)$ Yang-Mills Theorie beschreibt zwar Teilchen mit nur zwei Farbfreiheitsgraden und nicht dreien, wie die QCD, weist aber dennoch erhebliche Ähnlichkeiten zu ihr auf. So besitzen beide die Eigenschaft des Confinements, also die Tatsache, dass Teilchen mit Farbladung nicht isoliert vorkommen. Da insbesondere die Rechenzeit stark verkürzt wird und die Vorgehensweise analog zum Fall der $SU(3)$ Eichgruppe ist, bietet die $SU(2)$ Yang-Mills Theorie einen sinnvollen Einstieg in die Gittereichtheorie.

Ziel der Arbeit ist die Masse eines Gluelumps, einem Gebilde aus einem statischen Quark bzw. einer Farbladung in adjungierter Darstellung, welches von einer Wolke aus Gluonen umgeben ist, zu bestimmen. Um eine physikalisch relevante Observable zu erhalten, soll damit die String Breaking Distance qualitativ verifiziert werden. Das String Brechen bezeichnet in voller QCD einen Prozess, bei dem zwei Mesonen in Folge der Separation eines Quark-Antiquark-Paares entstehen. Ähnliches kann in der $SU(2)$ Yang-Mills Theorie beobachtet werden, nur dass hierbei zwei Gluelumps erzeugt werden.

Zur Berechnung der Gluelump-Masse wird zunächst ein geeigneter Operator konstruiert, aus welchem sich dann mit Hilfe der Korrelationsfunktion die Masse extrahieren lässt.

Dazu muss ein Pfadintegral über alle Feldkonfigurationen ausgewertet werden, wozu sich ein Monte-Carlo-Verfahren anbietet. Schließlich wird die String Breaking Distance aus dem Schnittpunkt des statischen adjungierten Quark-Antiquark-Potential mit der zweifachen Gluelump-Masse abgeschätzt.

Beginnend mit einem kurzen Abriss über die physikalischen Ausdrücke auf dem Gitter werden, nach Erläuterungen zum mathematischen Konzept der Massenspektroskopie, die numerischen Berechnungen diskutiert. Wobei die Hauptbemühungen nicht in der exakten Bestimmung physikalischer Observablen liegen, sondern in deren Reproduktion im Rahmen der Fehler.

Die theoretischen Aspekte sind hauptsächlich in Anlehnung zu [1, 2, 7] entstanden, während sich die Vorgehensweise auf [3, 4, 5] bezieht.

Parallel zu dieser Bachelor Arbeit sind zwei weitere entstanden, welche auch für dieses Thema grundlegende Theorie enthalten. So kann die Kontinuums Yang-Mills Theorie in [9] nachgeschlagen werden, wohingegen technische Aspekte wie die Monte-Carlo-Simulation in [10] zu finden sind.

2 Theorie

2.1 Yang-Mills Theorie auf dem Gitter

Viele physikalische Observablen, wie Massen, Zerfallskonstanten oder Formfaktoren lassen sich mit Hilfe von Vakuumerwartungswerten, welche mit einem Pfadintegral berechnet werden können, bestimmen. Die Auswertung des Integrals ist in der Regel aber nicht mehr analytisch möglich. Durch eine Diskretisierung der Raumzeit kann das Pfadintegral jedoch numerisch berechnet werden, wozu die physikalischen Kontinuums Ausdrücke auf das Gitter angepasst werden müssen, wobei sich im naiven Kontinuumslimites (Gitterabstand $a \rightarrow 0$) wieder die ursprünglichen Formeln ergeben sollten.

2.1.1 Pfadintegrale zur Bestimmung von Vakuumerwartungswerten

Neben dem kanonischen Quantisierungsformalismus lassen sich Felder auch mit der Pfadintegralmethode quantisieren, was dazu führt, dass Vakuumerwartungswerte mittels numerischer Integration bestimmt werden können. Es wird sich zeigen, dass zur Gluelump Massenbestimmung folgender Ausdruck ausgewertet werden muss:

$$\langle \Omega | O(U) | \Omega \rangle = \int DU O(U) e^{-S_{gluon}[U]} \quad (2.1)$$

Dabei wurde die euklidische Version des Pfadintegrals benutzt.[2] Auch im Folgenden werden stets Ausdrücke in euklidischer Zeit angegeben.

Auf dem Gitter geht das Integral in Gl. (2.1) über in eine Summation diskreter Gitterpunkte. Für weitere Details siehe [1]. Zudem wird der Operator und die Wirkung durch entsprechende Gitterausdrücke ersetzt, was in den kommenden Abschnitten dargestellt wird.

2.1.2 Eichinvarianz auf dem Gitter

Die grundlegende Idee der Eichtheorie besteht darin, eine lokale Invarianz der Wirkung unter bestimmten Symmetrie Transformationen zu fordern. In der SU(2) Yang-Mills Theorie wird eine Wirkung konstruiert, die unter SU(2) Transformationen invariant ist.

Dazu muss die Ableitung beim Materiefeld mit Hilfe eines Eichfeldes \mathcal{A}_μ durch die kovariante Ableitung ersetzt werden. Zusätzlich wird noch ein kinetischer Term hinzugefügt, der die Propagation des Eichfeldes, im Falle von Yang-Mills Theorie die des Gluonenfeldes, beschreibt. Es wird sich herausstellen, dass nur dieser kinetische Term

$$S_{gluon} = \frac{1}{2} \text{Tr} \int d^4x \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}, \quad \mathcal{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^i \frac{\sigma_i}{2} \quad (2.2)$$

im Pfadintegral zur Gluelump Massenberechnung auftaucht, daher wird seine Gitterversion in diesem Abschnitt diskutiert.

In der SU(2) Yang-Mills Theorie betrachtet man ein Dublett von Dirac-Feldern

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

und fordert eine lokale Transformationsinvarianz der Wirkung unter SU(2) Matrizen. Wobei sich das Farbdublett, wie folgt, transformiert:

$$\begin{aligned} \Psi(x) &\longrightarrow G(x) \Psi(x) \\ \bar{\Psi}(x) &\longrightarrow \bar{\Psi}(x) G(x)^{-1} \end{aligned}$$

mit $G(x) = \exp(i\alpha(x)^i \frac{\sigma^i}{2}) \in SU(2)$.

