



INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

BACHELORARBEIT

Quarkmassenabhängigkeit der Bindungszustände von
 $\bar{b}b\bar{u}d$ Tetraquarks unter Berücksichtigung von
heavy-Spin Effekten

Author
Paula Schönau

Betreuer und Erstgutachter
Prof. Dr. Marc Wagner

Zweitgutachter
Prof. Dr. Owe Philipsen

21. Januar 2021

Selbstständigkeitserklärung

**Erklärung nach § 30 (12) Ordnung für den Bachelor- und dem Masterstudien-
gang Physik vom 24.04.2013**

Hiermit erkläre ich, dass ich die Arbeit selbstständig und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen und Hilfsmittel verfasst habe. Alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus Veröffentlichungen oder aus anderen fremden Texten entnommen wurden, sind von mir als solche kenntlich gemacht worden. Ferner erkläre ich, dass die Arbeit nicht - auch nicht auszugsweise - für eine andere Prüfung verwendet wurde.

Frankfurt am Main, den 21. Januar 2021

Paula Schönau

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Suche nach möglichen Bindungszuständen eines $ud\bar{b}\bar{b}$ Tetraquarks im Grundzustand sowie in angeregten Zuständen mit $L \in \{1, 2, 3\}$. Um die Bindungsenergie des Teilchens zu berechnen, wird die Born-Oppenheimer Näherung angewendet. Es werden dabei Gitter QCD Ergebnisse der Potentiale zweier statischer \bar{b} Quarks, in der Gegenwart zweier leichter u/d Quarks, in einer nicht-relativistischen Schrödingergleichung als effektives Potential verwendet. Die Berücksichtigung von zuvor vernachlässigten Spin Effekten der \bar{b} Quarks führt zu gekoppelten zweidimensionalen Schrödingergleichungen, welche mit Hilfe eines Runge-Kutta Shooting Verfahrens vierter Ordnung numerisch gelöst werden können. Es werden diese Ergebnisse mit Ansätzen ohne die Berücksichtigung von Spin Effekten verglichen. Für den Grundzustand des Tetraquarks mit den Quantenzahlen $I(J^P) = 0(1^+)$ kann ein stabiler Zustand mit einer Bindungsenergie von etwa $-50 \dots -70$ MeV bestätigt werden. In den angeregten Zuständen mit $L \in \{1, 2, 3\}$ existieren keine Bindungszustände. Eine Anpassung der \bar{b} Quarkmassen gibt in diesem Fall Auskunft über die Massenabhängigkeit der Bindungszustände.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Einführung in die Theorie der Bindungszustände von Tetraquarks	3
3. Untersuchung eines $ud\bar{b}\bar{b}$ Tetraquarks	6
3.1. Bestimmung der $\bar{b}\bar{b}$ Potentiale mit Methoden der Gitter QCD	6
3.1.1. Wahl der Fit-Funktion	7
3.1.2. Einbeziehen von heavy-Spin Effekten durch Untersuchung der Meson- Meson Struktur	8
3.1.3. Resultierende Potentiale	9
3.2. Aufstellen der Schrödingergleichung des Systems	12
3.2.1. Näherung ohne Berücksichtigung von heavy-Spin Effekten	12
3.2.2. Näherung mit Berücksichtigung von heavy-Spin Effekten	12
3.3. Mögliche Quantenzahlen des Tetraquarks	15
4. Numerische Bestimmung der Bindungszustände	19
4.1. Das Shooting-Verfahren	19
4.2. Anwendung in der Näherung ohne heavy-Spin Effekte	21
4.2.1. Analytische Vereinfachungen der Schrödingergleichung	21
4.2.2. Bestimmung der Randbedingungen	23
4.3. Anwendung in der Näherung mit heavy-Spin Effekten	25
4.3.1. Analytische Vereinfachung der Schrödingergleichungen	25
4.3.2. Bestimmung der Randbedingungen	28
5. Ergebnisse	32
5.1. Bindungsenergie im Grundzustand	32
5.1.1. Näherung ohne heavy-Spin Effekte	32
5.1.2. Näherung mit heavy-Spin Effekten	34
5.2. Bindungsenergie angeregter Zustände	36
6. Schlussfolgerungen und Ausblick	44
A. Anhang	45
A.1. Einheiten und Konventionen	45

1. Einleitung

Die Quantenchromodynamik (QCD) ist eine Feldtheorie, welche die Phänomene der stärksten aller vier Grundkräfte der Physik beschreibt, die sogenannte starke Wechselwirkung oder starke (Kern-)kraft. Die Teilchen, die Auswirkungen der starken Kraft spüren, werden als Hadronen bezeichnet und machen einen Großteil der im Universum nachweisbaren Materie aus. Die bekanntesten und gleichzeitig langlebigsten Hadronen sind die Kernbausteine von Atomen, das Proton und das Neutron, welche auch als Nukleonen bezeichnet werden. Ihre Existenz wird in der QCD durch das 1964 entwickelte Quarkmodell erklärt [1]. Dieses besagt, dass jedes Hadron aus noch kleineren Teilchen, den sogenannten Quarks, besteht, welche über Gluonen, die Austauscheteilchen der starken Wechselwirkung, zu gebundenen Teilchen zusammengehalten werden. Man kann dabei zwischen den Mesonen (Teilchen bestehend aus einem Quark und einem Antiquark) und den Baryonen (Teilchen bestehend aus drei Quarks), zu denen die Nukleonen zählen, unterscheiden.

Die Hadronen wurden in Experimenten an Teilchenbeschleunigern in großer Vielzahl nachgewiesen und bilden den heutigen Teilchenzoo. Schon mit Aufkommen des Quarkmodells in den 1960er Jahren wurden jedoch gebundene Zustände vorhergesagt, die aus mehr als den üblichen zwei oder drei Quarks bestehen könnten. Solche Teilchen werden als exotische Hadronen bezeichnet und haben wie alle Hadronen die Eigenschaft nur in der Form farbneutraler Zustände aufzutreten. Daraus lässt sich ableiten, dass zum Beispiel Tetraquarks, bestehend aus jeweils zwei Quarks und zwei Antiquarks, sowie Pentaquarks, aus vier Quarks und einem Antiquark (oder vier Antiquarks und einem Quark), existieren könnten.[2]

Teilchen dieser Art sind jedoch theoretisch noch wenig erforscht und auch ein experimenteller Nachweis ist schwierig. Bei Messungen an Teilchenbeschleunigern treten Tetraquarks typischerweise in Form von hadronischen Resonanzen auf, das heißt instabilen Zuständen mit sehr kurzer Lebensdauer (10^{-23} s oder weniger). Die Quantenzahlen eines solchen Zustandes können daher nur indirekt über die langlebigeren Zerfallsprodukte der Resonanz ermittelt werden. Der Nachweis eines exotischen Hadrons erfolgt über charakteristische Quantenzahlen, welche eindeutig nicht durch ein Meson realisierbar sind und stattdessen auf die Existenz eines Tetraquarks schließen lassen. Das macht es sehr schwierig die Existenz von Tetraquarks eindeutig zu bestätigen und lange Zeit blieb ein experimenteller Nachweis gänzlich aus.[2]

Erst 2003 konnte die Belle-Kollaboration einen ersten Tetraquark-Kandidaten mit der Bezeichnung X(3872) finden [3], dessen Existenz durch eine Vielzahl anderer Experimente bestätigt werden konnte. Da die genaue Quark-Struktur der gemessenen Resonanz allerdings noch unbekannt ist, konnte bis heute nicht eindeutig bestätigt werden, ob es sich tatsächlich um ein Tetraquark handelt [2].

1. Einleitung

Seit diesem ersten experimentellen Hinweis auf die Existenz von Tetraquarks werden immer mehr exotische Resonanzen gefunden. Vielversprechende Kandidaten sind zum Beispiel die Resonanzen Z_b^\pm , welche 2012 durch die Belle-Kollaboration nachgewiesen werden konnten [4], sowie die durch eine Vielzahl von Experimenten bestätigten Resonanzen Z_c^\pm (z. B.: [5, 6]). Die elektrische Ladung der Resonanzen lässt darauf schließen, dass es sich um Vier-Quark-Zustände handelt, die in ersterem Fall ein $b\bar{b}$ Paar und in letzterem Fall ein $c\bar{c}$ Paar enthalten [2].

Dennoch wirft die Erforschung exotischer Hadronen weiterhin ungeklärte Fragen auf. Viele der theoretisch vorhergesagten Tetraquark-Zustände konnten bisher nicht experimentell nachgewiesen werden und auch die genaue Struktur dieser Teilchen ist noch unbekannt. So könnten Tetraquarks zum Beispiel in Form von mesonischen Molekülen, also gebundenen Zuständen zweier Mesonen, auftreten oder aber eine Diquark-Antidiquark Struktur formen. In diesem Fall sind starke Bindungen zwischen zwei Quarks zu beobachten, die sich zu einem Diquark verbinden und zusammen mit einem Anti-Diquark ein Tetraquark bilden könnten.[2]

Um die Ergebnisse der Experimente genauer interpretieren zu können und offene Fragen zu klären, ist daher ein genaues theoretisches Verständnis exotischer Zustände notwendig.

In dieser Arbeit sollen Tetraquarks, bestehend aus zwei schweren Antiquarks $\bar{b}\bar{b}$ und zwei leichten Quarks qq ($q \in \{u, d\}$), untersucht werden. Der Fokus liegt dabei auf der Suche nach Bindungszuständen dieser vier Quarks, um die mögliche Existenz eines Tetraquarks vorherzusagen.

Frühere Forschungsarbeiten haben sich bereits mit der Berechnung von Bindungszuständen dieses Tetraquark-Kandidaten im Grundzustand befasst. In [8] konnte dabei ein Zustand mit den Quantenzahlen $I(J^P) = 0(1^+)$ und einer Bindungsenergie $E_B = -93_{-43}^{+47}$ MeV nachweisen werden. In [9] wurden außerdem zuvor vernachlässigte Spin-Effekte der schweren \bar{b} Quarks in die Untersuchungen mit einbezogen, wobei gezeigt werden konnte, dass die Bindungsenergie des zuvor gefundenen Zustandes dadurch um etwa 34 MeV abgesenkt wird.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, diese Ergebnisse zu reproduzieren und außerdem die Suche nach Bindungszuständen im Grundzustand auf angeregte Zustände höherer Bahndrehimpulse $L > 0$ zu erweitern. Das $ud\bar{b}\bar{b}$ Tetraquark wird dabei in den beiden Näherungen ohne und mit der Berücksichtigung von heavy-Spin Effekten untersucht, um die Auswirkungen dieser Effekte auf mögliche Bindungszustände des Tetraquarks zu ermitteln.

Für die Berechnung der Bindungsenergie des Tetraquarks wird die Born-Oppenheimer Näherung angewendet. Dazu werden die Wechselwirkungen zwischen den Quarks in der Näherung statischer \bar{b} Quarks durch Gitter QCD Berechnungen ermittelt und die resultierenden Potentiale anschließend dem Hamiltonien einer Schrödingergleichung hinzu addiert. Diese kann numerisch mit einem Runge-Kutta Shooting-Verfahren vierter Ordnung gelöst werden, um die Bindungsenergie des Tetraquarks zu bestimmen.

2. Einführung in die Theorie der Bindungszustände von Tetraquarks

Stabile Bindungszustände mehrerer Teilchen werden in der Quantenmechanik durch eine negative Bindungsenergie E_B charakterisiert. Diese wird definiert als die Differenz aus der Energie des Teilchens und der Energie seiner einzelnen Bestandteile. Sind die Wechselwirkungen zwischen den Bestandteilen groß genug, kann sich ein eigenes Teilchen formen. Die Bindungsenergie entspricht dann der Energie, die aufgewendet werden muss, um den gebundenen Zustand aufzulösen. Durch das Lösen der stationären Schrödingergleichung des Systems, können die Bindungsenergie sowie die entsprechenden Anregungsniveaus bestimmt werden.

Die Wechselwirkungen zwischen Quarks, den Bestandteilen eines Tetraquarks, werden grundsätzlich durch die QCD beschrieben. Im Falle des in dieser Arbeit untersuchten Tetraquarks ist es jedoch möglich, die oben erläuterten Konzepte aus der Quantenmechanik anzuwenden.

Das in dieser Arbeit untersuchte Tetraquark besteht aus zwei schweren Antiquarks \bar{b} und zwei leichteren u/d Quarks und fällt damit in die Kategorie sogenannter schwer-leicht schwer-leicht Tetraquarks. Es ist daher möglich, die Born-Oppenheimer Näherung anzuwenden, um die Schrödingergleichung des Systems aufzustellen und mögliche Bindungszustände des Tetraquarks zu berechnen.

Diese von Born und Oppenheimer 1927 entwickelte Näherung wurde ursprünglich in [11] zur Beschreibung eines Wasserstoffatoms angewendet. Die dabei entwickelten Konzepte können, wie in [7] erstmals durchgeführt, ebenso auf ein $ud\bar{b}\bar{b}$ Tetraquark übertragen werden. Im Folgenden sollen die Konzepte erläutert werden.

Born-Oppenheimer Näherung

Grundvoraussetzung der Born-Oppenheimer Näherung ist es, die Bewegung der schweren \bar{b} Quarks in Relation zu den leichten Quarks q als statisch annehmen zu können. Im Falle von \bar{b} Quarks, welche sehr viel schwerer als die sie umgebenden Valenzquarks q sind ($m_b \gg m_q$), scheint dies eine passende Näherung zu sein.

Die leichten Quarks besitzen, aufgrund ihrer geringeren Trägheit, eine viel größere Bewegungsenergie als die beiden schweren Antiquarks, weshalb man näherungsweise annehmen kann, die \bar{b} Quarks würden sich im Vergleich dazu in Ruhe befinden. Die Annahme

2. Einführung in die Theorie der Bindungszustände von Tetraquarks

statischer \bar{b} Quarks ermöglicht es diese getrennt von den leichten Quarks q zu betrachten und die das Tetraquark beschreibende Schrödingergleichung enorm zu vereinfachen.

Die Anwendung der Born-Oppenheimer Näherung zur Beschreibung von $ud\bar{b}\bar{b}$ Bindungszuständen besteht zunächst darin, die Wechselwirkungen zwischen den vier Quarks zu bestimmen. Mit Hilfe von Gitter QCD Berechnungen kann die Energie des Potentials $V_{\bar{b}\bar{b}}$ zwischen zwei als statisch genäherten \bar{b} Quarks, in der Anwesenheit zweier dynamischer u/d Quarks, ermittelt werden.

Die beiden Antiquarks können nun getrennt von den leichten Quarks betrachtet werden. Dazu wird die (nicht-relativistische) stationäre Schrödingergleichung zweier sich im Potential $V_{\bar{b}\bar{b}}$ befindenden \bar{b} Quarks aufgestellt. Die bei der Berechnung des Potentials vernachlässigte Dynamik der schweren Antiquarks kann so durch Konzepte der Quantenmechanik beschrieben werden.

Die aufzustellende Schrödingergleichung hat die allgemeine Form:

$$(H_0 + H_{\text{int}}) \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = E \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \quad (2.1a)$$

mit

$$H_0 = \frac{\vec{p}_1^2 + \vec{p}_2^2}{2m_b} + V_0 \quad \text{und} \quad H_{\text{int}} = V_{\bar{b}\bar{b}}(r) \quad (2.1b)$$

($m_b = 4977$ MeV aus dem Quark Modell [12]), wobei r dem Abstand der beiden Antiquarks mit den Positionen \vec{r}_1 und \vec{r}_2 entspricht. Die Anwesenheit der beiden u/d Quarks wird dabei nur indirekt, über das zuvor berechnete Potential, berücksichtigt. Dieses wird dem Hamiltonien H_0 der \bar{b} Quarks als effektives Potential hinzuaddiert und entspricht dem interaktiven Teil H_{int} des Hamiltoniens.

Der freie Teil H_0 beinhaltet den kinetischen Term der \bar{b} Quarks und berücksichtigt deren Bewegungsenergie. Dabei sind $\vec{p}_1 = -i\hbar\vec{\nabla}_1$ und $\vec{p}_2 = -i\hbar\vec{\nabla}_2$ die Impulsoperatoren der \bar{b} Quarks. Der zusätzliche Faktor V_0 entspricht der Energie des Teilchens für den Fall, dass keinerlei Interaktionen zwischen den beiden Antiquarks vorliegen, also für große Abstände r . Durch das Lösen der Schrödingergleichung lässt sich schließlich die Bindungsenergie E_B der vier Quarks bestimmen. Gilt $E_B < 0$, weist das auf die Existenz eines Bindungszustandes hin.

Bei der Anwendung der Born-Oppenheimer Näherung wird jedoch eine starke Vereinfachung des Systems vorgenommen. Die Näherung statischer \bar{b} Quarks ($m_b \rightarrow \infty$) bei der Berechnung der Potentiale $V_{\bar{b}\bar{b}}$ führt dazu, dass neben der Dynamik der \bar{b} Quarks auch die durch deren Spins verursachten Wechselwirkungen vernachlässigt werden. Daraus folgt, dass die aus den Gitter QCD Berechnungen resultierenden Potentiale ausschließlich von den Spin-Freiheitsgraden der leichteren Quarks q abhängen.

Die ungefähre Größenordnung dieser vernachlässigten heavy-Spin Effekte wird ersichtlich, wenn man das Tetraquark für große Abstände r der \bar{b} Quarks betrachtet. Das Teilchen kann in diesem Fall als gebundenes System von zwei Mesonen betrachtet werden. Eine Quarkzusammensetzung von zwei \bar{b} Quarks und zwei u/d Quarks lässt sich durch die

Kombination von zwei B - und/oder B^* -Mesonen realisieren. Aufgrund von Spin Effekten der schweren \bar{b} Quarks kommt es in der Natur zu einer merklichen Massendifferenz der beiden Mesonen: $\Delta m_B = m_{B^*} - m_B \approx 46$ MeV (mit $m_B = 5279$ MeV, $m_{B^*} = 5325$ MeV [13]) [9].

Diese Massendifferenz liegt in der Größenordnung der Bindungsenergie bereits gefundener Tetraquark-Zustände und sollte daher in die Berechnungen mit einbezogen werden. Eine einfache Möglichkeit dies zu realisieren wurde in [9] vorgestellt. Dabei wird lediglich die Schrödingergleichung angepasst, indem die aufgrund von heavy-Spin Effekten verursachte Massendifferenz Δm_B dem Hamiltonien an geeigneter Stelle hinzuaddiert werden.

Spin Effekte der \bar{b} Quarks können so näherungsweise berücksichtigt werden, ohne die Gitter QCD Berechnungen zu verändern. Die Anwendung dieses Ansatzes soll im Folgenden Kapitel genauer erläutert werden.

3. Untersuchung eines $ud\bar{b}\bar{b}$ Tetraquarks

Die im vorherigen Kapitel beschriebene Born-Oppenheimer Näherung wird im Folgenden zur Beschreibung der Bindungszustände eines $ud\bar{b}\bar{b}$ Tetraquarks angewendet.

In Abschnitt 3.1 soll zunächst das Vorgehen zur Bestimmung der $\bar{b}\bar{b}$ Potentiale erläutert sowie die Ergebnisse aus Gitter QCD Berechnungen vergangener Forschungsarbeiten zusammengefasst werden. Anschließend werden in Kapitel 3.2 die Schrödingergleichungen der \bar{b} Quarks aufgestellt. Das Tetraquark wird dabei in zwei verschiedenen Näherungen, ohne und mit der Berücksichtigung von Spin Effekten der schweren \bar{b} Quarks, betrachtet. Inhaltlich beziehen sich die Ausführungen dieser beiden Kapitel auf [8], [9] und [14].

Für eine vollständige Beschreibung der Bindungszustände des Tetraquarks werden in Abschnitt 3.3 außerdem die das Tetraquark charakterisierenden Quantenzahlen $I(J^P)$ (Isospin I , Gesamtdrehimpuls J und Parität P) bestimmt.

3.1. Bestimmung der $\bar{b}\bar{b}$ Potentiale mit Methoden der Gitter QCD

Die QCD definiert zeitliche Korrelationsfunktionen, aus deren exponentiellem Abfall das Potential $V_{\bar{b}\bar{b}}(r)$ ermittelt werden kann. Die zeitliche Korrelationsfunktion wird wie folgt definiert:

$$C(t) = \langle \Omega | \mathcal{O}^\dagger(t) \mathcal{O}(0) | \Omega \rangle, \quad (3.1)$$

wobei $|\Omega\rangle$ den Vakuum Zustand (Grundzustand) der QCD beschreibt.

Bei \mathcal{O} handelt es sich um einen sogenannten Erzeugungsoperator, welcher das zu betrachtende Quark-System repräsentiert. Wirkend auf das Vakuum $|\Omega\rangle$ kreiert \mathcal{O} einen Zustand $|\Phi\rangle = \mathcal{O} |\Omega\rangle$, welcher einer linearen Superposition aller Zustände mit den möglichen Quantenzahlen des erzeugten Teilchens entspricht [10, S.13].

Um ein Tetraquark, bestehend aus zwei statischen Antiquarks $\bar{Q}\bar{Q}$ und zwei leichten Quarks qq , zu beschreiben, wird der folgende Vier-Quark Erzeugungsoperator konstruiert:

$$\mathcal{O}_{L,S}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = (\mathcal{C}L)_{AB} (\mathcal{C}S)_{CD} \left(\bar{Q}_C(\vec{r}_1) q_A^{(1)}(\vec{r}_1) \right) \left(\bar{Q}_D(\vec{r}_2) q_B^{(2)}(\vec{r}_2) \right). \quad (3.2)$$

Der Quarkfeldoperator \bar{Q} platziert dabei ein statisches Antiquark, welches in diesem Fall einem \bar{b} Quark entspricht. Die beiden leichten Quarks werden durch den Operator q

3.1. Bestimmung der $\bar{b}\bar{b}$ Potentiale mit Methoden der Gitter QCD

repräsentiert, wobei die Indizes (1) und (2) die möglichen Quark-Flavor (u/d) markieren. Die Größen A, B, C und D sind Spin-Indizes, $\mathcal{C} = \gamma_0 \gamma_2$ ist die Ladungskonjugationsmatrix.¹

Die Spin-Komponenten der leichten Quarks und der statischen Antiquarks werden jeweils über die 4×4 Matrizen L und S beschrieben. Diese können unabhängig voneinander gekoppelt werden, da das Tetraquark in der statisch-leicht Näherung betrachtet wird. Daraus folgt auch, dass die durch $\mathcal{O}_{L,S}$ erzeugten Potentiale ausschließlich von den Spin-Freiheitsgraden der leichten Quarks, also von L , abhängen werden.

Die durch $\mathcal{O}_{L,S}$ definierte zeitliche Korrelationsfunktion $C(t)$ kann numerisch mit Hilfe der Gitter QCD berechnet werden. Um $\bar{b}\bar{b}$ Potentiale in der statischen Näherung zu erhalten, wird die Masse der Antiquarks auf $m_b \rightarrow \infty$ gesetzt.

Da man diese Berechnungen auf einem Gitter der Raum-Zeit durchführt, kann das daraus resultierende Potential jedoch nur für diskrete Abstände r der beiden Antiquarks bestimmt werden. Eine exakte Lösung des Potentials $V_{\bar{b}\bar{b}}$ ergibt sich durch das Fitten einer passenden Fit-Funktion $V(r)$ an die Gitter-QCD Ergebnisse.

3.1.1. Wahl der Fit-Funktion

Die Wahl der Fit-Funktion wird durch Überlegungen aus dem Quarkmodell motiviert. Diese führen zu dem folgenden Ansatz:

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \exp\left(-\left(\frac{r}{d}\right)^p\right). \quad (3.3)$$

Die Parameter α und d werden durch das Fitten von $V(r)$ an die Gitter-QCD Ergebnisse bestimmt. Bei einer relativistischen Betrachtung entspricht der Exponent $p = 2$.

Der obige Ansatz für das Potential beschreibt die Interaktion der als statisch angenommenen \bar{b} Quarks im gebundenen Zustand eines Tetraquarks auf die zu erwartende Art und Weise. Für kleine Abstände r kann davon ausgegangen werden, dass die Wechselwirkung der schweren Antiquarks nicht durch die Anwesenheit der leichten Quarks gestört wird. Das entsprechende Potential beschreibt in diesem Fall eine reine Diquark-Interaktion (siehe Abbildung 3.1a), welche sich in der statischen Näherung für kleine Abstände wie ein Coulomb-Potential $\sim -\alpha/r$ verhält.

Je größer der Abstand r zwischen den \bar{b} Quarks, desto stärker werden diese jedoch durch die Farbladungen der leichten Quarks q abgeschirmt (siehe Abbildung 3.1b). Durch dieses sogenannte Screening wird das Potential zwischen den \bar{b} Quarks exponentiell $\sim \exp(-(r/d)^p)$ abgeschwächt und die Bindung zwischen den leichten und schweren Quarks nimmt zu. Die Stärke des Screening-Effekts hängt vom Radius d des sich dabei bildenden Mesons ab, wird also durch den Abstand des leichten Quarks q zum statischen Antiquark \bar{b} beeinflusst.

Im Grenzfall großer Abstände r wird die Interaktion zwischen den \bar{b} Quarks schließlich

¹ Die Gamma-Matrizen γ sind 4×4 Matrizen, welche die Pauli-Matrizen σ beinhalten.

3. Untersuchung eines $u\bar{d}\bar{b}\bar{b}$ Tetraquarks

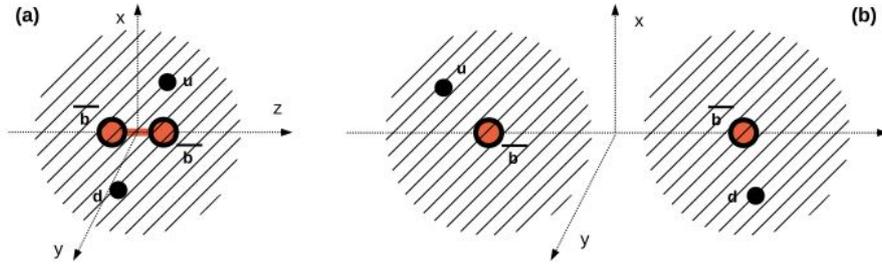


Abbildung 3.1.: (a) Bei geringem Abstand r der \bar{b} Quarks liegt eine Diquark-Interaktion vor. (b) Für größer werdende Abstände r werden die $\bar{b}\bar{b}$ Interaktionen durch den Screening-Effekt abgeschirmt. Die Diquark-Interaktion verschwindet und es bilden sich zwei B - und/oder B^* -Mesonen. (Graphik entnommen aus [9])

soweit abgeschirmt, dass die Diquark-Interaktion vollständig verschwindet. Das Tetraquark kann in diesem Zustand als System zweier gebundener B und/oder B^* Mesonen beschrieben werden. Die Energie des Teilchens entspricht dann der Energie der sich bildenden Mesonen und wird über den Faktor V_0 in der Schrödingergleichung (2.1) berücksichtigt.

3.1.2. Einbeziehen von heavy-Spin Effekten durch Untersuchung der Meson-Meson Struktur

Die durch den Operator $\mathcal{O}_{L,S}$ (Gleichung (3.2)) erzeugten Potentiale in der statisch-leicht Näherung hängen ausschließlich von den Spin-Ausrichtungen der leichten Quarks ab. Spin-Effekte der schweren Quarks werden dabei vernachlässigt. Lediglich der Faktor V_0 im Hamiltonien der Schrödingergleichung (2.1) geht auf die Meson-Meson-Struktur des Tetraquarks ein und kann damit die durch heavy-Spin Effekte erzeugte Massendifferenz der B - und B^* -Mesonen berücksichtigen. Um den passenden Wert von V_0 zu finden, muss daher die genaue B - B^* -Struktur des Tetraquarks untersucht werden.

Wie bereits erläutert, können die Zustände $|\Phi\rangle$ eines statisch-leichten $\bar{Q}\bar{Q}qq$ Tetraquarks durch den Vier-Quark Operator $\mathcal{O}_{L,S}$ erzeugt werden. Abgesehen von bestimmten Quantenzahlen generiert dieser auch die dazu korrespondierende Meson-Meson Struktur des Tetraquarks.

Um diese Struktur bestimmen zu können, muss jedoch eine Umformung des Operators (3.2) vorgenommen werden. Ausgedrückt durch statisch-leicht Bilineare der Form $\bar{Q}\Gamma q$ ist es möglich die erzeugten Meson-Meson-Paare am Operator selbst abzulesen. Die Bilineare repräsentieren, je nach Wahl der Γ -Matrizen verschiedene Mesonen, bestehend aus einem statischen Quark \bar{Q} und einem leichten Quark $q \in \{u, d\}$, mit den Quantenzahlen J^P .

Der durch die statisch-leicht Bilineare $\bar{Q}\Gamma q$ ausgedrückte Vier-Quark Operator $\mathcal{O}_{L,S}$ ergibt sich durch die Fierz-Identität:

$$\mathcal{O}_{L,S}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = G(L, S)_{ab} \left(\bar{Q}(\vec{r}_1) \Gamma^a q^{(1)}(\vec{r}_1) \right) \left(\bar{Q}(\vec{r}_2) \Gamma^b q^{(2)}(\vec{r}_2) \right) \quad (3.4)$$

3.1. Bestimmung der $\bar{b}b$ Potentiale mit Methoden der Gitter QCD

mit

$$\mathbb{G}(L, S)_{ab} = \frac{1}{16} \text{Spur} \left((\mathcal{C}S)^T \Gamma_a^T (\mathcal{C}L) \Gamma_b \right), \quad (3.5)$$

wobei $\Gamma_{a,b}$ den inversen Matrizen von $\Gamma^{a,b}$ entsprechen.

Die Γ Matrizen der statisch-leicht Bilineare können acht verschiedene Werte annehmen und die folgenden Mesonen erzeugen:

- $\Gamma = (\mathbb{1} + \gamma_0)\gamma_5$ (pseudoskalares B -Meson ($J^P = 0^-$)),
- $\Gamma = (\mathbb{1} + \gamma_0)\gamma_j$ (vektorielles B^* -Meson ($J^P = 1^-$)),
- $\Gamma = (\mathbb{1} + \gamma_0)\mathbb{1}$ (skalares B_0^* -Meson ($J^P = 0^+$)),
- $\Gamma = (\mathbb{1} + \gamma_0)\gamma_j\gamma_5$ (pseudovektorielles B_1^* -Meson ($J^P = 1^+$)),

wobei $j = 1, 2, 3$ die möglichen Spinorientierungen der B^* - und B_1^* -Mesonen angibt. Die beiden Mesonen können sich folglich in den drei Zuständen $B_{(1),x}^*$, $B_{(1),y}^*$ und $B_{(1),z}^*$ befinden.

Das hier betrachtete Tetraquark entspricht im Grenzfall großer Abstände r einem System gebundener B - und B^* -Mesonen. Damit der Operator $\mathcal{O}_{L,S}$ ausschließlich Kombinationen dieser beiden Mesonen erzeugt, werden die Spin-Kopplungen L und S wie folgt gewählt:

$$L, S \in \{(\mathbb{1} + \gamma_0)\gamma_5, (\mathbb{1} + \gamma_0)\gamma_j\} \quad (j = 1, 2, 3) \quad (3.6)$$

In [15] wurde gezeigt, dass für diese Wahl von L und S der Ausdruck $\mathbb{G}(L, S)_{ab} \neq 0$ gilt, sofern die Gamma-Matrizen gemäß $\Gamma \in \{(\mathbb{1} + \gamma_0)\gamma_5, (\mathbb{1} + \gamma_0)\gamma_j\}$ gewählt werden. Alle weiteren möglichen Ausdrücke von Γ führen dazu, dass $\mathbb{G}(L, S)_{ab} = 0$ gilt. Der Operator $\mathcal{O}_{L,S}$ ist folglich nur dann ungleich Null, wenn die Bilineare in (3.4) B - und B^* -Mesonen entsprechen.

Für (3.6) sind schließlich 16 verschiedene Kombinationen von L und S , also leichten und schweren Spin Kopplungen, möglich. Jede dieser 16 Kombinationen entspricht einer möglichen Meson-Meson Struktur, welche sich aus einer Kombination der Bilineare ($B(\vec{r}_1)$, $B_x^*(\vec{r}_1)$, $B_y^*(\vec{r}_1)$, $B_z^*(\vec{r}_1)$) und ($B(\vec{r}_2)$, $B_x^*(\vec{r}_2)$, $B_y^*(\vec{r}_2)$, $B_z^*(\vec{r}_2)$) ergibt.²

Die erzeugte Meson-Meson Struktur kann so auf einfache Weise anhand der rechten Seite von (3.4) abgelesen werden. Dies ermöglicht es, die aus dem Operator $\mathcal{O}_{L,S}$ resultierenden Potentiale explizit einer bestimmten Kombinationen von B - und/oder B^* -Mesonen zuzuordnen. Später kann diese Struktur in der Schrödingergleichung über den Faktor V_0 berücksichtigt werden.

3.1.3. Resultierende Potentiale

Die resultierenden, vom Operator (3.4) erzeugten Potentiale eines $ud\bar{b}\bar{b}$ Tetraquarks sind aufgrund der statischen Näherung der Antiquarks unabhängig von der Wahl der Spinkopp-

² Es gilt: $B(\vec{r}) \equiv \bar{Q}(\vec{r})(\mathbb{1} + \gamma_0)\gamma_5 q(\vec{r})$ und $B^*(\vec{r}) \equiv \bar{Q}(\vec{r})(\mathbb{1} + \gamma_0)\gamma_j q(\vec{r})$ mit $j = 1, 2, 3$.

3. Untersuchung eines $ud\bar{b}\bar{b}$ Tetraquarks

lungskonstante S der Antiquarks. Lediglich die Freiheitsgrade des Spins j_q der leichten Quarks, welche über L festgelegt werden, sowie deren Flavors, charakterisiert durch den Isospin I des Tetraquarks, beeinflussen die Gestalt des Potentials.

Die Potentiale lassen sich dabei bezüglich der Wahl von L in zwei Klassen unterteilen:

$$V_5(r) \quad \text{für } L = (\mathbf{1} + \gamma_0)\gamma_5 \quad (j_q = 0)$$

und

$$V_j(r) \quad \text{für } L = (\mathbf{1} + \gamma_0)\gamma_j \quad (j_q = 1),$$

wobei $j = 1, 2, 3$ gilt und V_j durch Linearkombinationen von L erzeugt wird.

Beide Potentiale sind entweder attraktiv oder repulsiv, je nach dem welchen Isospin das Tetraquark besitzt. Dieses kann sich entweder in einem Isosingulett Zustand mit $I = 0$ ($qq = (ud - du)/\sqrt{2}$) oder einem Isotriplett Zustand mit $I = 1$ ($qq \in uu, (ud + du)/\sqrt{2}, dd$) befinden.

Für die beiden Potential-Klassen gelten die folgenden Regeln:

- $I = 0$: attraktives Potential $V_5(r)$ und repulsives Potential $V_j(r)$
- $I = 1$: repulsives Potential $V_5(r)$ und attraktives Potential $V_j(r)$

Für ein $ud\bar{b}\bar{b}$ Tetraquark ergeben sich daraus zwei mögliche Kanäle, in denen ein Bindungszustand existieren kann: Der skalare Isosingulett Kanal ($j_q = 0, I = 0$) und der vektorieller Isotriplett Kanal ($j_q = 1, I = 1$). Die dazu korrespondierenden attraktiven Potentiale $V_5(r)$ und $V_j(r)$ wurden in [14] mit Hilfe eines χ^2 -Minimizing Fits der Fit-Funktion (3.3) an die Gitter-QCD Ergebnisse ermittelt. Die leichten u/d Quarks wurden dabei auf ihre physikalischen Massen gesetzt (bei einer Pionmasse $m_\pi \approx 140$ MeV)³. Die Ergebnisse der Parameter α_i und d_i mit $i \in \{5, j\}$ sind in Tabelle 3.1 aufgelistet.

Kanal	α	d [fm]
skalärer Isosingulett Kanal	$0.34_{-0.03}^{+0.03}$	$0.45_{-0.10}^{+0.12}$
vektorieller Isotriplett Kanal	$0.29_{-0.06}^{+0.05}$	$0.16_{-0.02}^{+0.05}$

Tabelle 3.1.: Ergebnisse aus [14] des χ^2 -Minimizing Fit der Gitter QCD Ergebnisse der attraktiven Potentiale $V_5(r)$ für den skalaren Isosingulett Kanal ($j_q = 0, I = 0$) und $V_j(r)$ für den vektoriellen Isotriplett Kanal ($j_q = 1, I = 1$).

Beim Plotten des Potentials (3.3) mit diesen Parametern fällt auf, dass sich das $I = 1$ Potential V_j im Vergleich zum $I = 0$ Potential V_5 weniger attraktiv verhält (siehe Abbildung 3.2). In [14] konnte gezeigt werden, dass die anziehenden Kräfte dabei nicht ausreichen,

³ Das Pion ist ein Meson bestehend aus u/d Quarks und dient daher als Referenz für die leichten Quarkmassen.

3.1. Bestimmung der $\bar{b}b$ Potentiale mit Methoden der Gitter QCD

um einen stabilen Tetraquark Bindungszustand zu bilden. Im Folgenden liegt der Fokus daher auf dem attraktiven $I = 0$ Kanal.

Bei der Berücksichtigung der Massendifferenz von B und B^* -Mesonen durch die Betrachtung der vom Operator (3.4) erzeugten Meson-Meson-Struktur ist zu beachten, dass einige Mesonen Paare nicht explizit zu einer der beiden Potential-Klassen korrespondieren. Diese Mesonen Kombinationen können nur durch eine Linearkombination repulsiver und attraktiver Potentiale V_5 und V_j erzeugt werden. Für die Untersuchung des Tetraquarks im $I = 0$ Kanal muss daher auch das repulsive Potential V_j bestimmt werden. In [9] wurden die folgenden Parameter ermittelt⁴:

$$\alpha_j = -(0.10 \pm 0.07), \quad (3.7a)$$

$$d_j = (0.28 \pm 0.17) \text{ fm}. \quad (3.7b)$$

Es ist dabei zu beachten, dass es nicht möglich war einen stabilen χ^2 -Minimizing Fit des Potentials durchzuführen. Die beiden Parameter α_j und d_j sowie deren Fehler konnten daher nicht exakt bestimmt werden. Aufgrund der Ungenauigkeit dieser Ergebnisse wird in Kapitel 5 explizit auf den Einfluss des repulsiven Potentials auf die Bindungszustände des Tetraquarks eingegangen. Ein Plot von $V(r)$ mit den Parametern (3.7) ist in Abbildung 3.2 zu sehen.

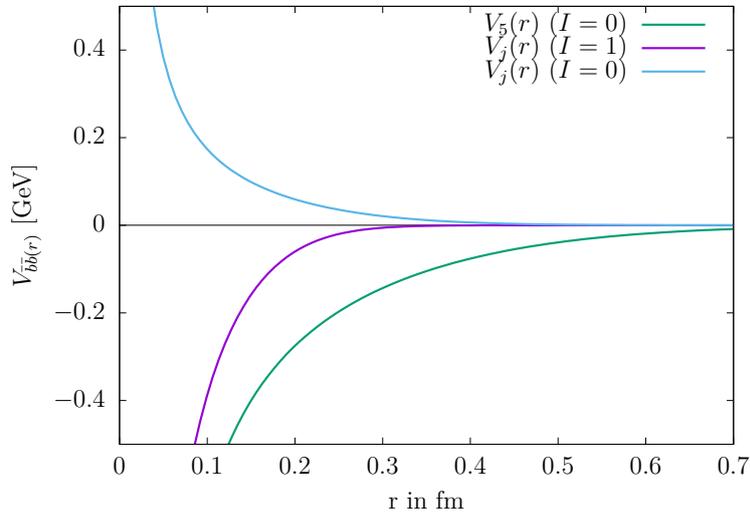


Abbildung 3.2.: Das attraktive $I = 0$ Potential $V_5(r)$ (grün) und das weniger attraktive $I = 1$ Potential $V_j(r)$ (lila), sowie das repulsive $I = 0$ Potential $V_j(r)$ (blau).