Damit auch Produkte von Feldern an verschiedenen Orten $\bar{\Psi}(x)\Psi(y)$, wie sie beispielsweise in der Ableitung auftauchen, invariant sind, wird eine Größe $U(x,y)$ eingeführt:

$$U(x,y) = e^{ig \int_x^y dz^\mu \mathcal{A}_\mu(z)}, \quad \mathcal{A}_\mu \equiv A_\mu^i \frac{\sigma^i}{2} \quad (2.4)$$

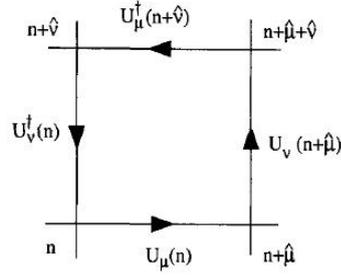
Mit dem infinitesimalen Transformationsverhalten vom Eichfeld

$$\mathcal{A}_\mu \longrightarrow \mathcal{A}_\mu - \frac{1}{g} (\partial_\mu \alpha(x)^i) \frac{\sigma^i}{2} + i[\alpha(x)^i \frac{\sigma^i}{2}, \mathcal{A}_\mu] \quad (2.5)$$

transformiert sich $U(x,y)$ wie:

$$U(x,y) \longrightarrow G(x)U(x,y)G(y)^{-1} \quad (2.6)$$

wodurch der Ausdruck $\bar{\Psi}(x)U(x,y)\Psi(y)$ invariant wird. Betrachtet man nun die infinitesimale Version von Gl. (2.4) auf dem Gitter, welche auch als **Links** oder **Link-Variablen** bezeichnet werden,

Abbildung 2.1: Plakette in $\mu - \nu$ Ebene. [1]

$$U(n, n + \hat{\mu}) \approx e^{igaA_\mu(n)} \equiv U_\mu(n), \quad \hat{\mu} \equiv \hat{e}_\mu \quad (2.7)$$

so lässt sich damit eine weitere wichtige eichinvariante Größe, die sogenannte **Plakette** $U_{\mu\nu}(n)$, konstruieren. Sie ergibt sich aus dem Produkt vier benachbarter Link-Variablen, die zusammen ein Quadrat bilden, siehe Abb. 2.1.

$$U_{\mu\nu}(n) = U_\mu(n)U_\nu(n + \hat{\mu})U_\mu^\dagger(n + \hat{\nu})U_\nu^\dagger(n) \quad (2.8)$$

Um auch bei nicht kommutierenden Matrizen, wie dies bei Elementen der $SU(2)$ der Fall ist, die Invarianz von Gl. (2.8) zu gewährleisten, muss noch die Spur genommen werden. Entwickelt man das Eichfeld in Gl. (2.8) in erster Ordnung um n , so findet man unter Berücksichtigung der Baker-Campbell-Hausdorff Formel: $e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\dots}$:

$$U_{\mu\nu}(n) = e^{iga^2\mathcal{F}_{\mu\nu}(n)} \quad (2.9)$$

mit $\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu]$. Damit ist es möglich eine diskrete Version des kinetischen Terms des Eichfeldes aufzuschreiben, welche nur noch von den Plaketten bzw. Links abhängt.

$$S_{gluon}[U] = \frac{4}{g^2} \sum_P [1 - \frac{1}{4}\text{Tr}(U_P + U_P^\dagger)] = \underbrace{\frac{4}{g^2} \sum_P [1 - \frac{1}{2}\text{Tr}(U_P)]}_{\equiv \beta} \quad (2.10)$$

Dabei wird über alle sich unterscheidenden Plaketten U_P summiert. Um den Zusammenhang zwischen Gl. (2.2) und Gl. (2.10) zu verdeutlichen, führt man eine Taylor-Entwicklung 2. Ordnung durch:

$$\begin{aligned}
& \frac{4}{g^2} \sum_P \left[1 - \frac{1}{4} \text{Tr}(U_P + U_P^\dagger) \right] \equiv \frac{4}{g^2} \sum_n \sum_{\mu < \nu} \left[1 - \frac{1}{4} \text{Tr}(U_{\mu\nu} + U_{\mu\nu}^\dagger) \right] \\
&= \frac{4}{g^2} \sum_n \sum_{\mu < \nu} \left[1 - \frac{1}{4} \text{Tr} \left(\mathbb{1} + i g a^2 \mathcal{F}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^2 a^4 \mathcal{F}_{\mu\nu}^2 + \mathbb{1} - i g a^2 \mathcal{F}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^2 a^4 \mathcal{F}_{\mu\nu}^2 + \mathcal{O}(a^6) \right) \right] \\
&\approx \frac{1}{2} a^4 \sum_n \sum_{\mu, \nu} \text{Tr}(\mathcal{F}_{\mu\nu}^2) \xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{1}{2} \text{Tr} \int d^4x \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

2.2 Gluelump Massenspektroskopie

In diesem Abschnitt wird erläutert, wie sich ein Operator erstellen lässt, aus welchem sich dann mittels Korrelationsfunktion die Masse eines Gluelumps, ein Konstrukt eines Quarks in adjungierter Darstellung und Gluonen, extrahieren lässt. Abschließend wird die Berechnung auf dem Gitter diskutiert.

2.2.1 Gluelump Operator

Um einen physikalisch sinnvollen Operator zu konstruieren, sollte dieser in jedem Falle eichinvariant sein. Ein Quark bzw. eine Farbladung in der fundamentalen Darstellung transformiert sich in der Yang-Mills Theorie unter Eichtransformation wie folgt:

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} \longrightarrow g(\alpha) \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}, \quad g(\alpha) = \exp \left(i \alpha_a \frac{\sigma^a}{2} \right) \in \text{SU}(2) \quad (2.11)$$

Mit diesem Transformationsverhalten ist es unmöglich einen eichinvarianten Operator, welcher aus einem Quark und Gluonen besteht, zu konstruieren. Betrachtet man die Farbladung aber in ihrer adjungierten Darstellung, so ergibt sich ein anderes Transformationsgesetz, wodurch es möglich wird einen eichinvarianten Operator zu erhalten. Die adjungierte Darstellung der SU(2) ist die Gruppe der speziellen, orthogonalen Matrizen in drei Dimensionen SO(3). Da es sich jetzt um 3×3 Matrizen handelt, besitzt das adjungierte Quark einen zusätzlichen Freiheitsgrad mit folgendem Transformationsverhalten:

$$Q_a = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix} \longrightarrow v(\alpha) \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix}, \quad v(\alpha) = \exp \left(i \alpha_a \hat{T}^a \right) \in \text{SO}(3) \quad (2.12)$$

Nun wird gezeigt, wie sich Gl. (2.12) umschreiben lässt zu:

$$Q_{adj} \longrightarrow g(\alpha) Q_{adj} g(\alpha)^\dagger, \quad \text{mit } Q_{adj} = Q_a \frac{\sigma^a}{2} \quad (2.13)$$

Dabei wird benutzt:

$$\text{Tr}(Q_{adj} \sigma^b) = \text{Tr} \left(Q_a \frac{\sigma^a}{2} \sigma^b \right) = \frac{Q_a}{2} \underbrace{\text{Tr}(\sigma^a \sigma^b)}_{2\delta_{ab}} = Q_b$$

Ausgehend von Gl. (2.13) ergibt sich:

$$Q_b = \text{Tr}(Q_{adj} \sigma^b) \longrightarrow \text{Tr} \left(\exp \left(i\alpha_a \frac{\sigma^a}{2} \right) Q_c \frac{\sigma^c}{2} \exp \left(-i\alpha_d \frac{\sigma^d}{2} \right) \sigma^b \right)$$

für infinitesimale Transformationen:

$$\begin{aligned} Q_b &\longrightarrow \text{Tr} \left(\left(\mathbb{1} + i\alpha_a \frac{\sigma^a}{2} \right) Q_c \frac{\sigma^c}{2} \left(\mathbb{1} - i\alpha_d \frac{\sigma^d}{2} \right) \sigma^b \right) \\ &\longrightarrow \text{Tr} \left(\left(Q_c \frac{\sigma^c}{2} + i\alpha_a \frac{\sigma^a}{2} Q_c \frac{\sigma^c}{2} - iQ_c \frac{\sigma^c}{2} \alpha_d \frac{\sigma^d}{2} + \mathcal{O}(\alpha^2) \right) \sigma^b \right) \\ &\approx Q_b + \text{Tr} \left(\frac{i}{4} \alpha_a Q_c \underbrace{[\sigma^a, \sigma^c]}_{2i \varepsilon_{acd} \sigma^d} \sigma^b \right) = Q_b + \text{Tr} \left(\frac{-i}{2} \alpha_a Q_c (-i \varepsilon_{acd}) \sigma^d \sigma^b \right) \\ &= Q_b - \frac{i}{2} \alpha_a Q_c (-i \varepsilon_{acd}) \underbrace{\text{Tr}(\sigma^d \sigma^b)}_{2\delta_{db}} = Q_b - i\alpha_a Q_c (-i \varepsilon_{acb}) \\ &= Q_b + i\alpha_a Q_c \underbrace{(-i \varepsilon_{abc})}_{(\hat{T}_a)_{bc}} = Q_b + i\alpha_a (\hat{T}_a)_{bc} Q_c \end{aligned}$$

Dies ist aber gerade die infinitesimale Form von Gl. (2.12) in Komponentenschreibweise.

Dabei wurde die Definition der Generatoren der adjungierten Darstellung

$(\hat{T}_a)_{bc} = -if_{abc}$ ausgenutzt [11], wobei die Strukturkonstanten der SU(2) gerade dem Levi-Civita Tensor entsprechen.

Nun ist es möglich einen eichinvarianten Operator bestehend aus einer Farbladung und dem Gluonen-Feld aufzuschreiben. Dieses Gebilde wird als leichtester **Gluelump** bezeichnet und besitzt positive Parität und Drehimpulsquantenzahl 1:

$$\mathcal{O}(x) = \text{Tr} (Q_{adj}(x) B_x(x)), \quad \text{mit } B_x(x) = F_{23}^a \frac{\sigma^a}{2} \quad (2.14)$$

Das Transformationsverhalten von $B(x)$ ist

$$B(x) \longrightarrow g(x) B(x) g(x)^\dagger \quad (2.15)$$

damit ist $\mathcal{O}(x)$ eichinvariant:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(x) &\longrightarrow \text{Tr} \left(g(x) Q_{adj}(x) \underbrace{g(x)g(x)^\dagger}_{=1} F_{23}^a \frac{\sigma^a}{2} g(x)^\dagger \right) \\ &= \mathcal{O}(x) \end{aligned}$$

2.2.2 Korrelationsfunktion

Die Masse lässt sich mit Hilfe der Korrelationsfunktion

$$\mathcal{C}(\tau) = \langle \Omega | \mathcal{O}^\dagger(\tau) \mathcal{O}(0) | \Omega \rangle \quad (2.16)$$

berechnen. Dabei ist $|\Omega\rangle$ der Grund- bzw. Vakuumzustand. Durch Zeitentwicklung des Operators und Einfügen einer vollständigen Eins aus Energieeigenzuständen ergibt sich:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | \mathcal{O}^\dagger(\tau) \mathcal{O}(0) | \Omega \rangle &= \sum_n \langle \Omega | e^{H\tau} \mathcal{O}^\dagger(0) | n \rangle \langle n | e^{-H\tau} \mathcal{O}(0) | \Omega \rangle \\ &= \sum_n |\langle n | \mathcal{O} | \Omega \rangle|^2 \cdot e^{-(E_n - E_\Omega)\tau} \end{aligned}$$