⁴ In [9] (Quelle: arXiv.org) liegt hier ein Tippfehler vor. Da es sich bei $V_j(r)$ im $I = 0$ Kanal um ein repulsives Potential handelt (d. h. $V_j > 0$), muss $\alpha_j < 0$ gewählt werden [14, S.15].

3.2. Aufstellen der Schrödingergleichung des Systems

Die im vorherigen Kapitel ermittelten Potentiale können nun in der Schrödingergleichung (2.1) der beiden \bar{b} Quarks verwendet werden. Dabei wird das Tetraquark, analog zum Vorgehen in [7] und [8], zunächst in der Näherung ohne heavy-Spin Effekte betrachtet.

Anschließend wird der in [9] vorgestellte Ansatz angewendet, wobei neben den Potentialen auch die dazu korrespondierenden, vom Operator (3.4) erzeugten Meson-Meson Paare in die Schrödingergleichung integriert und auf diese Weise heavy-Spin Effekte berücksichtigt werden.

3.2.1. Näherung ohne Berücksichtigung von heavy-Spin Effekten

In früheren Forschungsarbeiten wurde der aufgrund von heavy-Spin Effekten auftretende Massenunterschied zwischen B - und B^* -Mesonen vernachlässigt. Die beiden Mesonen wurden stattdessen als degenerierte Zustände der gleichen Energie betrachtet.

In dieser Näherung wird folglich die genaue Meson-Meson Struktur des Tetraquarks vernachlässigt. Man geht vereinfachend davon aus, dass das Tetraquark für große Abstände r der \bar{b} Quarks einem System von zwei gebundenen B -Mesonen entspricht. Die Energie des Tetraquarks entspricht, bei verschwindender Interaktion zwischen den beiden Antiquarks, daher der zweifachen Masse eines B -Mesons. Für den Faktor V_0 im Hamiltonien H_0 der \bar{b} Quarks gilt entsprechend $V_0 = 2m_B$.

Es ergibt sich eine Schrödingergleichung der folgenden Form:

$$\left(\frac{\vec{p}_1^2 + \vec{p}_2^2}{2m_b} + 2m_B + V(r) \right) \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \tilde{E} \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2). \quad (3.8)$$

Das Potential $V(r)$ entspricht, je nach dem ob das Tetraquark im skalaren Isosingulett Kanal oder im vektoriellen Isotriplett Kanal betrachtet wird, den attraktiven Potentialen $V_5(r)$ oder $V_j(r)$.

3.2.2. Näherung mit Berücksichtigung von heavy-Spin Effekten

Eine genauere Betrachtung des Tetraquarks berücksichtigt den tatsächlichen Massenunterschied Δm_B der B - und B^* -Mesonen. Die beiden Mesonen werden in diesem Fall nicht als degenerierte Zustände der gleichen Energie behandelt und die genaue Meson-Meson Struktur des Tetraquarks wird in der Schrödingergleichung berücksichtigt.

In Abschnitt 3.1 wurde erläutert, dass für ein $ud\bar{b}\bar{b}$ Tetraquark 16 verschiedene Kombinationen von B - und B^* -Mesonen möglich sind. Es wird daher eine 16-komponentige Wellenfunktion $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ definiert, deren Komponenten jeweils den möglichen Mesonen-Paaren entsprechen. Für die ersten Komponenten gilt: $\Psi_1 = B(\vec{r}_1)B(\vec{r}_2)$, $\Psi_2 = B(\vec{r}_1)B_x^*(\vec{r}_2)$, $\Psi_3 = B(\vec{r}_1)B_y^*(\vec{r}_2)$ usw.

3.2. Aufstellen der Schrödingergleichung des Systems

Die Schrödingergleichung (2.1) erhält damit die Gestalt von 16×16 gekoppelten Differentialgleichungen:

$$(H_0 + H_{\text{int}}) \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \tilde{E} \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2), \quad (3.9)$$

wobei die Hamiltoniens H_0 und H_{int} wie folgt definiert werden:

$$H_0 = M \otimes \mathbb{1}_{4 \times 4} + \mathbb{1}_{4 \times 4} \otimes M + \frac{\vec{p}_1^2 + \vec{p}_2^2}{2m_b} \mathbb{1}_{16 \times 16} \quad (3.10a)$$

$$\text{mit } M = \text{diag}(m_B, m_{B^*}, m_{B^*}, m_{B^*}) \quad (3.10b)$$

und

$$H_{\text{int}} = T^{-1} V(r) T \quad (3.11a)$$

$$\text{mit } V(r) = \text{diag}(V_5, V_j, V_j, V_j) \otimes \mathbb{1}_{4 \times 4}. \quad (3.11b)$$

Die Matrix T transformiert dabei zwischen den vom Operator $\mathcal{O}_{L,S}$ erzeugten Mesonen Paaren (BB , BB_x^* , BB_y^* usw.) und den dazu korrespondierenden repulsiven und attraktiven Potentialen $V_5(r)$ und $V_j(r)$. Die Komponenten von T entsprechen den Koeffizienten $G(L, S)_{ab}$ aus der Fierz-Identität (3.4).

Jeder Komponente der Wellenfunktion $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ werden auf diese Weise die passenden Lienarkombinationen der Potentiale zugeordnet und zusätzlich an geeigneter Stelle die Massendifferenz Δm_B der B - und B^* -Mesonen hinzuaddiert.

Entkopplung der Schrödingergleichung

Da es sich bei T um keine Diagonalmatrix handelt, entspricht die Schrödingergleichung (3.9) 16 gekoppelten Differentialgleichungen. Diese lässt sich jedoch bezüglich des Gesamtspins S des Tetraquarks entkoppeln, so dass sich das System für $S \in \{0, 1, 2\}$ zu unabhängigen 1×1 und 2×2 Gleichungen vereinfachen lässt. Jede dieser entkoppelten Gleichungen beschreibt ein Tetraquark mit bestimmten Quantenzahlen $I(J^P)$ und ist damit nur für bestimmte Zustände des Teilchens gültig. Für die sich ergebenden Schrödingergleichungen gelten die folgenden Quantenzahlen:

- **Block 1:** Für $S = 0$ ergibt sich eine 2×2 Gleichung, welche ein Tetraquark im $I = 0$ oder $I = 1$ Kanal beschreibt.
- Für $S = 1$ ergeben sich degenerierte Zustände mit $s = S_z = -1, 0, 1$, welche durch drei identische 3×3 Gleichungen beschrieben werden. Durch Symmetrieüberlegungen der Wellenfunktion lassen sich diese bezüglich des Isospins weiter entkoppeln [15]:
 - **Block 2:** Für $I = 1$ (Wellenfunktion symmetrisch unter Meson-Vertauschung) ergeben sich drei 1×1 Gleichungen.
 - **Block 3:** Für $I = 0$ (Wellenfunktion antisymmetrisch unter Meson-Vertauschung) ergeben sich drei 2×2 Gleichungen.

3. Untersuchung eines $ud\bar{b}\bar{b}$ Tetraquarks

- **Block 4:** Für $S = 2$ ergeben sich (wegen $s = S_z = -2, -1, 0, 1, 2$) fünf identische 1×1 Gleichungen, welche ein Tetraquark im $I = 0$ oder $I = 1$ Kanal beschreiben.

In dieser Arbeit liegt der Fokus auf einem Tetraquark im $I = 0$ Kanal, da für diesen ein Bindungszustand zu erwarten ist. Es sind folglich zunächst die Gleichungen des Block 1, Block 3 und Block 4 von Interesse für die weiteren Berechnungen.

Für den $I = 0$ Kanal hat V_j eine repulsive Wirkung und kann alleine wirkend keinen Bindungszustand von vier Quarks hervorrufen. Da die $S = 2$ Schrödingergleichungen (Block 4) ausschließlich V_j Potentiale enthalten, kann man davon ausgehen, dass kein Bindungszustand eines Tetraquarks mit den Quantenzahlen $I = 0$ und $S = 2$ existiert.

Die $S = 0$ und $S = 1$ Gleichungen enthalten dagegen eine Mischung aus attraktiven V_5 und repulsiven V_j Potentialen, deren resultierende anziehende Wirkung ausreichen sollte, um einen Tetraquark Bindungszustand zu bilden. Für die Betrachtung eines $ud\bar{b}\bar{b}$ Tetraquarks im $I = 0$ Kanal gilt es daher, die im Folgenden aufgelisteten Gleichungen des Block 1 und Block 3 zu betrachten.

Weitere Details zur Entkopplung der Schrödingergleichung (3.9) inklusive einer Auflistung aller daraus resultierenden Gleichungen (Block 2 und Block 4) sind in [9] und [15] zu finden.

Block 1: $S = 0$ Schrödingergleichung

Ein Tetraquark mit Gesamtspin $S = 0$ wird durch die folgende 2×2 Schrödingergleichung beschrieben:

$$\left(\begin{pmatrix} 2m_B & 0 \\ 0 & 2m_{B^*} \end{pmatrix} + \frac{\vec{p}_1^2 + \vec{p}_2^2}{2m_b} \mathbb{1}_{2 \times 2} + \tilde{H}_{\text{int}, S=0} \right) \tilde{\Psi}_{S=0}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \tilde{E} \tilde{\Psi}_{S=0}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \quad (3.12a)$$

mit

$$\tilde{H}_{\text{int}, S=0} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} V_5(r) + 3V_j(r) & \sqrt{3}(V_5(r) - V_j(r)) \\ \sqrt{3}(V_5(r) - V_j(r)) & 3V_5(r) + V_j(r) \end{pmatrix}. \quad (3.12b)$$

Die Wellenfunktion ist wie folgt definiert:

$$\tilde{\Psi}_{S=0} = \begin{pmatrix} BB \\ \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{B}^*)^2 \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

wobei $(\vec{B}^*)^2 = B_x^* B_x^* + B_y^* B_y^* + B_z^* B_z^*$ gilt.

Um die Existenz eines Tetraquarks zu überprüfen, wird dessen Bindungsenergie E_B gesucht. Die kleinst mögliche Bindungsenergie des durch Gleichung (3.12) beschriebenen Tetraquarks lässt sich anschaulich bestimmen, indem man das Teilchen als gebundenes System von zwei Mesonen betrachtet. In diesem Fall verschwinden die Interaktionen zwischen den \bar{b} Quarks und es gilt $H_{\text{int}, S=0} = 0$. Gleichung (3.12) lässt sich dadurch in zwei unabhängige Differentialgleichungen entkoppeln, welche jeweils Paare nicht inter-

3.3. Mögliche Quantenzahlen des Tetraquarks

agierender Mesonen, genauer ein BB und B^*B^* System, beschreiben. Das Tetraquark hat folglich mindestens die Energie $2m_B$ eines BB -Paares, weshalb die kleinste mögliche Bindungsenergie des Tetraquarks $E_B = E - 2m_B$ beträgt.

Block 3: $S = 1$ Schrödingergleichungen

Ein Tetraquark mit Gesamtspin $S = 1$ wird durch die folgende 2×2 Schrödingergleichung (mit $s = -1, 0, 1$) beschrieben:

$$\left(\begin{pmatrix} m_{B^*} + m_B & 0 \\ 0 & 2m_{B^*} \end{pmatrix} + \frac{\vec{p}_1^2 + \vec{p}_2^2}{2m_b} \mathbb{1}_{2 \times 2} + \tilde{H}_{\text{int}, S=1} \right) \tilde{\Psi}_{S=1, s}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \tilde{E} \tilde{\Psi}_{S=1, s}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \quad (3.14a)$$

mit

$$\tilde{H}_{\text{int}, S=1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} V_j(r) + V_5(r) & V_j(r) - V_5(r) \\ V_j(r) - V_5(r) & V_j(r) + V_5(r) \end{pmatrix}. \quad (3.14b)$$

Die Wellenfunktion ist wie folgt definiert:

$$\tilde{\Psi}_{S=1, s} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} B_s^* B - B B_s^* \\ \epsilon_{skl} B_k^* B_l^* \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Es ist zu beachten, dass diese Gleichung ausschließlich ein $ud\bar{b}\bar{b}$ Tetraquark mit Isospin $I = 0$ beschreibt, da die Wellenfunktion antisymmetrisch unter Meson-Vertauschung ist.

Die kleinste mögliche Bindungsenergie des durch Gleichung (3.14) beschriebenen Tetraquarks beträgt $E_B = E - (m_{B^*} + m_B)$.

3.3. Mögliche Quantenzahlen des Tetraquarks

Ein Tetraquark zeichnet sich durch seine Quantenzahlen $I(J^P)$ aus, die sich durch eine Symmetriebetrachtung der Gesamtwellenfunktion des Tetraquarks bestimmen lassen.

Für die Suche nach Bindungszuständen unter Berücksichtigung von heavy-Spin Effekten muss außerdem geklärt werden, welche der beiden Schrödingergleichungen (3.12) (für $S = 0$) und (3.14) (für $S = 1$) die zu untersuchenden Tetraquark-Zustände beschreiben. Die Untersuchung der Quantenzahlen $I(J^P)$ werden im Folgenden Auskunft darüber geben.

Die Gesamtwellenfunktion eines Hadrons setzt sich zusammen aus Wellenfunktionen im Orts-, Farb-, Spin- und Flavor-Raum [16]:

$$|\psi\rangle = |Ort\rangle \otimes |Farbe\rangle \otimes |Spin\rangle \otimes |Flavor\rangle. \quad (3.16)$$

Dabei können die im Tetraquark gebundenen Antiquarks $\bar{b}\bar{b}$ und die leichteren Quarks qq getrennt voneinander betrachtet werden. Die Gesamtwellenfunktion des Tetraquarks setzt sich dann zusammen aus einer Wellenfunktion der Antiquarks $|\psi\rangle_{\bar{b}\bar{b}}$ und einer Wellenfunk-

3. Untersuchung eines $ud\bar{b}\bar{b}$ Tetraquarks

Leichte Quarks qq			Schwere Antiquarks $\bar{b}\bar{b}$				$\bar{b}\bar{b}qq$	
Isospin I	Spin j_q	Farbe	Sorte	Spin j_b	Ort L	Farbe	S	J^P
0(A)	0(A)	$\bar{\mathbf{3}}$ (A)	(S)	1 (S)	0,2,...(S)	$\mathbf{3}$ (A)	1	$ 1 - L ^+ \leq J^+ \leq 1 + L ^+$
0(A)	1(S)	$\mathbf{6}$ (S)	(S)	0 (A)	0,2,...(S)	$\bar{\mathbf{6}}$ (S)	1	$ 1 - L ^+ \leq J^+ \leq 1 + L ^+$
0(A)	0(A)	$\bar{\mathbf{3}}$ (A)	(S)	0 (A)	1,3,...(A)	$\mathbf{3}$ (A)	0	L^-
0(A)	1(S)	$\mathbf{6}$ (S)	(S)	1 (S)	1,3,...(A)	$\bar{\mathbf{6}}$ (S)	0,1,2	$ 2 - L ^- \leq J^- \leq 2 + L ^-$

Tabelle 3.2.: Mögliche Kombinationen der Quantenzahlen und Farbrepräsentationen eines $\bar{b}\bar{b}qq$ Tetraquarks mit $q \in \{u, d\}$. Die entsprechenden Wellenfunktionen können entweder symmetrisch (S) oder antisymmetrisch (A) sein.

tion der leichten Quarks $|\psi\rangle_{qq}$. Beide Wellenfunktionen werden analog zu (3.16) definiert. Da Orts- und Spin-Wellenfunktion der leichten Quarks qq jedoch nicht unterscheidbar sind, werden diese zu einer Gesamtspin-Wellenfunktion $|\text{Gesamtspin}\rangle_{qq}$ zusammengefasst [16].

Bei den Quarks handelt es sich außerdem um Fermionen, weshalb diese dem Pauli-Prinzip unterliegen. Für die Wellenfunktionen $|\psi\rangle_{\bar{b}\bar{b}}$ und $|\psi\rangle_{qq}$ folgt daraus, dass diese insgesamt jeweils antisymmetrisch sein müssen [9]. Unter Berücksichtigung dieser Bedingung lassen sich die möglichen Quantenzahlen eines $ud\bar{b}\bar{b}$ Tetraquarks bestimmen.

Wie bereits in Abschnitt 3.1.3 erläutert wurde, ist ein Tetraquark Bindungszustand nur im skalaren Isosingulett Kanal mit dem attraktiven Potential V_5 zu erwarten. Es wird daher ausschließlich ein $ud\bar{b}\bar{b}$ Tetraquark mit Isospin $I = 0$ untersucht. In [8] wurden die Quantenzahlen eines solchen $qq\bar{b}\bar{b}$ Systems bereits detailliert betrachtet. Im Folgenden wird analog zu diesen Untersuchungen vorgegangen.

Es wird zunächst die Wellenfunktion der leichten Quarks $|\psi\rangle_{qq}$ betrachtet. Der Isospin des Tetraquarks wird durch die Flavors der leichten Quarks festgelegt, wobei für $I = 0$ eine antisymmetrische Wellenfunktion $|\text{Flavor}\rangle_{qq}$ mit einer Quarkzusammensetzung von $qq \in (ud - du)/\sqrt{2}$ vorliegt.

Die Spins j_q der leichten Quarks können nun entweder antiparallel ($j_q = 0$) oder parallel ($j_q = 1$) zueinander ausgerichtet sein. Für den Fall $j_q = 0$ (Zeile 1 und 3 in Tabelle 3.2) resultiert eine antisymmetrische Wellenfunktion $|\text{Gesamtspin}\rangle_{qq}$. Damit die Bedingung einer antisymmetrischen Gesamtwellenfunktion $|\psi\rangle_{qq}$ erfüllt ist, muss $|\text{Farbe}\rangle_{qq}$ folglich antisymmetrisch sein. Dies ist erfüllt wenn die beiden leichten Quarks qq in einem Farb-Anti-Triplett $\bar{\mathbf{3}}$ auftreten.

Da sich Tetraquarks insgesamt in einem farbneutralen Zustand befinden, müssen die beiden Antiquarks $\bar{b}\bar{b}$ zusammen mit den leichten Quarks qq einen Farb-Singulett Zustand bilden. Dies ist der Fall, wenn die beiden Antiquarks ein Farb-Triplett $\mathbf{3}$ mit einer antisymmetrischen Wellenfunktion $|\text{Farbe}\rangle_{\bar{b}\bar{b}}$ bilden. Das resultierende Potential ist dabei attraktiv [14].

Die Flavor-Wellenfunktion $|\text{Flavor}\rangle_{\bar{b}\bar{b}}$ ist in jedem Fall symmetrisch, da beide Antiquarks

3.3. Mögliche Quantenzahlen des Tetraquarks

L	$I(J^P)$
0	$0(1^+)$
1	$0(1^-)$
2	$0(1^+), 0(2^+), 0(3^+)$
3	$0(3^-)$

Tabelle 3.3.: Mögliche Quantenzahlen des Grundzustandes ($L = 0$) und der angeregten Zustände ($L = 1, 2, 3$) eines $ud\bar{b}\bar{b}$ Tetraquarks im skalaren Isosingulett Kanal ($j_q = 0, I = 0$).

von der gleichen Sorte sind. Für die Wellenfunktionen $|Ort\rangle_{\bar{b}\bar{b}}$ und $|Spin\rangle_{\bar{b}\bar{b}}$ bestehen schließlich zwei Möglichkeiten, aus denen eine antisymmetrische Wellenfunktion der \bar{b} Quarks resultieren kann. Entweder ist $|Spin\rangle_{\bar{b}\bar{b}}$ antisymmetrisch ($j_b = 0$), dann folgt, dass $|Ort\rangle_{\bar{b}\bar{b}}$ symmetrisch sein muss, was immer dann gilt wenn L gerade Werte annimmt (Zeile 1 in Tabelle 3.2). Oder aber $|Spin\rangle_{\bar{b}\bar{b}}$ ist symmetrisch ($j_b = 1$), was wiederum eine antisymmetrische Wellenfunktion $|Ort\rangle_{\bar{b}\bar{b}}$ zur Folge hat, wobei L in diesem Fall ungerade Werte annimmt (Zeile 3 in Tabelle 3.2).