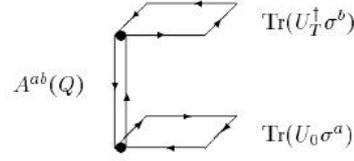
Im Limes großer Zeiten werden höher angeregte Energieniveaus unterdrückt, so dass in der Summe nur der Term mit dem Grundzustand $|0\rangle$ übrig bleibt:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \langle \Omega | \mathcal{O}^\dagger(\tau) \mathcal{O}(0) | \Omega \rangle \approx |\langle 0 | \mathcal{O} | \Omega \rangle|^2 \cdot e^{-(E_0 - E_\Omega)\tau} \quad (2.17)$$

Die Masse $m = E_0 - E_\Omega$ kann so aus dem exponentiellen Abfall der Korrelationsfunktion bei großen Zeiten berechnet werden.

$$\hat{m} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \ln \underbrace{\left(\frac{\mathcal{C}(\hat{\tau})}{\mathcal{C}(\hat{\tau} + 1)} \right)}_{\equiv \hat{m}_{eff}(\hat{\tau})} \quad (2.18)$$

Dabei wird $\hat{m}_{eff}(\hat{\tau})$ als **effektive Masse** bezeichnet. $\hat{m} \equiv a \cdot m$ und $\hat{\tau} \equiv \tau/a$ stellen die dimensionslosen Größen dar, wie sie auf dem Gitter berechnet werden.

Abbildung 2.2: Veranschaulichung von $\tilde{\mathcal{O}}$ [3]

Die Korrelationsfunktion lässt sich wiederum durch ein Pfadintegral ausdrücken [2].

$$\langle \Omega | \mathcal{O}^\dagger(\tau) \mathcal{O}(0) | \Omega \rangle = \frac{1}{Z} \int Dy \mathcal{O}^\dagger(\tau) \mathcal{O}(0) e^{-S_E[y]} \quad (2.19)$$

2.2.3 Berechnung auf dem Gitter

Um die effektive Masse numerisch zu bestimmen, muss Gl. (2.19) ausgewertet werden. Dazu wird der Integrand durch entsprechende Gitterausdrücke ersetzt und mittels Haar Maß über die Link Variablen integriert.

$$\frac{1}{Z} \int DU \int DQD\bar{Q} \mathcal{O}^\dagger(\tau) \mathcal{O}(0) e^{-S_Q} e^{-S_{gluon}} \quad (2.20)$$

Hier ist $S_Q = \int d^4x \bar{Q}(\gamma_\mu D_\mu + M)Q$ der massenbehaftete Term der Yang-Mills Wirkung.

Die Integration über das statische Quark und Antiquark kann im Rahmen der *Heavy Quark Effective Theory* analytisch gelöst werden. Damit geht Gl. (2.20) über in:

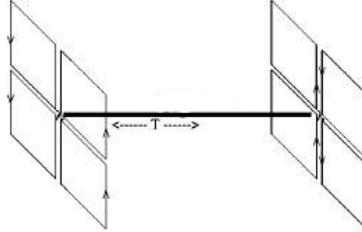
$$\frac{1}{Z} \int DU \tilde{\mathcal{O}} e^{-S_{gluon}} \quad (2.21)$$

mit

$$\tilde{\mathcal{O}} = \text{Tr}(U_0 \sigma_a) \underbrace{\frac{1}{2} \text{Tr}(V^\dagger \sigma_b V \sigma_a)}_{A^{ab}} \text{Tr}(U_T^\dagger \sigma_a) \quad (2.22)$$

dabei ist U_0 eine Plakette zum Zeitpunkt $T=0$ und U_T zum Zeitpunkt T .

V bezeichnet ein Produkt von Links in Zeitrichtung und verbindet beide Plaketten wie in Abb. 2.2 zu sehen.

Abbildung 2.3: Veranschaulichung von \tilde{O} [4]

Aus Symmetriegründen ist es sinnvoll drei weitere Plaketten (V,W,X) in den Punkten $T=0$ und T einzufügen, da so der Operator einen Zustand mit wohldefinierter Drehimpulsquantenzahl: 1 beschreibt. Der Operator, in Abb. 2.3 zu sehen, nimmt dann folgende Form an:

$$\tilde{O} = \text{Tr}((U_0 + V_0 + W_0 + X_0) \sigma_a) A^{ab} \text{Tr}((U_T + V_T + W_T + X_T) \sigma_b) \quad (2.23)$$

Das Pfadintegral (Gl. (2.21)) kann nun mit einem **Monte Carlo Verfahren** numerisch berechnet werden. Dazu werden Link-Variablen mit einer Wahrscheinlichkeitsgewichtung von $e^{-S_{gluon}[U]}$ erzeugt.[6] Einen Wert für das Integral erhält man nun durch Mittelung des Operators \tilde{O} über möglichst viele Eichlinkkonfigurationen.

3 Numerische Berechnungen

3.1 APE-Smearing

Bei der Berechnung der Gluelump-Masse sowie dem adjungierten Quark-Antiquark-Potential wurde ein sogenanntes **APE-Smearing-Verfahren** angewandt. Anschaulich gesprochen werden dabei die Links des Operators sukzessive *verschmiert*, sodass der Zustand $\mathcal{O}|\Omega\rangle$ einen möglichst großen Überlapp zum Grundzustand im entsprechendem Sektor besitzt. Dies führt dazu, dass Überläpfe mit höheren Energieeigenzuständen im Idealfall erheblich kleiner sind:

$$|\langle 1|\mathcal{O}|\Omega\rangle|^2, \dots, |\langle 2|\mathcal{O}|\Omega\rangle|^2, |\langle N|\mathcal{O}|\Omega\rangle|^2 \ll |\langle 0|\mathcal{O}|\Omega\rangle|^2 \quad (3.1)$$

Dann würden bereits für kleine Zeiten die höheren Summanden der Korrelationsfunktion unterdrückt (siehe Glg. (3.2)) und Gl. (2.18) würde schon für kleinere Zeiten gelten, was eine schnellere Konvergenz der effektiven Masse auf ihr Plateau zufolge hätte.