Analog zu diesen beiden Fällen kann auch für den Kanal mit parallel zueinander ausgerichteten leichten Spins $j_q = 1$ verfahren werden. Im Farb-Raum der leichten Quarks qq ergibt sich in diesem Fall ein symmetrisches Farb-Sextett $\mathbf{6}$ und daraus folgend ein ebenfalls symmetrisches Farb-Anti-Sextett $\bar{\mathbf{6}}$ für die beiden Antiquarks $\bar{b}\bar{b}$. Insgesamt resultiert daraus ein repulsives Potential [14]. Für L und j_b ergeben sich die oben erläuterten Möglichkeiten, welche zu den Quantenzahlen in Zeile 2 und 3 der Tabelle 3.2 führen.

In Tabelle 3.2 sind neben den Ergebnissen der Symmetrieüberlegungen außerdem die sich daraus ergebenden Werte für S, J und P aufgelistet. Für den Gesamtspin S des Tetraquarks gilt dabei:

$$S = j_q \oplus j_b \quad (|j_q - j_b| \leq S \leq |j_q + j_b|). \quad (3.17)$$

Der Gesamtdrehimpuls ist definiert als:

$$J = S \oplus L \quad (|S - L| \leq J \leq |S + L|) \quad (3.18)$$

und für die Parität P eines Tetraquarks, welches für große Abstände r der \bar{b} Quarks als gebundener Zustand zweier Mesonen beschrieben werden kann, gilt allgemein⁵:

$$P = (-1)^L. \quad (3.19)$$

⁵ Für die Parität zweier Mesonen A und B gilt: $P_{AB} = P_A \cdot P_B \cdot (-1)^L$, wobei Mesonen negative Parität besitzen, da Quark und Antiquark immer entgegengesetzte Parität haben [17]. Daraus folgt eine Gesamtparität $P = (-1)^L$.

3. Untersuchung eines $ud\bar{b}\bar{b}$ Tetraquarks

Die Quantenzahlen $I(J^P)$ des Tetraquarks im skalaren Isosingulett Zustand ($I = 0, j_q = 0$) können in Zeile 1 und 3 der Tabelle 3.2 abgelesen werden. Es soll nach Bindungszuständen im Grundzustand ($L = 0$) sowie in den drei angeregten Zustände mit $L = 1, 2, 3$ gesucht werden. Die dazu korrespondierenden Quantenzahlen sind in Tabelle 3.3 aufgelistet.

Die bezüglich $S = 0$ und $S = 1$ entkoppelten Schrödingergleichungen (3.12) und (3.14) lassen sich nun mit Hilfe der Symmetrieüberlegungen diesen möglichen Quantenzahlen zuordnen. Zeile 1 und 2 in Tabelle 3.2 korrespondieren zu einem Gesamtspin $S = 1$ und führen zu den Quantenzahlen mit geraden Bahndrehimpulsen L . Um die Tetraquark Zustände mit $L \in \{0, 2\}$ zu untersuchen, muss folglich die $S = 1$ Gleichung (Block 3) gelöst werden. Die Zustände des Tetraquarks mit ungeradem $L \in \{1, 3\}$ lassen sich durch Zeile 3 und 4 in Tabelle 3.2 realisieren. Diese korrespondieren zu einem Gesamtspin $S = 0$ und müssen daher durch die $S = 0$ Gleichung (Block 1) gelöst werden.

4. Numerische Bestimmung der Bindungszustände

Um zu überprüfen, ob ein $ud\bar{b}\bar{b}$ Tetraquark existieren kann, muss dessen Bindungsenergie durch das Lösen der im vorherigen Kapitel aufgestellten Schrödingergleichungen bestimmt werden. Aufgrund der komplizierten Form der Potentiale $V_5(r)$ und $V_j(r)$ lassen sich diese allerdings nicht analytisch lösen. Zur Berechnung der Bindungsenergie müssen daher numerische Methoden angewendet werden.

Bei den zu lösenden Schrödingergleichungen handelt es sich um Eigenwertprobleme gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Die Funktionswerte der Lösungsfunktionen sind an den Rändern des Intervalls $r \in \{0, \infty\}$ vorgegeben. Zur numerischen Berechnung solcher Randwertprobleme eignet sich das sogenannte Shooting-Verfahren, welches in Abschnitt 4.1 erläutert werden soll. Inhaltlich orientieren sich die Ausführungen dieses Abschnitts an [18] und [19].

In den Abschnitten 4.2 und 4.3 werden anschließend die Schrödingergleichungen der Näherungen ohne und mit heavy-Spin Effekten für die Anwendung des Shooting-Verfahrens vorbereitet.

4.1. Das Shooting-Verfahren

Das Shooting-Verfahren ist ein numerisches Verfahren zur Lösung von Randwertproblemen, d. h. von gewöhnlichen Differentialgleichungen, deren Lösungsfunktionen an den Grenzen des vorgegebenen Definitionsbereiches $I \in [a, b]$ bestimmte Randbedingungen erfüllen. In der Regel handelt es sich dabei um Dirichlet- oder Neumann Randbedingungen, d. h. dass entweder nur die Funktionswerte oder Ableitungen der Lösungsfunktion an den Intervallgrenzen vorgegeben sind.

Um die Lösungsfunktion einer Differentialgleichung dieser Art zu bestimmen, wird diese zunächst in ein Anfangswertproblem umgewandelt. Anfangswertprobleme zeichnen sich im Gegensatz zu Randwertproblemen dadurch aus, dass nur an einer Grenze des Definitionsbereiches Randbedingungen vorgegeben sind, wobei dabei sowohl der Funktionswert als auch der Gradient der Lösungsfunktion bekannt sind. Bei der Umwandlung eines Randwertproblems in ein Anfangswertproblem ist daher eine der erforderlichen Anfangsbedingungen unbekannt und muss geraten werden.

Ausgehend von diesen wahlweise am Punkt a festgelegten Anfangsbedingungen kann die Differentialgleichung mit Hilfe numerischer Integrationsverfahren gelöst werden. Das Verfahren muss dabei wiederholt angewendet und die geratene Anfangsbedingung so lange

4. Numerische Bestimmung der Bindungszustände

variiert werden, bis die resultierende Lösungsfunktion die geforderte Randbedingung an der gegenüberliegenden Intervallgrenze b erfüllt.

Der Name des Verfahrens kommt durch die Ähnlichkeiten dieses Vorgehens mit dem Einschießen eines Gewehrs, da man hier, analog zur Wahl der Anfangsbedingung, den Schießwinkel der Artillerie so lange verändert, bis das gewünschte Ziel, in diesem Fall die Randbedingung am Punkt b , getroffen wird.

Anwendung des Shooting-Verfahrens bei Eigenwertproblemen

Bei den zu lösenden Schrödingergleichungen handelt es sich um Eigenwertgleichungen, spezielle Randwertprobleme, deren Differentialgleichungen neben der unbekanntem Lösungsfunktion von einem weiteren Parameter, dem Eigenwert (in diesem Fall die Eigenenergie E des Tetraquarks), abhängen. Dieser entspricht im Grunde einer zusätzlichen Randbedingung.

Für die Anwendung des Shooting-Verfahrens müssen die Schrödingergleichungen zunächst in Differentialgleichungen erster Ordnung umgewandelt werden, damit für Probleme erster Ordnung formulierte numerische Integrationsverfahren angewendet werden können.

Das allgemeine Vorgehen wird im Folgenden für den eindimensionalen Fall beschrieben, kann aber auf beliebige Dimensionen erweitert werden.

Die Schrödingergleichungen können in der Form einer Differentialgleichung erster Ordnung allgemein wie folgt ausgedrückt werden:

$$\frac{d}{dr}y(r) = f(r, y(r), E), \quad r \in [a, b] \quad (4.1)$$

mit den Randbedingungen

$$\alpha = y(a), \quad \beta = y(b), \quad (4.2)$$

wobei nur für bestimmte Eigenwerte E Lösungen der Differentialgleichung existieren.

Die Lösungsfunktion wird nun ausgehend von den Anfangsbedingungen $y(a)$ und $dy(a)/dr$ numerisch auf dem vorgegebenen Intervall integriert. Im Falle der zu lösenden Schrödingergleichungen lassen sich diese Anfangsbedingungen durch Überlegungen aus der Quantenmechanik bestimmen und müssen folglich nicht geraten werden. Die Eigenenergie E ist dagegen unbekannt und wird daher auf einen zu variierenden Energiewert \mathcal{E} gesetzt.

Für die numerische Integration wird in dieser Arbeit ein Runge-Kutta Verfahren vierter Ordnung (RK4-Verfahren)¹ angewendet. Algorithmen dieser Art finden die Lösungen von Differentialgleichungen, indem die Funktionswerte und Ableitungen der Lösungsfunktion, ausgehend von den gewählten Anfangsbedingungen, Schritt für Schritt innerhalb des vorgegebenen Intervalls berechnet werden. Dazu wird das Intervall in mehrere Teilintervalle der Länge τ , welche als Schrittgröße bezeichnet wird, aufgeteilt.

¹ Eine detaillierte Beschreibung dieses numerischen Verfahrens kann in Textbüchern zu Numerischen Methoden der Mathematik, wie z. B. [18], oder in [19] nachgelesen werden.

4.2. Anwendung in der Näherung ohne heavy-Spin Effekte

Es ergibt sich eine von dem gewählten Energiewert abhängige Lösungsfunktion $y(r, \mathcal{E})$. Gesucht wird nun die Energie \mathcal{E} , für welche die Randbedingung an der Intervallgrenze $r = b$ exakt erfüllt ist, d. h. für die $y(b, \mathcal{E}) = \beta$ gilt. Dies ist der Fall, wenn die wie folgt definierte Funktion

$$F(\mathcal{E}) := y(b, \mathcal{E}) - \beta \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.3)$$

eine Nullstelle aufweist.

Um den passenden Energiewert \mathcal{E} zu finden für den $F(\mathcal{E}) = 0$ gilt, führt man zunächst einen groben Energiescan durch. Dafür integriert man die Differentialgleichung für mehrere Energiewerte $\mathcal{E} \in [E_{min}, E_{max}]$ und kann so eine Startenergie \mathcal{E}_{Start} bestimmen, für welche die zweite Randbedingung ungefähr erfüllt ist, d. h. $F(\mathcal{E}_{Start}) \approx 0$ gilt.

Ausgehend von \mathcal{E}_{Start} kann anschließend das eigentliche Shooting-Verfahren durchgeführt werden. Mit Hilfe eines *root-finding* Algorithmus, in diesem Fall ein Newton-Raphson Verfahren¹, wird dabei die exakte Nullstelle von $F(\mathcal{E})$ ermittelt. Der Algorithmus führt mehrere Durchläufe durch, in denen $y(r, \mathcal{E})$ mit dem RK4-Verfahren berechnet wird und anschließend überprüft wird, ob $F(\mathcal{E}) = 0$ gilt. Die Startenergie \mathcal{E}_{Start} wird dabei nach jedem Durchlauf geringfügig angepasst, bis sich eine Nullstelle mit der gewünschte Genauigkeit *prec* findet.

Das resultierende Ergebnis für die Eigenenergie E muss anschließend noch auf Stabilität untersucht werden. Das Verfahren gilt dabei als stabil, wenn eine Veränderung der numerischen Parameter, wie Schrittgröße τ und Genauigkeit *prec* des Newton-Raphson Verfahrens, zu keinem merklichen Unterschied im Ergebnis von E führt.

4.2. Anwendung in der Näherung ohne heavy-Spin Effekte

Um das Runge-Kutta Shooting-Verfahren vierter Ordnung zur Lösung der Schrödingergleichung (3.8) anzuwenden, muss diese zunächst für die numerischen Berechnungen vorbereitet werden. Dies beinhaltet passende Koordinatentransformationen sowie die Umwandlung in eine Differentialgleichung erster Ordnung. Anschließend müssen außerdem die Randbedingungen der Wellenfunktion bestimmt werden.

4.2.1. Analytische Vereinfachungen der Schrödingergleichung

Die zu lösende Schrödingergleichung (3.8) entspricht einem Zweikörperproblem, welches die Bewegung der beiden im Tetraquark enthaltenen \bar{b} Quarks beschreibt. Da die Potentiale $V_5(r)$ und $V_j(r)$ radial symmetrisch sind, also nur vom Abstand r der beiden Antiquarks abhängen, handelt es sich dabei außerdem um sogenannte Zentralpotentiale [20].

Das Vorgehen zur Lösung eines Zweikörperproblems in einem Zentralpotential wird in Grundlagenbüchern zur Quantenmechanik detailliert beschrieben und kann analog auf die hier vorliegende Differentialgleichung angewendet werden. Im Folgenden werden lediglich die Ergebnisse aus [21] und [22] zusammengefasst.

4. Numerische Bestimmung der Bindungszustände

Gleichung (3.8) kann in ein Einkörperproblem umgewandelt werden, indem in die Schwerpunktkoordinate $\vec{r}_s = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)/2$ und die Relativkoordinate $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ transformiert wird. Es ergibt sich eine, ausschließlich von der Koordinate \vec{r} abhängige, Differentialgleichung der folgenden Form:

$$\left(\frac{\vec{p}^2}{2\mu} + 2m_B + V(r) \right) \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}), \quad (4.4)$$

wobei $\mu = m_b/2$ der reduzierten Masse der beiden \bar{b} Quarks entspricht und für den in der Relativkoordinate \vec{r} definierten Impulsoperator $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ gilt. Die Eigenenergie E entspricht der Energie des Einkörperproblems.

Da das Potential $V(r)$ außerdem nur vom Abstand $r = |\vec{r}|$ der schweren \bar{b} Quarks abhängt, ist es zudem günstig Gleichung (4.4) in Kugelkoordinaten zu transformieren. Daraus resultiert die Radialgleichung

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + \frac{\hbar^2 L(L+1)}{2\mu r^2} + 2m_B + V(r) \right] \psi(r) = E \psi(r), \quad (4.5)$$

wobei L dem Bahndrehimpuls der beiden \bar{b} Quarks entspricht. Mit der Substitution der radialen Wellenfunktion

$$\psi(r) = \frac{R(r)}{r}, \quad (4.6)$$

kann die Gleichung weiter vereinfacht werden. Es ergibt sich die eindimensionale Differentialgleichung

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{L(L+1)}{r^2} \right) + V(r) \right] R(r) = E_B R(r), \quad (4.7)$$

wobei $E_B = E - 2m_B$ der Bindungsenergie des Tetraquarks entspricht.

Umwandlung in Differentialgleichung erster Ordnung

Um das RK4-Verfahren anwenden zu können, muss die oben bestimmte Schrödinger-Gleichung (4.7) außerdem in eine Differentialgleichung erster Ordnung der Form (4.1) umgewandelt werden. Durch die Substitution

$$\frac{d}{dr} R(r) = \phi(r) \quad (4.8)$$

lässt sich Gleichung (4.7) wie folgt schreiben:

$$\frac{d}{dr} \phi(r) = \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{L(L+1)}{r^2} + V(r) - E_B \right] R(r) \quad (4.9)$$

4.2. Anwendung in der Näherung ohne heavy-Spin Effekte

Die Schrödingergleichung lässt sich folglich durch zwei Differentialgleichungen erster Ordnung ausdrücken, welche mit den folgenden Definitionen

$$y(r) = (R(r), \phi(r), E_B) \quad \text{und} \quad (4.10a)$$

$$f(y(r), r) = \left(\phi(r), \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[\frac{\hbar^2 L(L+1)}{2\mu r^2} + V(r) - E_B \right] R(r), 0 \right), \quad (4.10b)$$

zu einer Gleichung $\frac{d}{dr}y(r) = f(y(r), r)$ zusammengefasst werden können.

Diese kann mit einem RK4-Verfahren numerisch gelöst werden. Es ist dabei darauf zu achten, dass sowohl die Masse μ als auch das Potential $V(r)$ (Gleichung (3.3)) in natürlichen Einheiten angegeben sind. Um Gleichung (4.10), welche im SI-Einheiten System definiert ist, zu lösen, müssen folglich die Einheiten in passender Weise umgewandelt werden. Für Details siehe Anhang A.1.

4.2.2. Bestimmung der Randbedingungen

Um die Schrödingergleichung (4.7) zu lösen, müssen außerdem die Randbedingungen der Wellenfunktion $R(r)$ bestimmt werden. Diese kann als die eindimensionale Wellenfunktion eines sich im effektiven Potential

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{\hbar^2 L(L+1)}{2\mu r^2} \quad (4.11)$$

bewegenden Teilchens interpretiert werden. Die Randbedingungen sowie das asymptotische Verhalten einer solchen Wellenfunktion sind bekannt. Die folgenden Ausführungen orientieren sich inhaltlich an [20].

Die Wellenfunktion $R(r)$ eines Teilchens im effektiven Potential (4.11) hat die folgenden Randbedingungen:

$$R(0) = 0, \quad (4.12)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} R(r) = 0, \quad (4.13)$$

wobei die Normierungsbedingung $1 = \int dr |R(r)|^2$ gilt.

Da es sich bei $V(r)$ um ein Zentralpotential handelt, erfüllt dieses außerdem die Bedingungen:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^2 V(r) = 0, \quad (4.14)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r V(r) = 0. \quad (4.15)$$

Daraus lässt sich das asymptotische Verhalten von $R(r)$ an den Grenzen des Definitionsbereichs $r \in \{0, \infty\}$ bestimmen.

Gegenüber $(V(r) - E_B)$ dominiert wegen (4.14) für $r \rightarrow 0$ der Zentrifugalterm des

4. Numerische Bestimmung der Bindungszustände

effektiven Potentials und die Schrödingergleichung (4.7) geht über in

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{L(L+1)}{r^2}\right)R(r) = 0, \quad (4.16)$$

welche die allgemeine Lösung $R(r) = Ar^{L+1} + Br^{-L}$ besitzt. Für $r \rightarrow 0$ erzeugt $1/r^L$ allerdings Singularitäten und widerspricht damit der Randbedingung $R(0) = 0$, weshalb $B = 0$ gesetzt werden kann. Es folgt die allgemeine Lösung der Wellenfunktion

$$R(r) \sim r^{L+1} \quad \text{für } r \rightarrow 0. \quad (4.17)$$

Für $r \rightarrow \infty$ ist wegen (4.15) das effektive Potential $V_{\text{eff}}(r)$ vollständig vernachlässigbar und Gleichung (4.7) geht über in

$$\left(\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + E_B\right)R(r) = 0. \quad (4.18)$$

Es existieren die beiden linear unabhängigen Lösungen $e^{\pm\kappa r}$ mit $\kappa = \sqrt{2\mu(-E_B)}/\hbar$.

Da gebundene Zustände nur für Energien $E_B < 0$ zu erwarten sind, gilt $(-E_B) = |E_B|$ und damit ist κ positiv-reell. Für die Lösung $e^{+\kappa r}$ folgt daraus, dass diese für $r \rightarrow \infty$ divergiert, was wiederum der Randbedingung im Unendlichen (4.13) widerspricht und dadurch die Normierungsbedingung von $R(r)$ verletzt. Es handelt sich deshalb bei $e^{+\kappa r}$ um eine irreguläre Lösung der Wellenfunktion $R(r)$. Für die Lösungsstruktur von $R(r)$ im Unendlichen gilt folglich:

$$R(r) \sim e^{-\kappa r} \quad \text{für } r \rightarrow \infty, \quad (4.19)$$

wobei $\kappa = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2\mu|E_B|}$ mit $E_B < 0$ gilt.

Anpassen der Randbedingungen

Die beiden Randbedingungen an den Grenzen des Intervalls $r \in [0, \infty]$ stellen numerisch ein Problem dar und müssen daher angepasst werden.