$$\begin{aligned} \langle \Omega | \mathcal{O}^\dagger(\tau) \mathcal{O}(0) | \Omega \rangle &= \sum_n \underbrace{|\langle n | \mathcal{O} | \Omega \rangle|^2}_{\equiv c_n} e^{-(E_n - E_\Omega)\tau} \\ &= c_0 e^{-m\tau} + c_1 e^{-(E_1 - E_\Omega)\tau} + \dots + c_N e^{-(E_N - E_\Omega)\tau} \\ &\stackrel{(3.1)}{\approx} c_0 e^{-m\tau} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dadurch kann erreicht werden, dass die Gluelump-Masse schon mit effektiven Massen bei kleineren Zeitseparationen bestimmt werden kann. Dies wird sich als äußerst zweckmäßig erweisen, da effektive Massen bei größeren Zeitschritten mit deutlich zunehmenden Fehlern behaftet sind und so wenig Rückschlüsse auf die Gluelump-Masse zulassen.

Das Verschmieren der Links wird realisiert, indem jeder Link durch vier Link-Schleifen ergänzt wird (siehe Abb. 3.1). Dieser Vorgang wird dann iterativ wiederholt, d. h. die gerade hinzugefügten Links der Schleifen werden wieder jeweils durch vier Schlau-

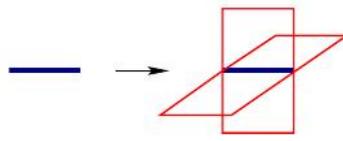


Abbildung 3.1: Link wird durch vier Link-Schleifen ergänzt. [12]

fen ergänzt. Neben der Anzahl der Iterationen kann auch die Gewichtung der Link-Schleifen α manuell im Programm eingestellt werden. In den folgenden Berechnungen wurde $\alpha = 0.5$ gesetzt. Um die Anzahl der Smearing-Schritte zu ermitteln, welche den größtmöglichen Überlapp zum Grundzustand erzeugen, wird wie in Abb. 3.2 die effektive Masse bei $\tau = 0$ in Abhängigkeit der Smearing Iterationen abgetragen. Einen möglichst guten Überlapp findet man für kleine effektive Massen, da diese dann schon näher an der Gluelump-Masse liegen. Dabei ist es wichtig die effektive Masse bei $\tau = 0$ zu betrachten, da bei größeren Zeitseparationen die Exponentialfunktion die höheren Terme der Korrelationsfunktion bereits unterdrückt und so kein deutlicher Unterschied zwischen den Smearing-Schritten zu sehen wäre. In den folgenden Berechnungen wurde die Anzahl der Smearing Iterationen stets auf 4 gesetzt, obwohl mit Abb. 3.2 nicht auszuschließen ist, dass 5 Smearing-Schritte einen leicht größeren Überlapp geliefert hätten.

Neben dem APE-Smearing wurde auch das sogenannte **HYP-Smearing** verwendet, welches die Link-Variablen in zeitlicher Richtung verschmiert mit dem Ziel die Selbstenergie des statischen Quarks zu reduzieren.

3.2 Ergebnis der Gluelump-Masse

Zur Berechnung der Gluelump-Masse wurden Gitter mit Ausdehnung 16×16^3 verwendet. Es wurden 77000 solcher Eichfeldkonfigurationen mit einem **Heatbath-Algorithmus** [6] erzeugt, wobei jedoch nur jede fünfte tatsächlich benutzt wurde, um stochastische Unabhängigkeit zu gewährleisten. Außerdem ist in der **Standard Wilson Wirkung** (Gl. (2.10)) $\beta = 2.3$ gewählt worden. Dies entspricht einem Gitterabstand von $a \approx 0.17$ fm, wobei folgende Formel aus [5] verwendet wurde, welche auf dem statischen Quark-Antiquark-Potential in fundamentaler Darstellung basiert:

$$a(\beta) = 400 \exp \left[-\frac{\beta \ln(2)}{0.205} \right] \text{ fm} \quad (3.3)$$

In Tabelle 3.1 sind die berechneten Werte für Korrelationsfunktion und effektive Masse angegeben. Dabei sind alle Fehler mit Hilfe von **Jackknife**[10] abgeschätzt worden.

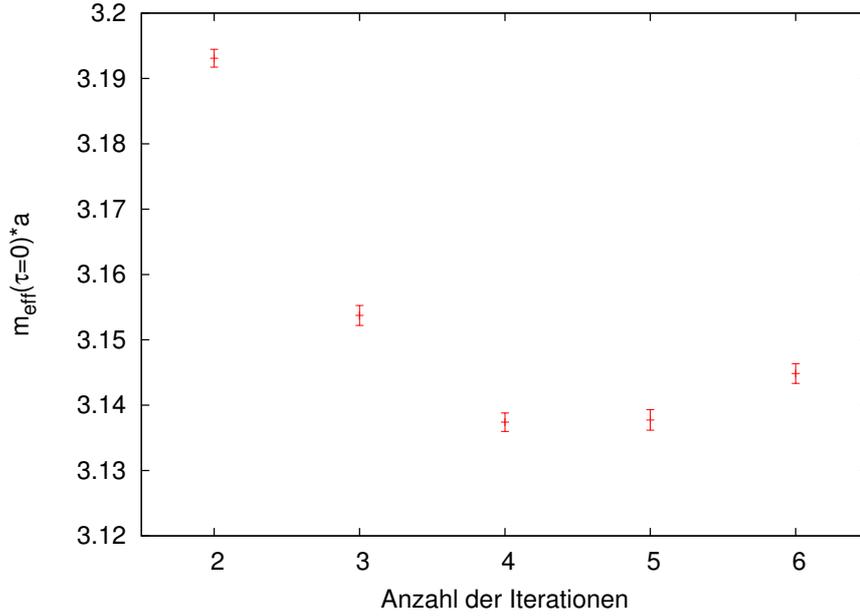


Abbildung 3.2: Zur Bestimmung der Smearing-Schritte

Die Abbildungen 3.3 und 3.4 zeigen die effektive Gluelump-Masse und den Massen-fit. Hierbei ist zu beachten, dass alle Werte in Gittereinheiten dargestellt sind.