Da sich das Potentiale $V(r)$ proportional zu $1/r$ verhält, tritt an der Stelle $r = 0$ eine numerisch nicht realisierbare Singularität auf. Dieses Problem kann leicht umgangen werden, indem die Randbedingung (4.17) für die numerische Berechnung an der Stelle $r = \epsilon$ definiert wird, wobei man dabei ϵ auf einen infinitesimal kleinen Wert setzt.

Auch die Randbedingung im Unendlichen kann nicht umgesetzt werden, da $r = \infty$ numerisch nicht darstellbar ist. Man setzt daher auch diese Intervallgrenze auf einen diesmal ausreichend großen Wert r_{max} fest, für den die Randbedingung (4.19) gilt.

Die numerischen Berechnungen werden folglich auf dem Intervall $r \in [\epsilon, r_{\text{max}}]$ durchgeführt. Die genauen Werte beider Parameter müssen durch eine Stabilitätsuntersuchung bestimmt werden.

Die numerische Integration der Wellenfunktion $R(r)$ durch ein RK4-Verfahren kann

4.3. Anwendung in der Näherung mit heavy-Spin Effekten

dabei theoretisch im Ursprung oder im Unendlichen gestartet werden.

Wenn die RK4-Berechnungen im Ursprung bei $r = \epsilon$ gestartet wird, tritt bei der Durchführung des Shooting-Verfahrens allerdings ein weiteres Problem auf. In diesem Fall ist es extrem schwierig die Randbedingung an der anderen Intervallgrenze $r = r_{max}$ zu treffen. Man kann beobachten, dass für ausreichend groß gewählte r_{max} schon eine geringe Veränderung des Energiestartwertes \mathcal{E}_{Start} zu einer Explosion der Wellenfunktion $R(r)$ ins plus oder minus Unendliche führt. Die Randbedingung $R(r_{max}) = 0$ wird daher nie exakt erfüllt. Grund dafür ist, dass im klassisch verbotenen Bereich bei $r = r_{max}$ zwei mögliche Lösungen der Wellenfunktion auftreten können: Eine exponentiell abfallende Lösung $\sim e^{-\kappa r}$ und eine exponentiell ansteigende Lösung $\sim e^{+\kappa r}$. Im vorherigen Kapitel wurde die exponentiell ansteigende Lösung zwar ausgeschlossen, da sie zu einer nicht normalisierten Wellenfunktion führt. Bei einer numerischen Berechnung existiert diese Lösung aber trotzdem und bewirkt das extreme Ansteigen der Wellenfunktion $R(r)$ für $r \rightarrow r_{max}$.

Es ist daher sinnvoll die numerische Berechnung bei $r = r_{max}$ zu starten und das RK4-Verfahren rückwärts durchzuführen. Dazu setzt man die Schrittgröße τ auf einen negativen Wert. Das Problem lässt sich dadurch lösen, da die unphysikalische Lösung $\sim e^{+\kappa r}$ für kleiner werdende r gegen Null geht und damit ausstirbt. Die berechnete Wellenfunktion $R(r)$ wird sich daher automatisch der physikalisch korrekten Lösung $\sim e^{-\kappa r}$ annähern. Es ist folglich auch irrelevant auf welche Anfangsbedingungen die Wellenfunktion im Unendlichen gesetzt wird, da sich diese unabhängig davon der korrekten Lösung nähert.

Für die Berechnungen in dieser Arbeit wurden die folgenden Anfangsbedingungen gewählt:

$$R(r_{max}) = 1.0, \quad \frac{d}{dr}R(r_{max}) = 0.0 \quad (4.20)$$

4.3. Anwendung in der Näherung mit heavy-Spin Effekten

4.3.1. Analytische Vereinfachung der Schrödingergleichungen

Die in der Näherung mit heavy-Spin Effekten zu lösenden zweidimensionalen Schrödingergleichungen (3.12) und (3.14) können, wie das eindimensionale Problem in der Näherung ohne heavy-Spin Effekte, vereinfacht werden. Die Transformation in Schwerpunkt- und Realtivkoordinaten $\vec{r}_s = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)/2$ und $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ sowie das Aufstellen der Radialgleichung wird im Folgenden, analog zum in [20] und [21] beschriebenen Vorgehen, auf das vorliegende zweidimensionale Problem übertragen.

Bindungszustände für gerade Bahndrehimpulse L

In Abschnitt 3.3 wurde gezeigt, dass für gerade Bahndrehimpulse L die Schrödingergleichung (3.14) gelöst werden muss.

4. Numerische Bestimmung der Bindungszustände

Die Impulsoperatoren der beiden \bar{b} Quarks lassen sich wie folgt transformieren:

$$\frac{\vec{p}_1^2 + \vec{p}_2^2}{2m_b} = \frac{\vec{p}^2}{2\mu} + \frac{\vec{p}_s^2}{2M}, \quad (4.21)$$

wobei $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ und $\vec{p}_s = -i\hbar\vec{\nabla}_s$ die Impulsoperatoren in der Relativ- und Schwerpunktkoordinate sind. Für die reduzierte Masse gilt $\mu = m_b/2$ und $M = 2m_b$ ist die Gesamtmasse des Zweikörperproblems.

Eingesetzt in Gleichung (3.14) führt der obige Zusammenhang zu einer von \vec{r}_s und \vec{r} abhängigen Differentialgleichung:

$$\left(\begin{pmatrix} m_{B^*} + m_B & 0 \\ 0 & 2m_{B^*} \end{pmatrix} + \left(\frac{\vec{p}^2}{2\mu} + \frac{\vec{p}_s^2}{2M} \right) \mathbb{1}_{2 \times 2} + \tilde{H}_{\text{int}, S=1} \right) \tilde{\Psi}_{S=1, s_z}(\vec{r}, \vec{r}_s) = \tilde{E} \tilde{\Psi}_{S=1, s_z}(\vec{r}, \vec{r}_s) \quad (4.22)$$

Da die Differentialoperatoren $\vec{\nabla}$ und $\vec{\nabla}_s$ jeweils getrennt auf die Koordinaten \vec{r} und \vec{r}_s wirken, wird für die Wellenfunktion der Separationsansatz $\tilde{\Psi}(\vec{r}, \vec{r}_s) = \psi(\vec{r}) \cdot \phi(\vec{r}_s)$ gewählt.

Eingesetzt in die obige Differentialgleichung, lässt sich diese in zwei jeweils nur von \vec{r} oder \vec{r}_s abhängige Teile aufteilen. Beide müssen für sich konstant sein, wobei für den von der Schwerpunktkoordinate abhängigen Teil

$$\left(\frac{\vec{p}_s^2}{2M} \right) \mathbb{1}_{2 \times 2} \phi_{S=1, s_z}(\vec{r}_s) = \lambda \phi_{S=1, s_z}(\vec{r}_s) \quad (4.23)$$

gilt. Damit lässt sich die Schrödingergleichung bezüglich der Relativkoordinate entkoppeln und es ergibt sich die folgende Differentialgleichung:

$$\left(\begin{pmatrix} m_{B^*} + m_B & 0 \\ 0 & 2m_{B^*} \end{pmatrix} + \frac{\vec{p}^2}{2\mu} \mathbb{1}_{2 \times 2} + \tilde{H}_{\text{int}, S=1} \right) \psi_{S=1, s_z}(\vec{r}) = E \psi_{S=1, s_z}(\vec{r}). \quad (4.24)$$

Die Eigenenergie entspricht dabei $E = \tilde{E} - \lambda$.

Die obige, ausschließlich von der Relativkoordinate \vec{r} abhängige Differentialgleichung lässt sich schließlich, analog zur Näherung ohne heavy-Spin Effekte, in die Radialgleichung umwandeln²:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta m_B \end{pmatrix} - \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{L(L+1)}{r^2} \right) \mathbb{1}_{2 \times 2} + \tilde{H}_{\text{int}, S=1} \right) \chi_{S=1, s_z}(r) = E_B \chi_{S=1, s_z}(r) \quad (4.25a)$$

² In [9] (Quelle: arXiv.org) liegt hier ein Tippfehler vor. In der Radialgleichung fehlt der Faktor 1/2 in H_{int} .

4.3. Anwendung in der Näherung mit heavy-Spin Effekten

mit $\Delta m_B = m_{B^*} - m_B$ und

$$\tilde{H}_{\text{int},S=1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} V_j(r) + V_5(r) & V_j(r) - V_5(r) \\ V_j(r) - V_5(r) & V_j(r) + V_5(r) \end{pmatrix}, \quad (4.25b)$$

wobei $E_B = E - (m_{B^*} + m_B)$ der kleinstmöglichen Bindungsenergie des Tetraquarks entspricht. Der radiale Anteil der Wellenfunktion $\psi_{S=1,s_z}(\vec{r})$ wurde dabei gemäß:

$$\chi(r) = \begin{pmatrix} \chi_1(r) \\ \chi_2(r) \end{pmatrix} = \psi(r)r. \quad (4.26)$$

substituiert.

Bindungszustände für ungerade Bahndrehimpulse L

Für ungerade Bahndrehimpulse L muss die 2×2 Schrödingergleichung (3.12) gelöst werden. Diese kann, analog zu dem im vorherigen Abschnitt betrachteten Fall gerader Bahndrehimpulse L , durch eine Transformation in die Relativkoordinate \vec{r} , auf die folgende Radialgleichung reduziert werden:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\Delta m_B \end{pmatrix} - \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{L(L+1)}{r^2} \right) \mathbb{1}_{2 \times 2} + \tilde{H}_{\text{int},S=0} \right) \chi_{S=0}(r) = E_B \chi_{S=0}(r) \quad (4.27a)$$

mit

$$\tilde{H}_{\text{int},S=0} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} V_5(r) + 3V_j(r) & \sqrt{3}(V_5(r) - V_j(r)) \\ \sqrt{3}(V_5(r) - V_j(r)) & 3V_5(r) + V_j(r) \end{pmatrix}, \quad (4.27b)$$

wobei $E_B = E - 2m_B$ gilt. Die Wellenfunktion $\chi_{S=0}(r)$ wird analog zu (4.26) definiert.

Umwandlung in Differentialgleichung erster Ordnung

Die Gleichungen (4.25) und (4.27), für gerade und ungerade Bahndrehimpulse L , können, analog zum eindimensionalen Fall in der Näherung ohne heavy-Spin Effekte, in eine Differentialgleichung erster Ordnung der Form (4.1) umgewandelt werden.

Da die zweidimensionalen Schrödingergleichungen jeweils zwei gekoppelten Differentialgleichungen zweiter Ordnung der beiden Komponenten $\chi_1(r)$ und $\chi_2(r)$ der Wellenfunktion entsprechen, resultieren bei der Umwandlung in Gleichungen erster Ordnung vier Gleichungen. Um diese zu einer Differentialgleichung zusammenzufassen, werden die Funktionen $y(r)$ und $f(y(r), r)$ wie folgt definiert:

$$y(r) = (\chi_1(r), \phi_1(r), \chi_2(r), \phi_2(r), E_B) \quad \text{und} \quad (4.28a)$$

$$f(y(r), r) = (\phi_1(r), f_1(y(r), r), \phi_2(r), f_2(y(r), r), 0). \quad (4.28b)$$

Für das Lösen der Schrödingergleichung (4.25) für gerade L entsprechen die Funktionen

4. Numerische Bestimmung der Bindungszustände

$f_1(y(r), r)$ und $f_2(y(r), r)$ den Ausdrücken

$$f_1(y(r), r) = \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(\frac{\hbar^2 L(L+1)}{2\mu r^2} + W_1(r) - E_B \right) \chi_1(r) + W_2(r) \chi_2(r) \quad \text{und} \quad (4.29a)$$

$$f_2(y(r), r) = \hat{W}_2(r) \chi_1(r) + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(\frac{\hbar^2 L(L+1)}{2\mu r^2} + W_1(r) + \Delta m_B - E_B \right) \chi_2(r), \quad (4.29b)$$

wobei

$$W_1(r) = \frac{1}{2}(V_j(r) + V_5(r)), \quad (4.30)$$

$$W_2(r) = \frac{1}{2}(V_j(r) - V_5(r)) \quad (4.31)$$

gilt.

Im Falle der Schrödinger Gleichung (4.27) für ungerade L gilt

$$f_1(y(r), r) = \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(\frac{\hbar^2 L(L+1)}{2\mu r^2} + Z_1(r) - E_B \right) \chi_1(r) + Z_2(r) \chi_2(r) \quad \text{und} \quad (4.32a)$$

$$f_2(y(r), r) = Z_2(r) \chi_1(r) + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(\frac{\hbar^2 L(L+1)}{2\mu r^2} + Z_1^*(r) + 2\Delta m_B - E_B \right) \chi_2(r) \quad (4.32b)$$

mit

$$Z_1(r) = \frac{1}{4}(V_5(r) + 3V_j(r)), \quad (4.33)$$

$$Z_1^*(r) = \frac{1}{4}(3V_5(r) + V_j(r)), \quad (4.34)$$

$$Z_2(r) = \frac{\sqrt{3}}{4}(V_5(r) - V_j(r)). \quad (4.35)$$

Auch hier müssen bei der Anwendung des RK4-Verfahrens die Einheiten der Massen und Potentiale V_5 und V_j angepasst werden (für Details siehe Anhang A.1).

4.3.2. Bestimmung der Randbedingungen

Die Randbedingungen der gekoppelten 2×2 Schrödinger Gleichungen (4.25) (für gerade L) und (4.27) (für ungerade L) ergeben sich aus Überlegungen der Quantenmechanik analog zum vorher behandelten Fall ohne Berücksichtigung von heavy-Spin Effekten. Auch die zweidimensionalen Schrödinger Gleichungen beschreiben ein Zweikörperproblem in einem effektiven Potential ähnlich zu (4.11), wobei $V(r)$ in diesem Fall einer Kombination aus V_5 und V_j entspricht.

Die Bedingungen (4.12) und (4.13), die an die Wellenfunktion $R(r)$ gestellt wurden, können daher ohne weiteres auf die zweidimensionale Wellenfunktion $\chi(r)$ übertragen

4.3. Anwendung in der Näherung mit heavy-Spin Effekten

werden. Es gelten die folgenden Randbedingungen für $r = 0$ und $r = \infty$:

$$\chi(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \chi(\infty) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

Auch für die Einträge von $\tilde{H}_{\text{int},S=1}$ und $\tilde{H}_{\text{int},S=0}$ sind die Annahmen (4.14) und (4.15) eines Zentralpotentials gültig. Daraus folgt, dass für $r \rightarrow 0$ der Zentrifugalterm gegenüber den Potentialen und der Massendifferenz Δm_B dominiert. Die gekoppelte Schrödingergleichung geht damit über in zwei voneinander unabhängige Differentialgleichung der beiden Komponenten $\chi_1(r)$ und $\chi_2(r)$, deren Form der des eindimensionalen Problems (4.16) entspricht. Übertragen auf das zweidimensionale Problem ergibt sich daraus die allgemeine Lösung

$$\chi(r) \sim \begin{pmatrix} Ar^{L+1} \\ Br^{L+1} \end{pmatrix} \quad \text{für } r \rightarrow 0. \quad (4.37)$$

Für $r \rightarrow \infty$ verschwinden die Potentiale sowie der Zentrifugalterm. Es resultieren zwei entkoppelte Gleichungen der Form (4.18) für die beiden Komponenten $\chi_1(r)$ und $\chi_2(r)$. Für die Wellenfunktion ergibt sich daraus

$$\chi(r) \sim \begin{pmatrix} Ce^{-\kappa r} \\ De^{-\kappa r} \end{pmatrix} \quad \text{für } r \rightarrow \infty, \quad (4.38)$$

wobei $\kappa = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2\mu|E_B|}$ mit $E_B < 0$ gilt.

Anpassen der Randbedingungen

Analog zum eindimensionalen Fall müssen für die Anwendung des Shooting-Verfahrens die numerisch nicht fassbaren Grenzen des Intervalls $r \in [0, \infty]$ durch $r = \epsilon$ und $r = r_{max}$ ersetzt werden.

Da es sich bei der Lösungsfunktion $\chi(r)$ um eine zweidimensionale Wellenfunktion handelt, tritt allerdings noch ein weiteres Problem auf. Die Lösung von $\chi(r)$ hängt nicht nur von der Bindungsenergie E_B ab, sondern wird zusätzlich durch die Wahl des Parameters A/B beeinflusst. Um zu überprüfen, ob die sich durch numerische Integration ergebende Lösungsfunktion $\chi(r, \mathcal{E}, A/B)$ die Randbedingung (4.38) bei $r = r_{max}$ erfüllt, muss folglich die Nullstelle der Funktion

$$F(\mathcal{E}, A/B) := \chi(r_{max}, \mathcal{E}, A/B) - \chi(r_{max}) \quad (4.39)$$

gefunden werden.³ Das würde die Verwendung eines zweidimensionalen *root-finding* Algorithmus erfordern, der allerdings schwieriger umzusetzen ist als der eindimensionale Fall [9].

In [9] wurde jedoch gezeigt, dass es möglich ist die Nullstellensuche für $\chi(r)$ auf ein

³ Die Funktion $F(\mathcal{E}, A/B)$ wurde analog zu Gleichung (4.3) definiert.

4. Numerische Bestimmung der Bindungszustände

eindimensionales Problem zu reduzieren. Dazu werden Lösungen der Schrödingergleichungen $\chi^{(A)}(r)$ und $\chi^{(B)}(r)$ eingeführt, welche in der Nähe des Ursprungs das folgende asymptotische Verhalten aufweisen:

$$\chi^{(A)}(r) \sim \begin{pmatrix} r^{L+1} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad r \rightarrow 0 \quad (4.40a)$$

$$\chi^{(B)}(r) \sim \begin{pmatrix} 0 \\ r^{L+1} \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad r \rightarrow 0 \quad (4.40b)$$

Offensichtlich erfüllen beide Funktionen die nach Gleichung (4.37) geforderten Randbedingungen $\chi^{(A)}(0) = 0$ und $\chi^{(B)}(0) = 0$ im Ursprung.

Die Randbedingungen (4.38) bei $r = r_{max}$ werden dagegen nicht erfüllt. Dieses Problem lässt sich beheben, indem die beiden Lösungen zu einer allgemeineren Lösung $\chi(r) = A\chi^{(A)}(r) + B\chi^{(B)}(r)$ kombiniert werden. Das ist möglich, da es sich bei der Schrödingergleichung um eine lineare Differentialgleichung handelt. Diese allgemeine Wellenfunktion erfüllt zum einen die Randbedingung (4.37) im Ursprung und kann außerdem die Randbedingung (4.38) bei $r = r_{max}$ erfüllen, wenn gilt:

$$\chi(r_{max}) = A\chi^{(A)}(r_{max}) + B\chi^{(B)}(r_{max}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.41)$$

Es lässt sich zeigen, dass diese Bedingung erfüllt ist, sofern für die Lösungen $\chi^{(A)}(r)$ und $\chi^{(B)}(r)$ der folgende Zusammenhang gilt:

$$F(\mathcal{E}) := \det \begin{pmatrix} \chi_1^{(A)}(r_{max}) & \chi_1^{(B)}(r_{max}) \\ \chi_2^{(A)}(r_{max}) & \chi_2^{(B)}(r_{max}) \end{pmatrix} = 0. \quad (4.42)$$

Ob die Wellenfunktion $\chi(r)$ die Randbedingung bei $r = r_{max}$ erfüllt, wird folglich durch eine Nullstelle der Funktion $F(\mathcal{E})$ charakterisiert. Da die beiden Lösungen $\chi^{(A)}(r)$ und $\chi^{(B)}(r)$ nur von der gewählten Energie \mathcal{E} nicht aber von den Parametern A und B abhängen, reduziert sich das zweidimensionale Problem (4.39) zu einer Nullstellensuche in nur einer Variablen.

Es kann daher ein eindimensionales Newton-Raphson Verfahren angewendet werden. Anstelle der Wellenfunktion $\chi(r)$ müssen dabei die beiden Lösungen $\chi^{(A)}(r)$ und $\chi^{(B)}(r)$ nacheinander mit einem RK4-Algorithmus numerisch integriert werden, wobei deren Anfangsbedingungen bei $r = \epsilon$ gemäß Gleichung (4.40) gewählt werden.

Berechnung der Wellenfunktion

Um die Wellenfunktion $\chi(r)$ zu berechnen, muss anschließend noch der Parameter A/B bestimmt werden. Aus der allgemeinen Definition von $\chi(r)$ ergeben sich die folgenden

4.3. Anwendung in der Näherung mit heavy-Spin Effekten

Zusammenhänge für die Komponenten $\chi_1(r)$ und $\chi_2(r)$:

$$\chi_i(r) = (A/B) \chi_i^{(A)}(r) + \chi_i^{(B)}(r) \quad \text{mit } i \in \{1, 2\}. \quad (4.43)$$

Für beide Komponenten muss die Bedingung (4.41), d. h. $\chi_i(r_{max}) = 0$, erfüllt sein. Daraus lässt sich die folgende Bedingung für A/B ableiten:

$$F(A/B) := (A/B) \chi_i^{(A)}(r_{max}) + \chi_i^{(B)}(r_{max}) \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.44)$$

Die beiden Komponenten der Wellenfunktion werden dabei getrennt voneinander betrachtet, weshalb sich zwei unterschiedliche Parameter A/B ergeben. Um die Nullstelle von $F(A/B)$ zu finden, werden folglich zwei voneinander unabhängige Newton-Raphson Verfahren mit den jeweiligen Startparametern $(A/B)_i = -\chi_i^{(B)}(r_{max})/\chi_i^{(A)}(r_{max})$ durchgeführt.

Nur wenn die Bindungsenergie E_B im vorherigen Schritt ausreichend genau bestimmt wurde, stimmen die beiden resultierenden Parameter $(A/B)_i$ der Komponenten miteinander überein. Die Wellenfunktionen $\chi_1(r)$ und $\chi_2(r)$ können schließlich über den Zusammenhang (4.43) berechnet werden.

5. Ergebnisse

5.1. Bindungsenergie im Grundzustand

Bindungszustände eines $ud\bar{b}\bar{b}$ Tetraquarks im Grundzustand ($L = 0$) konnten für die beiden Näherungen ohne und mit der Berücksichtigung von heavy-Spin Effekten bereits in [8] und [9] gefunden werden. Im Folgenden sollen die Ergebnisse dieser Forschungsarbeiten reproduziert werden. Um zu überprüfen, ob ein Bindungszustand mit $E_B < 0$ vorliegt, werden die entsprechenden Schrödingergleichungen numerisch mit Hilfe des in Kapitel 4 beschriebenen Runge-Kutta Shooting Verfahrens vierter Ordnung gelöst.

5.1.1. Näherung ohne heavy-Spin Effekte

Für die Berechnung der Bindungsenergie eines $ud\bar{b}\bar{b}$ Tetraquarks in der Näherung degenerierter B -Mesonen ohne die Berücksichtigung von heavy-Spin Effekten gilt es die Schrödingergleichung (4.7) in der für die numerische Berechnungen vorbereiteten Form (4.10) zu lösen.

Das Tetraquark soll in den beiden attraktiven Kanälen des Potentials betrachtet werden. Befindet sich das Teilchen im vektoriellen Isotriplett Zustand ($j_q = 1, I = 1$), dann gilt $V(r) = V_j(r)$ mit den Parametern α_j und d_j aus Tabelle 3.1. Aufgrund der zu schwachen attraktiven Wirkung des Potentials $V_j(r)$ kann in diesem Kanal kein Tetraquark Bindungszustand mit negativer Bindungsenergie gefunden werden.

Im skalaren Isosingulett Kanal ($j_q = 0, I = 0$) entspricht das Potential $V(r)$ dem attraktiveren Potential $V_5(r)$ (für α_5 und d_5 siehe Tabelle 3.1). Die anziehenden Kräfte zwischen den \bar{b} Quarks reichen in diesem Fall aus, um einen Bindungszustand zu bilden. Für das Shooting-Verfahren wurde die numerische Integration mittels Runge-Kutta Verfahren bei einer Schrittgröße $\tau = 1.0 \cdot 10^{-3}$ fm auf dem Intervall $r \in [1.0 \cdot 10^{-13}, 10]$ fm durchgeführt. Das Newton-Raphson Verfahren wurde mit einer Startenergie $\mathcal{E}_{Start} = -71.8$ MeV angewendet und eine Genauigkeit von $prec = 1.0 \cdot 10^{-10}$ MeV gewählt.

Für ein $ud\bar{b}\bar{b}$ Tetraquark im skalaren Isosingulett Kanal mit den Quantenzahlen $I(J^P) = 0(1^+)$ ergibt sich daraus die folgende Bindungsenergie $E_B = E - 2m_B$:

$$E_B = -71.75 \text{ MeV} \tag{5.1}$$

Es ist anzumerken, dass bei der numerischen Berechnung der Bindungsenergie keine vollständige Fehleranalyse durchgeführt wurde. Das hier ermittelte Ergebnis weicht daher stark von dem in [8] bestimmten Energiewert $E_B = -93_{-43}^{+47}$ MeV ab. Innerhalb der Fehlergrenzen stimmen die Ergebnisse jedoch miteinander überein.

5.1. Bindungsenergie im Grundzustand

Für diese Arbeit wurden anstelle des systematischen und statistischen Fehlers von E_B lediglich die angegebenen Fehler der Potentialparameter α_5 und d_5 berücksichtigt. Die Anwendung des Shooting-Verfahrens mit diesen beiden zusätzlichen Parametersets führt zu den folgenden Bindungsenergien: $E_B = -28.8$ MeV (für $\alpha_5 = 0.31$, $d_5 = 0.35$ fm) und $E_B = -117.02$ MeV (für $\alpha_5 = 0.37$, $d_5 = 0.57$ fm).

Die resultierende Wellenfunktion $R(r)$ sowie die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(r) = |R(r)|^2$, welche angibt mit welcher Wahrscheinlichkeit sich die beiden im Tetraquark gebundenen \bar{b} Quarks in einem Abstand r voneinander befinden, sind in normierter Form in Abbildung 5.1 zu sehen. Der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung ist zu entnehmen, dass sich die beiden Antiquarks in einem durchschnittlichen Abstand von etwa 0.25 fm zueinander befinden.

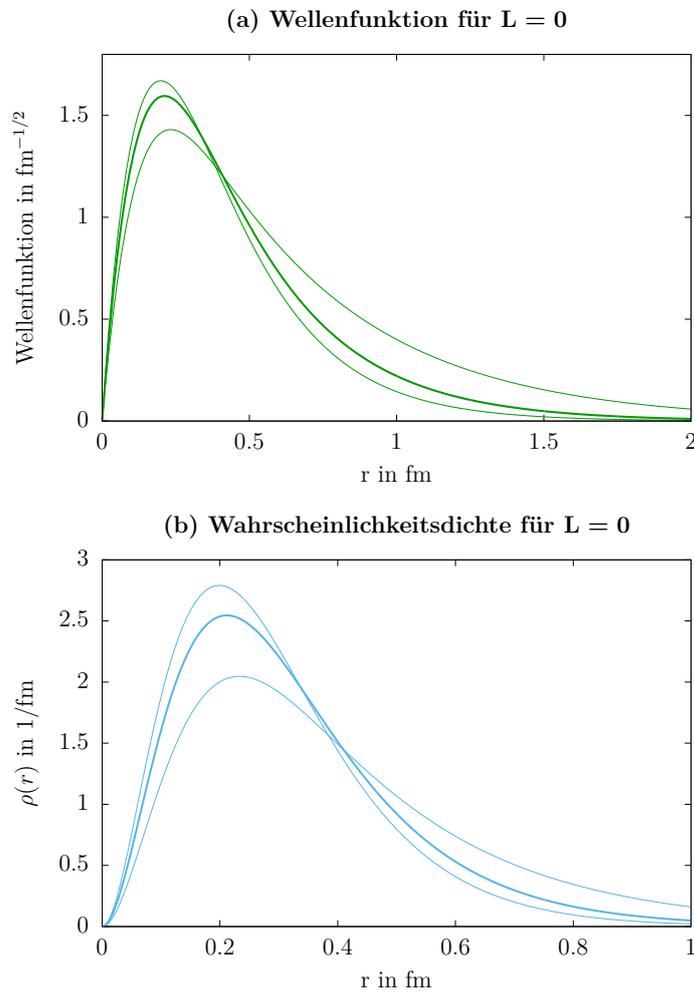


Abbildung 5.1.: Ergebnisse für den skalaren Isosingulett Kanal mit $L = 0$ ohne Berücksichtigung von heavy-Spin Effekten. (a) Normierte Wellenfunktion $R(r)$ und (b) Wahrscheinlichkeit $\rho(r)$ die \bar{b} Quarks in einem Abstand r vorzufinden. Die schwächer gezeichneten Kurven entsprechen den sich unter Berücksichtigung der Fehler von α_5 und d_5 ergebenden Ergebnissen.

5.1.2. Näherung mit heavy-Spin Effekten

Die Berücksichtigung von heavy-Spin Effekten führt zu der für ungerade Bahndrehimpulse L definierten zweidimensionalen Schrödingergleichung (4.25). Für die Bestimmung der Bindungsenergie des Tetraquarks im $L = 0$ Kanal müssen folglich die für die numerischen Berechnungen vorbereiteten Gleichungen (4.29) gelöst werden.

Bei der Untersuchung des Tetraquarks in der Näherung ohne heavy-Spin Effekte konnte gezeigt werden, dass die anziehenden Kräfte des Potentials $V_j(r)$ im vektoriellen Isotriplett Kanal mit $I = 1$ zu schwach sind, um einen Tetraquark-Zustand zu bilden. Da die Spin Effekte der schweren Antiquarks die Bindungsenergie des Tetraquark zusätzlich abschwächen, kann ein Bindungszustand in diesem Kanal auch in der Näherung mit heavy-Spin Effekten ausgeschlossen werden.

Das Tetraquark wird daher ausschließlich im $I = 0$ Kanal betrachtet. Die Potentiale im Hamiltonien H_{int} der Schrödingergleichung entsprechen in diesem Fall dem attraktiven $I = 0$ Potential V_5 (für α_5 und d_5 siehe Tabelle 3.1) und dem repulsiven $I = 0$ Potential V_j mit den Parametern (3.7). Für das Shooting-Verfahren wurden die folgenden Parameter verwendet: $\tau = 1.0 \cdot 10^{-3}$ fm, $r \in [1.0 \cdot 10^{-14}, 6]$ fm und $prec = 1.0 \cdot 10^{-10}$ MeV, wobei das Newton-Raphson Verfahren bei $\mathcal{E}_{\text{Start}} = -51.8$ MeV gestartet wurde.

Für ein $ud\bar{b}\bar{b}$ Tetraquark mit den Quantenzahlen $I(J^P) = 0(1^+)$ ergibt sich daraus die folgende Bindungsenergie $E_B = E - (m_{B^*} + m_B)$:

$$E_B = -51.76 \text{ MeV} \quad (5.2)$$

Im Vergleich zu dem vorher betrachteten Fall ohne die Berücksichtigung von heavy-Spin Effekten (Gleichung (5.1)), ergibt sich hier eine um ca. 20 MeV geringere Bindungsenergie. Es kann damit bestätigt werden, dass Spin-Effekte der schweren Antiquarks die Bindung des Tetraquarks merklich abschwächen. Das Ergebnis (5.2) weicht auch in diesem Fall von der in [9] bestimmten Energie $E_B = -59_{-38}^{+30}$ MeV ab, da keine vollständige Fehleranalyse durchgeführt wurde.¹

Es wurden daher analog zum vorherigen Abschnitt lediglich die angegebenen Fehler der Potentialparameter α_i und d_i ($i \in \{5, j\}$) berücksichtigt. Für das repulsive $I = 0$ Potential $V_j(r)$ konnten beim Fitten der Gitter QCD Ergebnisse außerdem keine exakten Fehler bestimmt werden. Es gilt daher zu überprüfen, inwiefern die Ungenauigkeit der Parameter α_j und d_j das Ergebnis verändern und wie groß im Allgemeinen der Einfluss des Potentials $V_j(r)$ auf die Bindung des Tetraquarks ist.

Die Berücksichtigung der angegebenen Fehler führt zu den Energien $E_B = -52.16$ MeV (für $\alpha_j = -0.03$, $d_j = 0.11$ fm) und $E_B = -54.19$ MeV (für $\alpha_j = -0.17$, $d_j = 0.45$ fm). Diese Energiewerte weichen nur um wenige MeV von der ursprünglich ermittelten Bindungsenergie (5.2) des Tetraquarks ab. Auch für ein verschwindendes Potential $V_j(r) \approx 0$ verändert sich das Ergebnis kaum. Die repulsive Wirkung des durch die Berücksichtigung von heavy-Spin Effekten auftretenden Potentials V_j ist für den Bindungszustand des Tetraquarks folglich sehr gering.

¹ Die Bindungsenergie E_B des Tetraquarks wird in [9] definiert als $E_B = m_{B^*} + m_B - E$, d.h. $E_B > 0$ gesetzt.

5.1. Bindungsenergie im Grundzustand

Die Bindung des Tetraquarks wird vor allem durch das attraktive $I = 0$ Potential $V_5(r)$ beeinflusst. Das zeigt sich in der Berücksichtigung der Fehler von α_5 und d_5 , welche zu (5.2) stark abweichenden Energien $E_B = -11.79$ MeV (für $\alpha_5 = 0.31$, $d_5 = 0.35$ Mfm) und $E_B = -96.11$ MeV (für $\alpha_5 = 0.37$, $d_5 = 0.57$ fm) führen. Insgesamt bewirkt eine Veränderung der Stärke des Potentials V_5 eine Abweichung der Bindungsenergie um 40 – 45 MeV.

Die sich für den gefundenen Bindungszustand ergebenden Komponenten $\chi_1(r)$ und $\chi_2(r)$ der Wellenfunktion $\chi_{S=1}(r)$ (Glg. (3.15)) sowie die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(r) = |\chi_1(r)|^2 + |\chi_2(r)|^2$ sind in Abbildung 5.2 zu sehen.

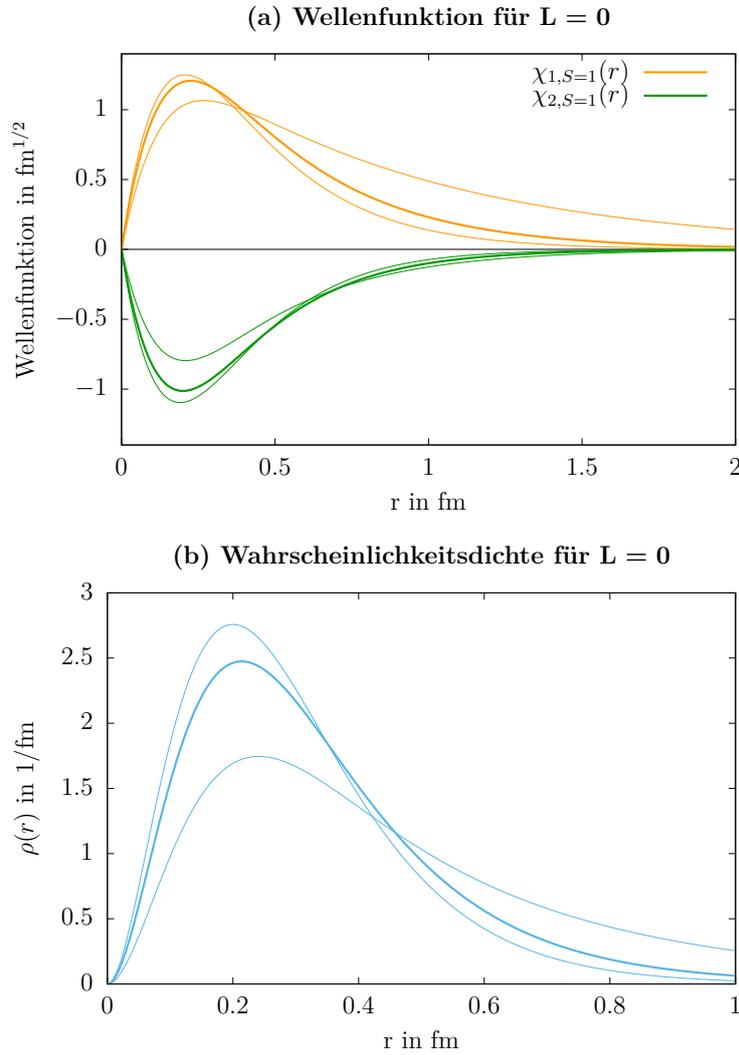


Abbildung 5.2.: Ergebnisse des $I = 0$ Kanals mit $L = 0$ in der Näherung mit heavy-Spin Effekten. (a) Komponenten der normierten Wellenfunktion $\chi_{S=1}(r)$ und (b) Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(r)$. Die schwächer gezeichneten Kurven entsprechen den sich unter Berücksichtigung der Fehler von α_5 und d_5 ergebenden Ergebnissen.

5. Ergebnisse

Das Tetraquark weist dabei zwei mögliche Meson-Meson Strukturen auf. Die erste Komponente $\chi_1(r)$ der Wellenfunktion entspricht einem BB^* -Paar. Die zweite Komponente $\chi_2(r)$ entspricht einem B^*B^* -Paar. Die in dieser Arbeit ermittelten Wellenfunktionen entsprechen den Ergebnissen in [9], wonach sich das Tetraquark für größer werdende Abstände r der \bar{b} Quarks bevorzugterweise im Zustand eines BB^* -Paares befindet. Dies ist den unterschiedlichen Größenordnungen beider Komponenten der Wellenfunktion (siehe Abbildung 5.2a) zu entnehmen. Für geringere Abstände r besteht dagegen kein großer Unterschied zwischen $\chi_1(r)$ und $\chi_2(r)$.

Die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung (Abbildung 5.2b) unterscheidet sich nur wenig von der in der Näherung ohne heavy-Spin Effekte ermittelten Funktion. Auch unter der Berücksichtigung der zuvor vernachlässigten Spin-Effekte ergibt sich ein durchschnittlicher Abstand der \bar{b} Quarks von etwa 0.25 fm.

5.2. Bindungsenergie angeregter Zustände

Neben dem Grundzustand soll das $ud\bar{b}\bar{b}$ Tetraquark auch in den angeregten Zuständen mit Bahndrehimpuls $L \in \{1, 2, 3\}$ untersucht werden. Für die Näherung ohne heavy-Spin Effekten muss analog zum Grundzustand die Gleichung (4.7) gelöst werden. Unter Berücksichtigung von heavy-Spin Effekten muss für die ungeraden Bahndrehimpulse $L \in \{1, 3\}$ Gleichung (4.27) und für den geraden Bahndrehimpulse $L = 2$ Gleichung (4.25) gelöst werden.

Eine erneute Anwendung des Shooting-Verfahrens für das Tetraquark im skalaren Isosingulett Kanal führt zu dem Ergebnis, dass in den angeregten Zuständen kein Bindungszustand mit $E_B < 0$ existiert, weder in der Näherung ohne heavy-Spin Effekte noch unter Berücksichtigung der selbigen.

Um die angeregten Zustände des Tetraquarks genauer zu untersuchen, kann jedoch die Masse m_b der \bar{b} Quarks in den Schrödingergleichungen erhöht werden. Schwerere \bar{b} Quarkmassen verstärken die Bindung des Tetraquarks, bis dieses doch in der Form eines Bindungszustandes auftreten kann. Ein erneutes Lösen der Schrödingergleichungen führt daher zwangsläufig dazu, dass Bindungsenergien $E_B < 0$ gefunden werden können.