In den Abbildungen ist zu erkennen, dass die effektive Masse im Rahmen des Fehlers eine Konstante erreicht hat. Diese entspricht gerade der Masse des Gluelumps.

Für den Massen-fit aus Abb. 3.4 wurde eine Konstante an die effektiven Massen bei der 3. und 4. Zeitseparation gefittet. Dies ergab für den Wert der Konstanten 1.165 ± 0.02

τ	$C(\tau)$	σ	τ	$m_{\text{eff}}(\tau) \cdot a$
0	7.785868e-01	1.266984e-04	0	2.45496(31)
1	6.685454e-02	2.415575e-05	1	1.20791(89)
2	1.997752e-02	1.931870e-05	2	1.1867(28)
3	6.097434e-03	1.756570e-05	3	1.1614(84)
4	1.908778e-03	1.630828e-05	4	1.170(26)
5	5.927161e-04	1.570632e-05	5	1.304(96)
6	1.608776e-04	1.552079e-05		

Tabelle 3.1: Werte von Korrelationsfunktion und effektiver Masse

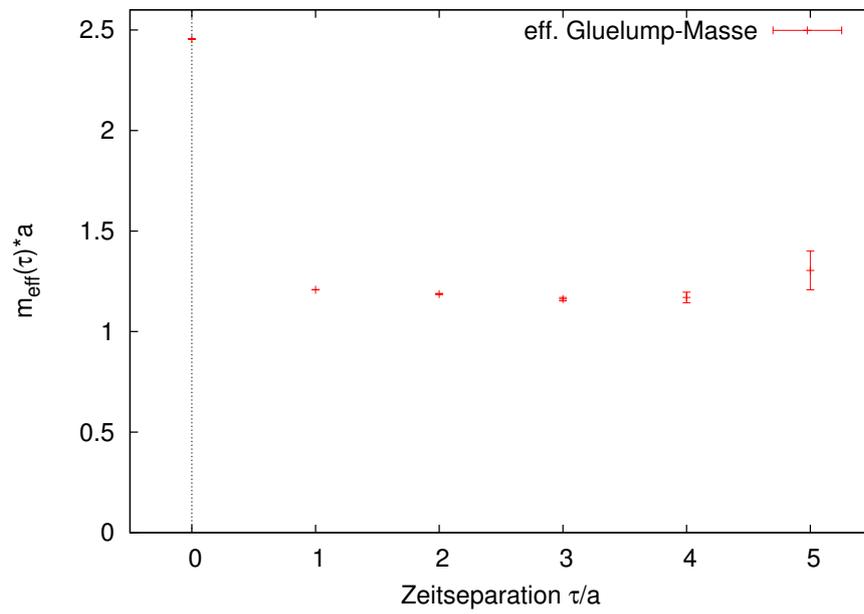


Abbildung 3.3: Effektive Gluelump-Masse

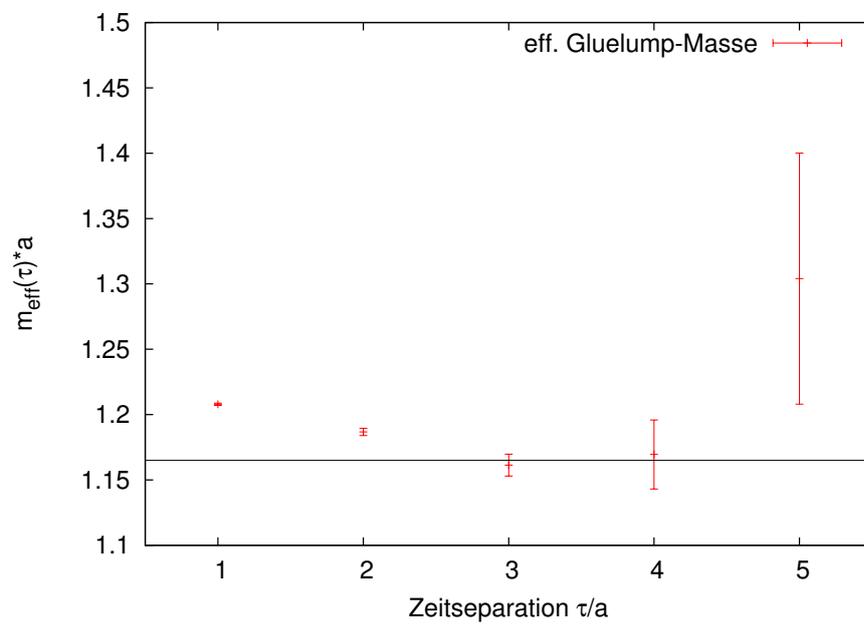


Abbildung 3.4: Massen-fit

3.3 String Breaking Distance

Im vorherigen Abschnitt wurde die Masse eines statischen adjungierten Quarks und Gluonen berechnet. Die bestimmte Masse hat jedoch noch keine physikalische Relevanz. Da es sich um ein statisches Quark handelt, ist es bis auf den Gitterabstand a lokalisiert und besitzt dementsprechend hohe Impulse, deren kinetische Energie einen Beitrag zur berechneten Masse geliefert hat. Diese Energie wird auch als **Selbstenergie** des Quarks bezeichnet. Diese würde im Kontinuum, aufgrund der exakten Lokalisierung des statischen Quarks, unendlich groß sein. Auf dem Gitter hängt der Beitrag zur Selbstenergie vom Gitterabstand ab, weshalb die berechnete Gluelump-Masse bei kleineren Gittern schwerer ausfällt als bei größeren. Daher ist die bisher bestimmte Masse ohne physikalische Bedeutung.