Die physikalische Masse der \bar{b} Quarks wurde dabei um einen Faktor λ gemäß

$$m'_b = \lambda \cdot m_{b,phys} \quad (5.3)$$

erhöht. Da auch B - und B^* -Mesonen jeweils ein \bar{b} Quark enthalten, müssen deren Massen ebenfalls angepasst werden. Dazu können Ergebnisse aus der Heavy-Quark-Effective-Theory (HQET) angewendet werden, wonach der folgende Zusammenhang gilt: $\Delta m_B = m_{B^*} - m_B \sim 1/m_b$ [23]. Für die angepasste Massendifferenz gilt daher:

$$\Delta m'_B = \frac{1}{\lambda} \cdot \Delta m_B. \quad (5.4)$$

Die erneute Anwendung des Shooting-Verfahrens führt zu den in Tabelle 5.1 aufgelisteten

5.2. Bindungsenergie angeregter Zustände

	L = 1	L = 2	L = 3
Ohne heavy-Spin	2.28	5.31	9.55
Mit heavy-Spin	2.83	5.53	10.13

Tabelle 5.1.: Faktoren λ , ab denen eine kleine, aber negative, Bindungsenergie E_B für die angeregten Zustände $L \in \{1, 2, 3\}$ gefunden werden kann. Es sind die Ergebnisse für die Näherungen mit und ohne Berücksichtigung von heavy-Spin Effekten zusammengefasst.

Faktoren λ , um welche die Masse der \bar{b} Quarks erhöht werden muss, damit eine kleine, aber negative, Bindungsenergie E_B gefunden werden kann. Ein Faktor $\lambda = 1$ entspricht dabei der physikalischen Masse des \bar{b} Quarks. Je größer der Faktor λ , desto unwahrscheinlicher ist die tatsächliche Existenz eines Bindungszustandes. Damit angeregte Bindungszustände auftreten können, müsste die Masse der \bar{b} Quarks etwa dem drei- bis elffachen seiner derzeit angenommenen Masse entsprechen. Es ist daher unwahrscheinlich, dass tatsächlich angeregte Bindungszustände existieren.

Tabelle 5.1 ist außerdem zu entnehmen, dass sich bei der Einbeziehung von Spin Effekten der schweren Antiquarks größere Werte λ ergeben als in der Näherung ohne heavy-Spin Effekte. Dies bestätigt das bereits für ein Tetraquark im Grundzustand gefundene Ergebnis, demzufolge die Berücksichtigung von heavy-Spin Effekten die Bindungsenergie eines Tetraquark Zustandes senkt. Durch zuvor vernachlässigte heavy-Spin Effekte kommt es zu einer Abschwächung des Potentials zwischen den Valenzquarks. Bei der Erhöhung der Quarkmassen um den Faktor λ muss folglich der Verlust in der Bindung des Tetraquarks durch eine schwerere Masse m'_b ausgeglichen werden.

Massenabhängigkeit der Bindungsenergie

Um ein besseres Verständnis der angeregten Zustände eines $ud\bar{b}\bar{b}$ Tetraquarks zu bekommen, können die Quarkmassen über die in Tabelle 5.1 aufgelisteten Mindestwerte hinaus weiter erhöht werden, bis eindeutig negative Bindungsenergien auftreten.

In Abbildung 5.3 sind die Ergebnisse für die angeregten Zuständen $L \in \{1, 2, 3\}$ in den beiden Näherungen mit und ohne heavy-Spin Effekte abgebildet. Die Graphen zeigen eine lineare Zunahme der Bindungsenergie E_B in Abhängigkeit der Massenerhöhung der \bar{b} Quarks um den Faktor λ . Zwischen den Ergebnissen beider Näherungen ist aufgrund der Verringerung der Bindungsenergie durch heavy-Spin Effekte ein deutlicher Abstand zu erkennen.

Dabei fällt zunächst auf, dass der Abstand der Geraden im $L = 2$ Kanal viel schmaler ausfällt, als die in den Kanälen mit $L = 1$ und $L = 3$ auftretenden Unterschiede. Für ein Tetraquark mit geradem Bahndrehimpuls, wobei in diesem Fall $S = 1$ gilt, scheinen folglich Spin Effekte der \bar{b} Quarks einen insgesamt geringeren Einfluss auf die Bindungsenergie zu haben, als das für ein Tetraquark mit ungeradem L und Gesamtspin $S = 0$ der Fall ist.

Der Abstand zwischen den Geraden aller abgebildeten Kanäle nimmt außerdem mit zunehmenden Faktoren λ ab. Die sich unter Berücksichtigung von heavy-Spin Effekten

5. Ergebnisse

ergebenden Bindungsenergien nähern sich folglich den Ergebnissen der Näherung ohne heavy-Spin Effekte an. Für schwerer werdende Quarkmassen m_b spielen Spin Effekte der \bar{b} Quarks also eine immer geringer werdende Rolle. Dies ist nicht verwunderlich, da eine Erhöhung der Quarkmassen im Grunde dazu führt, dass die \bar{b} Quarks wieder den Charakter statischer Teilchen erlangen. Da die Annahme statischer \bar{b} Quarks den Annahmen der Näherung ohne heavy-Spin Effekte entspricht, nähern sich die beiden Geraden geringfügig an.

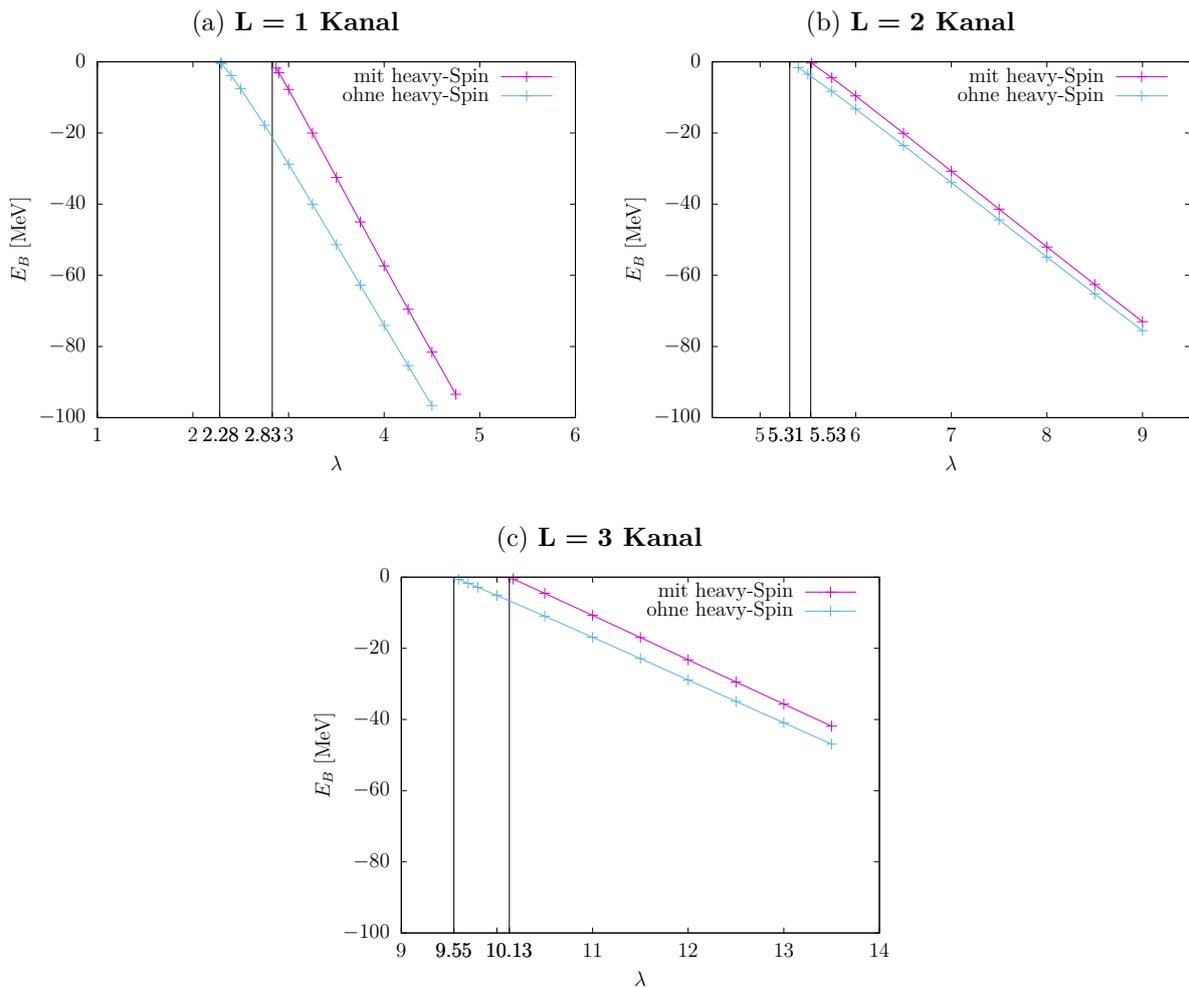


Abbildung 5.3.: Bindungsenergie E_B angeregter Zustände eines $ud\bar{b}\bar{b}$ Tetraquarks (im $I = 0$ Kanal) in Abhängigkeit der Massenzunahme $m'_b = \lambda \cdot m_{b,phys}$ der \bar{b} Quarks. Es sind die Ergebnisse der Näherung ohne heavy-Spin Effekte (blau) und mit heavy-Spin Effekten (lila) abgebildet, wobei das Tetraquark im (a) $L = 1$ Kanal, (b) $L = 2$ Kanal und (c) $L = 3$ Kanal betrachtet wurde.

Je größer L , desto flacher werden außerdem die sich ergebenden Geraden. Um einen Bindungszustand mit deutlich negativer Bindungsenergie in einem höher angeregten

5.2. Bindungsenergie angeregter Zustände

Zustand zu finden, muss folglich der Faktor λ im Vergleich zu seinem Mindestwert (siehe Tab. 5.1) um einiges mehr erhöht werden als das beispielsweise im $L = 1$ Kanal der Fall ist. Dies bestätigt, dass die Bindung zwischen den vier Quarks in höher angeregten Zuständen des Tetraquarks zunehmend schwächer wird.

Einfluss der Potentiale auf die Bindungsenergie

Analog zu den Untersuchungen des Grundzustandes, stellt sich die Frage welchen Einfluss die Stärke der Potentiale auf die Bindung der angeregten Zustände des Tetraquarks hat. Dieser Einfluss lässt sich untersuchen, indem Berechnungen mit jeweils zwei zusätzlichen Parametersets, welche die Fehlergrenzen der in (3.1) und (3.7) angegebenen Parameter für α_i und d_i ($i \in \{5, j\}$) berücksichtigen, durchgeführt werden.

Die Berechnungen unter Berücksichtigung der Fehler von α_j und d_j in der Näherung mit heavy-Spin Effekten zeigen, dass die Bindung des Tetraquarks auch in angeregten Zustände kaum durch das repulsive Potential V_j abgeschwächt wird. Die minimalen Werte von λ , ab denen eine negative Bindungsenergie gefunden werden kann, weichen gar nicht bis maximal um einen Faktor von etwa 0.015 von den Ergebnissen in Tabelle 5.1 ab. Diese Abweichungen sind so gering, dass kein merklicher Unterschied zu den Plots in Abbildung 5.3 feststellbar ist.

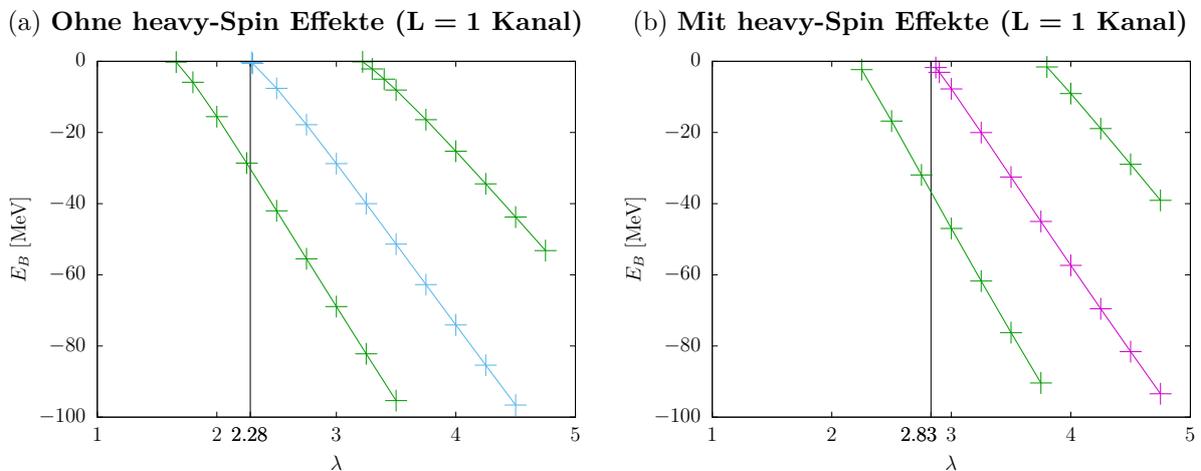


Abbildung 5.4.: Einfluss der Fehler des attraktiven Potentials $V_5(r)$ auf die Massenabhängigkeit der Bindungsenergie E_B des Tetraquarks im angeregten Zustand $L = 1$. In grün markiert sind die sich unter der Berücksichtigung der Fehler von α_5 und d_5 ergebenden Ergebnisse. (a) Zeigt die Ergebnisse in der Näherung ohne heavy-Spin Effekte und (b) unter der Berücksichtigung von heavy-Spin Effekten.

Die Stärke der Bindung des Tetraquark Zustandes hängt hauptsächlich von dem attraktiven Potential $V_5(r)$ ab. In Abbildung 5.4 sind beispielhaft die Ergebnisse des $L = 1$ Kanals abgebildet. Neben den ursprünglichen Ergebnissen der beiden Näherungen mit und ohne heavy-Spin Effekte sind die, durch die Berücksichtigung der Fehler von V_5 , abweichenden

5. Ergebnisse

Ergebnisse zu sehen. Die Abbildungen verdeutlichen den starken Einfluss den die Stärke des Potentials V_5 auf den Tetraquark Zustand hat. Die minimalen Werte von λ weichen um Faktoren von bis zu 1.0 von den Ergebnissen aus Tabelle 5.1 ab.

Für die höher angeregten Zustände nimmt dieser Einfluss sogar noch weiter zu. Die minimalen Werte von λ weichen hier um Faktoren von etwa 2.0 ($L = 2$ Kanal) und 3.0 ($L = 3$ Kanal) von den ursprünglichen Ergebnissen ab.

Massenabhängigkeit der Wellenfunktion

Um Aussagen über die mögliche Struktur der angeregten Zustände eines Tetraquarks in der Näherung mit heavy-Spin Effekten zu machen, sollen im Folgenden außerdem die sich für zunehmende Quarkmassen m_b ergebenden Wellenfunktionen untersucht werden.

Tetraquark mit Gesamtspin $S = 0$

Zunächst wird das Tetraquark mit Gesamtspin $S = 0$ und ungeraden Bahndrehimpulsen $L = 1$ oder $L = 3$ betrachtet. Die Wellenfunktionen $\chi_{S=0}$ dieser Kanäle werden durch (3.13) beschrieben, wonach die erste Komponente $\chi_1(r)$ zu einem BB -Paar und die zweite Komponente $\chi_2(r)$ zu einem B^*B^* -Paar korrespondiert.

Für den $L = 1$ Kanal wurden die numerischen Ergebnisse der Faktoren $\lambda \in \{3.0, 3.75, 4.5\}$ aus Abbildung 5.3a ausgewertet. Für den $L = 3$ Kanal wurden die Zustände der Faktoren $\lambda \in \{10.5, 12.0, 13.5\}$ aus Abbildung 5.3c gewählt. Die dazu korrespondierenden Komponenten der Wellenfunktionen sind in Abbildung 5.6 auf Seite 42 dargestellt.

In beiden angeregten Zuständen mit $L = 1$ und $L = 3$ ergibt sich ein ähnliches Verhalten der Wellenfunktionen bei zunehmenden Quarkmassen. Für Abstände $r \lesssim 0.5$ fm gilt $|\chi_2(r)| \gg |\chi_1(r)|$, das heißt das Tetraquark befindet sich eher im energetisch günstigeren Zustand eines B^*B^* -Paares. Je größer dabei die Masse der \bar{b} Quarks gewählt wird, desto weiter wandert das Maximum der Wellenfunktionen, und damit auch das der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $\rho(r)$, in Richtung des Ursprungs. Der durchschnittliche Abstand der \bar{b} Quarks zueinander verringert sich folglich mit Zunahme der Quarkmasse m_b . In Abbildung 5.5 sind zur Veranschaulichung dieses Sachverhaltes die sich aus den Wellenfunktionen ergebenden Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen $\rho(r)$ des $L = 1$ Kanals abgebildet. Für den $L = 3$ Kanal ergibt sich aufgrund der Ähnlichkeit der Wellenfunktionen ein dazu kaum verschiedenes Bild.

Bei größeren Abständen $r \gtrsim 0.7$ fm bevorzugt das Tetraquark dagegen keine der beiden Mesonen-Strukturen, die Größenordnung der Wellenfunktionen $\chi_1(r)$ und $\chi_2(r)$ unterscheiden sich nicht. Lediglich im $L = 1$ Kanal ist für $\lambda = 3.0$ die erste Komponente der Wellenfunktion $|\chi_1(r)|$ ein wenig größer als $|\chi_2(r)|$. In diesem Fall scheint das Tetraquark folglich einen BB -Zustand zu bevorzugen. Für schwerer werdende Quarkmassen verschwindet dieses Verhalten jedoch.

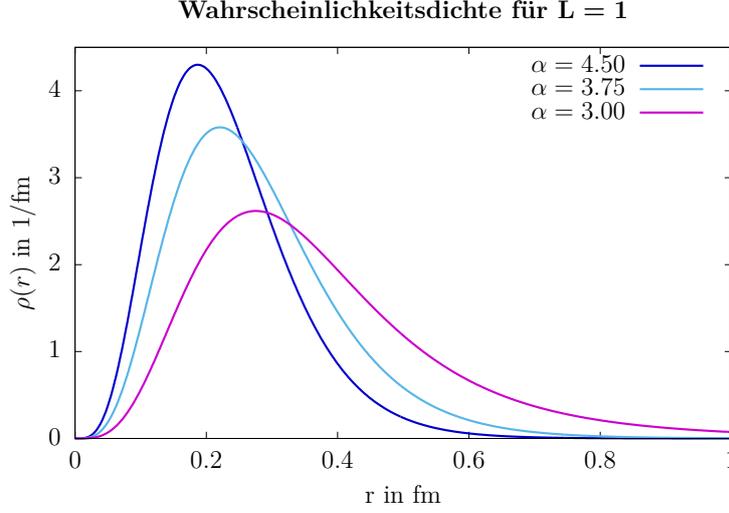


Abbildung 5.5.: Radiale Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(r)$ für $L = 1$ unter Berücksichtigung von heavy-Spin Effekten in Abhängigkeit der Quarkmasse $m'_b = \lambda \cdot m_{b,phys}$ mit $\lambda \in \{3.0, 3.75, 4.5\}$. Mit zunehmender Masse m_b verringert sich der durchschnittliche Abstand der \bar{b} Quarks zueinander.

Tetraquark mit Gesamtspin $S = 1$

Das Tetraquark im $L = 2$ Kanal mit Gesamtspin $S = 1$ wird durch die Wellenfunktion (3.15) beschrieben. Die erste Komponente $\chi_1(r)$ korrespondiert in diesem Fall zu einem BB^* -Paar und die zweite Komponente $\chi_2(r)$ zu einem B^*B^* -Paar. Es wurden die Ergebnisse der Faktoren $\lambda \in \{6.0, 7.5, 9.0\}$ aus Abbildung 5.3b ausgewertet. Die dazu korrespondierenden Komponenten der Wellenfunktionen sind in Abbildung 5.7 auf Seite 43 dargestellt.

Die Wellenfunktion der kleinsten gewählten Quarkmasse mit $\lambda = 6$ ähnelt der des Tetraquarks im Grundzustand ($L = 0$), welcher durch die gleiche Wellenfunktion (3.15) beschrieben wird. Für kleinere Abstände $r \lesssim 0.5$ fm wird keine der beiden möglichen Meson-Meson Strukturen bevorzugt. Mit zunehmendem Abstand ist dagegen $|\chi_1(r)|$ etwas größer als $|\chi_2(r)|$, eine BB^* -Struktur scheint folglich energetisch etwas günstiger zu sein.

Für die Zustände mit zunehmender Quarkmasse m_b ($\lambda \in \{7.5, 9.0\}$) gilt für alle Abstände $|\chi_2(r)| \approx |\chi_1(r)|$, es wird folglich keines der beiden Mesonen-Paare bevorzugt. Analog zum Verhalten der beiden Kanäle mit $L = 1$ und $L = 3$ verringert sich jedoch der durchschnittliche Abstand zwischen den \bar{b} Quarks. Je schwerer die Masse der beiden \bar{b} Quarks, desto stärker ist auch deren Bindung zueinander, was wiederum den Abstand zwischen den Quarks verringert.

5. Ergebnisse

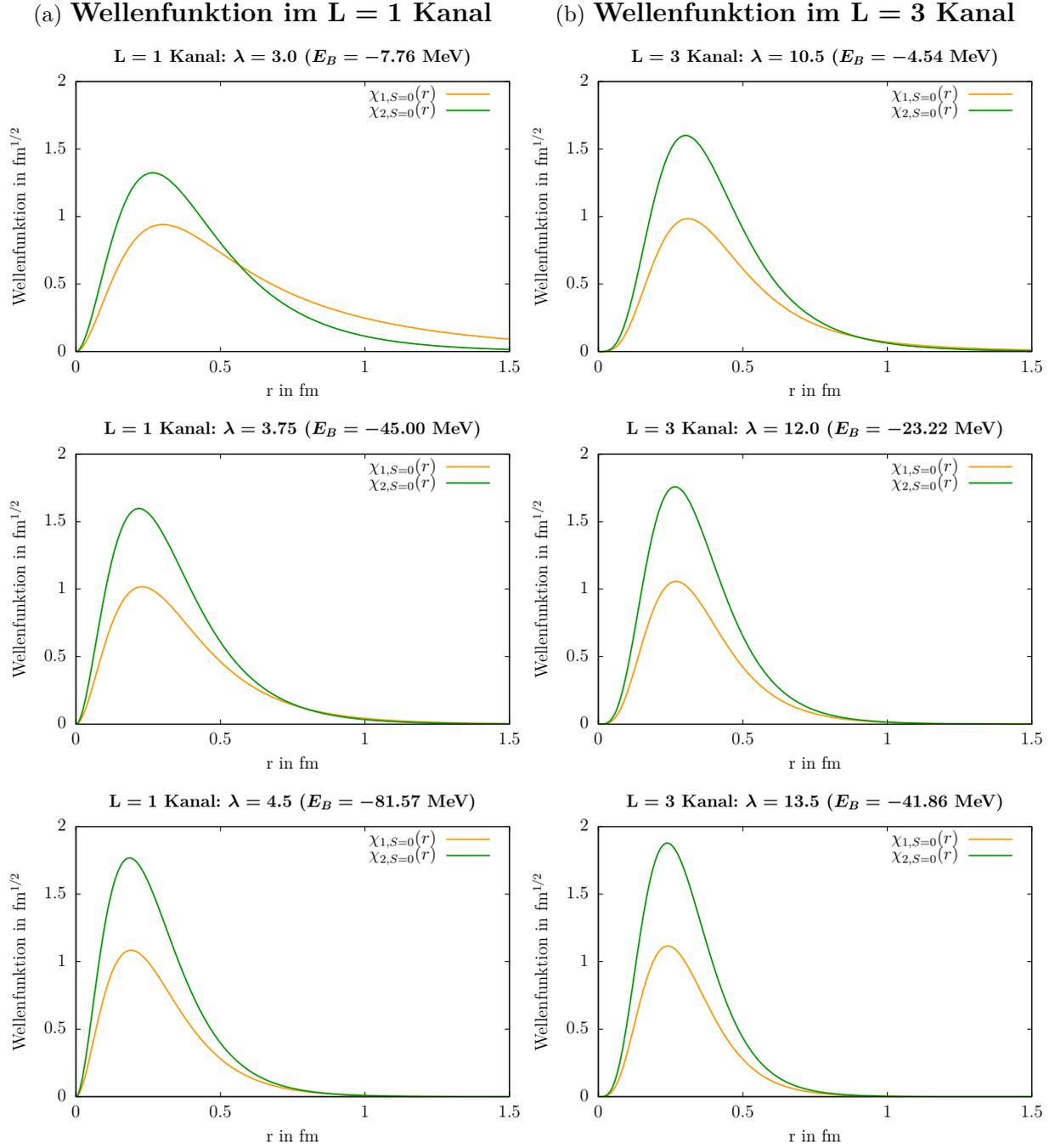


Abbildung 5.6.: Normierte Wellenfunktionen des Tetraquarks in angeregten Zuständen mit Gesamtspin $S = 0$ unter der Berücksichtigung von heavy Spin Effekten. Es sind die beiden Komponenten $\chi_1(r)$ (BB Komponente, orange) und $\chi_2(r)$ (B^*B^* Komponente, grün) der normierten Wellenfunktion $\chi_{S=0}(r)$ des Tetraquarks für die Massen $m'_b = \lambda \cdot m_{b,phys}$ im (a) $L = 1$ Kanal mit $\lambda \in \{3.0, 3.75, 4.5\}$ und (b) $L = 3$ Kanal mit $\lambda \in \{10.5, 12.0, 13.5\}$ abgebildet.

5.2. Bindungsenergie angeregter Zustände

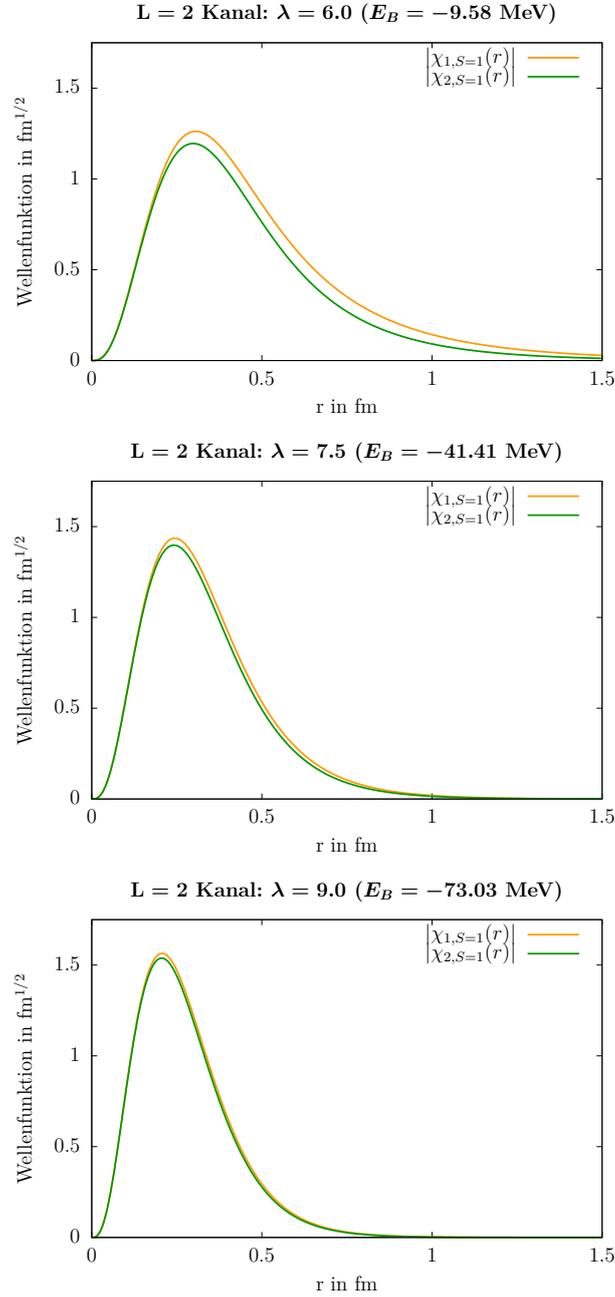


Abbildung 5.7.: Normierte Wellenfunktion des Tetraquarks im $L = 2$ Kanal mit Gesamtspin $S = 1$ unter der Berücksichtigung von heavy-Spin Effekten. Es sind die beiden Komponenten $\chi_1(r)$ (BB^* Komponente, orange) und $\chi_2(r)$ (B^*B^* Komponente, grün) der Wellenfunktion $\chi_{S=1}(r)$ für Zustände mit den \bar{b} Quarkmassen $m'_b = \lambda \cdot m_{b,phys}$, wobei $\lambda \in \{6.0, 7.5, 9.0\}$, abgebildet.

6. Schlussfolgerungen und Ausblick

Die Ergebnisse dieser Arbeit bestätigen, dass die Einbeziehung von Spin Effekten der schweren \bar{b} Quarks zu einer Verringerung der Bindungsenergie eines $ud\bar{b}\bar{b}$ Tetraquarks im Grundzustand mit den Quantenzahlen $I(J^P) = 0(1^+)$ führt.

In den angeregten Zuständen des Tetraquarks ($L \in \{1, 2, 3\}$) konnten dagegen keine Bindungszustände gefunden werden. Für zukünftige Arbeiten wird es daher von Interesse sein in den Kanälen mit $L \in \{1, 2, 3\}$ stattdessen nach Resonanzen, Zuständen mit positiver Bindungsenergie, zu suchen. Die Existenz einer solche Resonanz im $L = 1$ Kanal mit den Quantenzahlen $I(J^P) = 0(1^-)$ konnte in [24] bereits bestätigt werden. Dabei wurden heavy-Spin Effekte vernachlässigt, welche in einer parallel zu dieser Arbeit entstandenen Masterarbeit [25] erstmals in die Berechnungen der $L = 1$ Resonanz mit einbezogen wurden. Die zuvor gefundene Resonanz konnte in diesem Fall jedoch nicht bestätigt werden.

Um ein besseres Verständnis der angeregten Zustände zu bekommen, wurde in dieser Arbeit die Abhängigkeit der Masse der \bar{b} Quarks auf die Bindungsenergie angeregter Zustände untersucht. Die Bindung des Tetraquarks im $L = 1$ und $L = 3$ Kanal werden dabei stärker durch heavy-Spin Effekte abgeschwächt als das im $L = 2$ Kanal der Fall ist. Diese Ergebnisse könnten darauf hinweisen, dass im Allgemeinen der Einfluss von heavy-Spin Effekten für ein Tetraquark mit Gesamtspin $S = 1$ (gerader Bahndrehimpuls L) geringer ist, als für Zustände mit $S = 0$ (ungerade Bahndrehimpulse L). Möglicherweise wirkt sich dieser Zusammenhang auch auf die Resonanz im $L = 1$ Kanal aus. Die Abschwächung der Bindung zwischen den Quarks könnte zu groß sein, um eine Resonanz zu finden.

Um diese Vermutung zu bestätigen, sollte in Zukunft die Massenabhängigkeit der Bindungsenergie weiterer Zustände mit $S = 1$, also geradem L , beispielsweise dem Grundzustand, in den beiden Näherungen mit und ohne heavy-Spin Effekte untersucht werden. Die Ergebnisse würden Aufschluss darüber geben, ob heavy-Spin Effekte für ein Tetraquark mit $S = 0$ tatsächlich stärker sind als für ein Tetraquark mit $S = 1$.

Es ist an dieser Stelle erneut darauf hinzuweisen, dass Spin Effekte der \bar{b} Quarks in dieser Arbeit nur näherungsweise durch die Berücksichtigung der Massendifferenz von B und B^* Mesonen in die Berechnungen mit einbezogen wurden. Für eine genauere Beschreibung von $ud\bar{b}\bar{b}$ Tetraquarks können bereits bei der Berechnung der Potentiale heavy-Spin Effekte berücksichtigt werden. Dies ist allerdings technisch schwieriger umzusetzen. Erste verbesserte Gitter QCD Berechnungen zur Untersuchung des Tetraquark-Bindungszustandes mit $I(J^P) = 0(1^+)$ wurden beispielsweise in [26] durchgeführt.

A. Anhang

A.1. Einheiten und Konventionen

In dieser Arbeit wird das natürlich Einheitensystem verwendet, wobei $\hbar = c = 1$ gilt. Energie und Masse besitzen in diesem Fall die Einheit MeV. Zwischen Energie und Längen wird über den folgenden Zusammenhang umgerechnet:

$$\hbar c = 197.3269804 \text{ MeV fm} = 1 \quad (\text{A.1})$$

Beim Einsetzen natürlicher Größen in die Schrödingergleichung müssen diese in SI-Einheiten umgerechnet werden. Es gelten die Folgenden Regeln, wobei der Index NE eine Größe in natürlichen Einheiten bezeichnet:

- Reduzierte Masse: $\mu = \mu_{NE}/c^2$.
- Potentiale: $V(r_{NE}) = \hbar c \cdot V(r)$.
 - Es ist zu beachten, dass das Potential (3.3) in natürlichen Einheiten definiert ist, d.h. $[r_{NE}] = 1/\text{MeV}$.

Literatur

- [1] M. Gell-Mann. “A schematic model of baryons and mesons”. In: *Phys. Lett.* **8.3** (1964), S. 214–215. DOI: 10.1016/S0031-9163(64)92001-3.
- [2] Greig Cowan und Tim Gershon. *Tetraquarks and Pentaquarks*. London: IOP Publishing, 2018. DOI: 10.1088/978-0-7503-1593-7. arXiv: 1808.04153.
- [3] S.-K. Choi u. a. “Observation of a Narrow Charmoniumlike State in Exclusive $B^\pm \rightarrow K^\pm \pi^+ \pi^- J/\psi$ Decays”. In: *Phys. Rev. Lett.* **91.26** (2003). DOI: 10.1103/PhysRevLett.91.262001. arXiv: hep-ex/0309032.
- [4] A. Bondar u. a. “Observation of Two Charged Bottomoniumlike Resonances in $\Upsilon(5S)$ Decays”. In: *Phys. Rev. Lett.* **108.12** (2012). DOI: 10.1103/PhysRevLett.108.122001. arXiv: 1110.2251 [hep-ex].
- [5] M. Ablikim u. a. “Observation of a charged charmoniumlike structure in $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^- J/\psi$ at $\sqrt{s} = 4.26$ GeV”. In: *Phys. Rev. Lett.* **110.25** (2013). DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.252001. arXiv: 1303.5949 [hep-ex].
- [6] Z. Q. Liu u. a. “Study of $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^- J/\psi$ and Observation of a Charged Charmoniumlike State at Belle”. In: *Phys. Rev. Lett.* **110.25** (2013). DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.252002. arXiv: 1304.0121 [hep-ex].
- [7] Pedro Bicudo und Marc Wagner. “Lattice QCD signal for a bottom-bottom tetraquark”. In: *Phys. Rev. D* **87.11** (2013). DOI: 10.1103/PhysRevD.87.114511. arXiv: 1209.6274 [hep-ph].
- [8] Pedro Bicudo, Krzysztof Cichy, Antje Peters, Björn Wagenbach und Marc Wagner. “Evidence for the existence of $ud\bar{b}\bar{b}$ and the nonexistence of $ss\bar{b}\bar{b}$ and $cc\bar{b}\bar{b}$ tetraquarks from lattice QCD”. In: *Phys. Rev. D* **92.1** (2015). DOI: 10.1103/PhysRevD.92.014507. arXiv: 1505.00613v2 [hep-lat].
- [9] Pedro Bicudo, Jonas Scheunert und Marc Wagner. “Including heavy spin effects in the prediction of a $\bar{b}b\bar{u}d$ tetraquark with lattice QCD potentials”. In: *Phys. Rev. D* **95.3** (2017). DOI: 10.1103/PhysRevD.95.034502. arXiv: 1612.02758 [hep-lat].
- [10] Marc Wagner, Stefan Diehl, Till Kuske und Johannes Weber. *An introduction to lattice hadron spectroscopy for students without quantum field theoretical background*. Laubach: Skript zur Vorlesung (HGS-HIRE Lecture Week on Hadron Physics), Juni 2013. arXiv: 1310.1760 [hep-lat].
- [11] Max Born und Robert Oppenheimer. “Zur Quantentheorie der Molekeln”. In: *Ann. der Phys. (4)* **389.20** (1927), S. 457–484. DOI: 10.1002/andp.19273892002.

-
- [12] Stephen Godfrey und Nathan Isgur. “Mesons in a relativized quark model with chromodynamics”. In: *Phys. Rev. D* **32**.189 (1985). DOI: 10.1103/PhysRevD.32.189.
- [13] P. A. Zyla u.a. (Particle Data Group). “Review of Particle Physics”. In: *Progress of Theoretical and Experimental Physics* **2020**.8 (2020). DOI: 10.1093/ptep/ptaa104.
- [14] Pedro Bicudo, Krzysztof Cichy, Antje Peters und Marc Wagner. “ BB interactions with static bottom quarks from lattice QCD”. In: *Phys. Rev. D* **93**.3 (2016). DOI: 10.1103/PhysRevD.93.034501. arXiv: 1510.03441 [hep-lat].
- [15] Jonas Scheunert. “Combining Lattice QCD results and Nonrelativistic Quantum Mechanics in the Born-Oppenheimer Approximation to study possibly existing Tetraquarks”. Masterarbeit. Goethe-Universität Frankfurt am Main, Sep. 2015.
- [16] Martin Pflaumer. “Resonanzen in $\bar{b}bud$ -Tetraquark-Systemen basierend auf statisch-leichten Gitter-QCD-Vier-Quark-Potentialen”. Bachelorarbeit. Goethe-Universität Frankfurt am Main, Sep. 2016.
- [17] Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 4 – Kern-, Teilchen- und Astrophysik*. 5. Aufl. Springer-Verlag, 2017. Kap. 7: Physik der Elementarteilchen, S. 161–197.
- [18] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling und Brian P. Flannery. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. 3. Aufl. New York: Cambridge University Press, 2007.
- [19] Marc Wagner. *Numerical Methods in Physics*. Skript zur Vorlesung. Goethe-Universität Frankfurt am Main, Juli 2018.
- [20] Wolfgang Nolting. *Grundkurs Theoretische Physik 5/2 – Quantenmechanik - Methoden und Anwendungen*. 7. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2012. Kap. 6: Zentralpotential, S. 101–153.
- [21] Franz Schwabl. *Quantenmechanik (QMI) – Eine Einführung*. 7. Aufl. Springer-Verlag, 2007. Kap. 6.4: Das Zweikörperproblem, S. 140–142.
- [22] J. J. Sakurai und Jim Napolitano. *Modern Quantum Mechanics*. 2. Aufl. Cambridge: Cambridge University Press, 2017. Kap. 3.7: Schrödinger’s Equation for Central Potentials, S. 207–217.
- [23] Andreas S. Kronfeld und James N. Simone. “Computation of $\bar{\Lambda}$ and λ_1 with lattice QCD”. In: *Phys. Lett. B* **490** (2000), S. 228–235. DOI: 10.1016/S0370-2693(00)00833-9. arXiv: hep-ph/0006345.
- [24] Martin Pflaumer, Pedro Bicudo, Marco Cardoso, Antje Peters und Marc Wagner. “ $\bar{b}bud$ tetraquark resonances in the Born-Oppenheimer approximation using lattice QCD potentials”. In: *PoS Confinement2018* (2019), S. 123. DOI: 10.22323/1.336.0123. arXiv: 1811.04724 [hep-lat].
- [25] André Zimmermann. “Investigation of a $\bar{b}bud$ tetraquark state, with quantum numbers $I(J^P) = 0(1^-)$, using lattice QCD static potentials”. Masterrarbeit. Goethe-Universität Frankfurt am Main, Okt. 2020.

- [26] Luka Leskovec, Stefan Meinel, Martin Pflaumer und Marc Wagner. “Lattice QCD investigation of a doubly-bottom $\bar{b}\bar{b}ud$ tetraquark with quantum numbers $I(J^P) = 0(1^+)$ ”. In: *Phys. Rev. D* **100**.1 (2019). DOI: 10.1103/PhysRevD.100.014503. arXiv: 1904.04197 [hep-lat].