Eine Größe, welche sich unabhängig von der Selbstenergie des Quarks bestimmen lässt, ist die **String Breaking Distance**. Aufgrund des linearen Verhalten des adjungierten Quark-Antiquark-Potentials erhöht sich die Energie stetig, wenn man Quark und Antiquark voneinander entfernt. Erreicht die Energie den Wert von zwei Gluelump-Massen, so „*bricht*“ der gluonische Schlauch zwischen den Quarks auf und es können zwei Gluelumps entstehen. Die String Breaking Distance gibt gerade den Abstand an, ab welchem dieses Aufbrechen energetisch möglich wird. [5]

Um die String Breaking Distance zu berechnen, muss zunächst das adjungierte statische Quark-Antiquark-Potential berechnet werden. Da dieses mit der zweifachen Gluelump-Masse verglichen wird, spielen die Beiträge der Selbstenergie, die beim Potential sowie der halben Gluelump-Masse gleich groß sind, keine Rolle mehr.

3.3.1 Das adjungierte statische Quark-Antiquark-Potential

Das Potential wird mit Hilfe sogenannter **Wilson-Loops** $W(R, T)$, siehe Abb. 3.5, berechnet [1].

$$W(R, T) = U(\vec{y}, t; \vec{x}, t) U(\vec{x}, t; \vec{x}, 0) U(\vec{x}, 0; \vec{y}, 0) U(\vec{y}, 0; \vec{y}, t) \quad (3.4)$$

mit

$$U(\vec{x}, t_0; \vec{y}, t) = \exp \left(ig \int_{\vec{x}, t_0}^{\vec{y}, t} dz_i A_i(\vec{z}, t) \right) \quad (3.5)$$

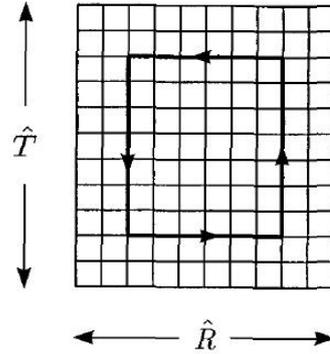


Abbildung 3.5: Wilson-Loop [1]

Das adjungierte Potential wird dann wie folgt bestimmt:

$$\hat{V}(\hat{R}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \ln \underbrace{\left(\frac{\langle W^{(1)}(\hat{R}, \hat{T}) \rangle}{\langle W^{(1)}(\hat{R}, \hat{T} + 1) \rangle} \right)}_{\equiv \hat{V}_{ef}(\hat{R}, \hat{T})} \quad (3.6)$$

wobei $W^{(1)}(R, T) = \frac{4}{3} (W(R, T))^2 - \frac{1}{3}$ der Wilson-Loop in der adjungierten Darstellung ist. [8]

Zur Berechnung wurden 9950 Eichfeldkonfigurationen mit Ausdehnung 16×16^3 , wobei jede fünfte ausgewertet wurde, erzeugt. Abb. 3.6 zeigt das effektive Potential für verschiedenen Abstände R/a abgetragen über die Zeitseparation T/a .

Bis zu $R/a = 6$ zeigen die Verläufe des effektiven Potentials eine deutliche Konvergenz. Damit lässt sich annehmen, dass für $T/a = 3$ das effektive Potential zumindest für Abstände kleiner 6 sehr gut mit dem zu bestimmenden Potential übereinstimmt. Für größere Abstände lässt sich das Potential nicht mehr präzise angeben.

3.3.2 Abschätzung der String Breaking Distance

Da das Ziel der Arbeit eine grobe Verifikation der String Breaking Distance ist, werden die Fehler des Potentials großzügig abgeschätzt. Dazu werden die Fehler des effektiven Potentials bei $T/a = 3$ für das Quark-Antiquark-Potential übernommen. Als Fehlerabschätzung der Gluelump-Masse wird die dreifache Sigma-Umgebung der Konstante des Massen-fits aus Abb. 3.4 angenommen, welche mit den schwarzen horizontalen Linien in Abb. 3.7 angedeutet werden.

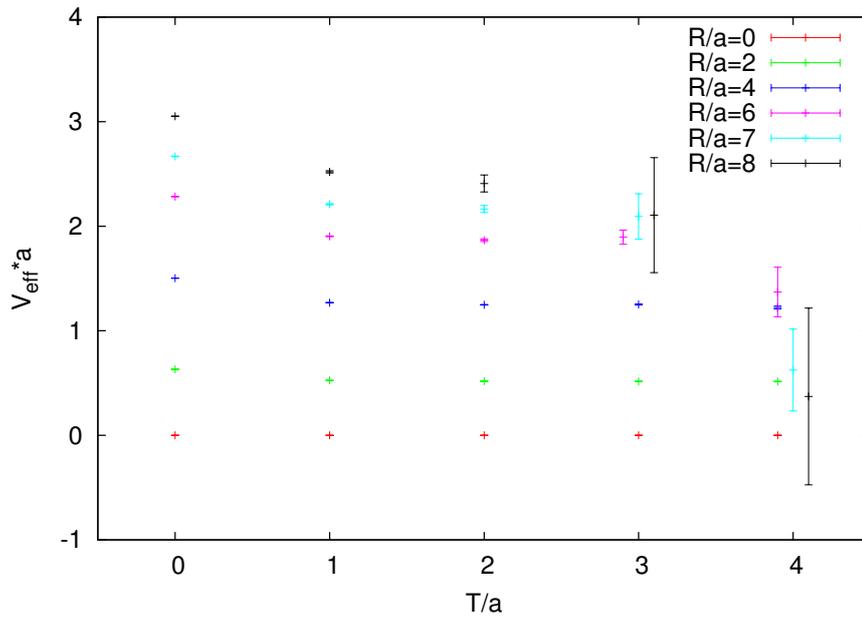
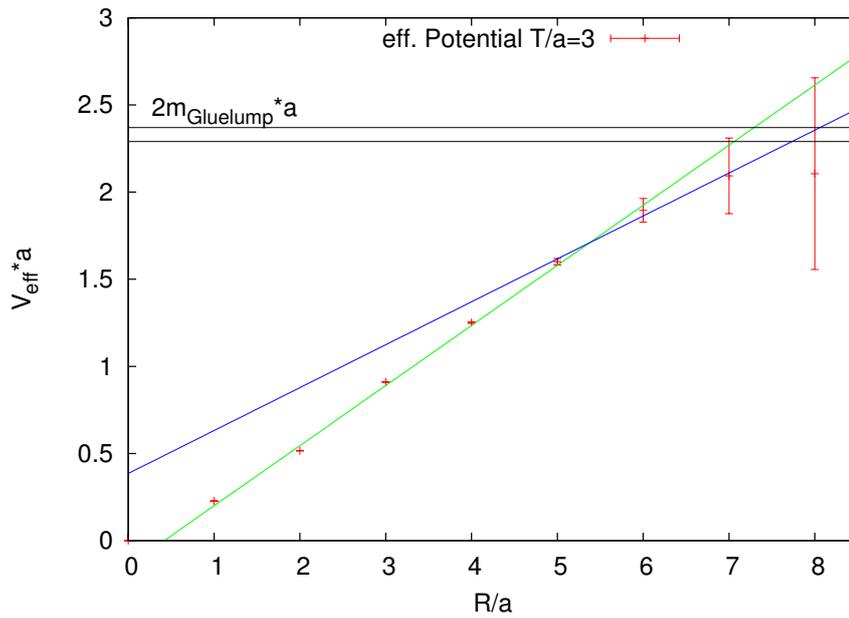
Abbildung 3.6: Effektives adjungiertes stat. $Q\text{-}\bar{Q}$ -Potential

Abbildung 3.7: Zur Abschätzung der String Breaking Distance

Da das Quark-Antiquark-Potential nicht präzise bis zur Gluelump-Masse berechnet werden konnte, soll bei größeren Abständen eine Gerade an das Potential gefittet werden.

Dies ist sinnvoll, da bereits bekannt ist, dass das statische adjungierte Quark-Antiquark-Potential für großes R ein lineares Verhalten aufweist. Um den Wert der String Breaking Distance einzugrenzen, werden zwei Geraden benutzt. Die grüne Gerade, welche in Abb. 3.7 zu sehen ist, wurde an das effektive Potential bei $R/a = 3, 4, 5$ gefittet, während sich die blaue Linie aus den Punkten bei $R/a = 6, 7, 8$ ergibt. Die untere Schranke für die String Breaking Distance wird durch den Schnittpunkt der grünen Geraden mit der unteren Sigma-Umgebung der Gluelump-Masse bestimmt, während für die obere Schranke der Schnittpunkt der blauen Gerade mit oberer Sigma-Umgebung benutzt wird. In Gittereinheiten liegen die Schnittpunkte bei 7.08 und 8.07, was einer String Breaking Distance zwischen 1.19 fm ... 1.35 fm entspricht. Dies ist in guter Übereinstimmung mit [5], wo ein Abstand von etwa 1.25 fm angegeben wird, oder auch mit [8]. Dort wird die String Breaking Distance zwischen 1 fm und 1.25 fm eingegrenzt.

4 Diskussion der Ergebnisse

Die Gluelump-Masse ließ sich aufgrund geringer Fehler und einer schnellen Konvergenz der effektiven Masse sehr genau berechnen. Auch das adjungierte statische Quark-Antiquark-Potential konnte im Rahmen einer qualitativen Verifikation der String Breaking Distance hinreichend genau bestimmt werden. Schließlich garantiert die gute Übereinstimmung mit den Literaturwerten [5, 8] den Erfolg der Berechnungen.

Insbesondere die Genauigkeit der Gluelump-Masse demonstriert die Bedeutsamkeit von Smearing Verfahren. So stimmt die effektive Masse schon beim ersten Zeitschritt bis auf etwa 4% mit der Gluelump-Masse überein, was auch auf einen großen Überlapp $|\langle 0|\mathcal{O}|\Omega\rangle|^2$ infolge des APE-Smearings zurückzuführen ist.

Für eine Präzisionsberechnung der String Breaking Distance müsste das Quark-Antiquark-Potential auch für größere Abstände besser aufgelöst werden, sodass es nicht durch eine Gerade abgeschätzt werden muss. Dafür würde es wahrscheinlich ausreichen noch mehr Eichlinkkonfigurationen zu verwenden, um so die statistischen Fehler hinreichend abzusenken.

Literaturverzeichnis

- [1] H. J. Rothe: *Lattice Gauge Theories: An Introduction*
- [2] M. Wagner, O. Philipsen: *Vorlesungsskript QFT2*, Goethe Universität 2012
- [3] G. I. Poulis, H. D. Trotter: *Glueball spectrum and adjoint potential in lattice QCD* (1995)
- [4] M. Foster, C. Michael: *Hadrons with a heavy color-adjoint particle* Physical Review D, Volume 59, 094509
- [5] P. de Forcrand, O. Philipsen: *Adjoint String Breaking in 4d SU(2) Yang-Mills Theory*, arXiv:hep-lat/9912050v2 10.01.2000
- [6] M. Creutz: *Monte Carlo study of quantized SU(2) gauge theory*, Physical Review D, Volume 21, Number 8, 15 April 1980
- [7] M. E. Peskin, D. V. Schroeder: *An Introduction to Quantum Field Theory*
- [8] C. Szasz, M. Wagner: *Adjoint string breaking in pseudoparticle approach*, arXiv: 0806.1977v2 [hep-ph] 29.07.2008
- [9] A. Uenver-Thiele: *Numerische Bestimmung von Glueball-Massen mit SU(2) Gittertheorie*, <http://th.physik.uni-frankfurt.de/~mwagner/theses.html>
- [10] B. Fröhlich Wagenbach: *Numerische Berechnung des Quark-Antiquark-Potentials zur Bestimmung der kritischen Temperatur in der SU(2) Yang-Mills-Theorie*, <http://th.physik.uni-frankfurt.de/~mwagner/theses.html>
- [11] D. H. Rischke: *Vorlesungsskript Quantenmechanik II*, Goethe Universität 2012, www.th.physik.uni-frankfurt.de/~drischke/Skript_QMII.pdf
- [12] www.physics.arizona.edu/~wfreeman/static_quark.ps

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe, dass alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus anderen Quellen übernommen wurden, als solche kenntlich gemacht und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegt wurde.

Frankfurt am Main, 28.09.2012

Philipp Wolf