
1. Klausur zu “Theoretische Physik 5 – Thermodynamik und Statistische Physik”

24. Februar 2023

Prof. Marc Wagner
Goethe-Universität Frankfurt
Institut für Theoretische Physik

5 Aufgaben mit insgesamt **100** Punkten. Die Klausur ist mit **50** oder mehr Punkten bestanden.

Name: _____

Matrikelnummer: _____

Aufgabe	Punkte
1	
2	
3	
4	
5	
Gesamt	
Note	

Aufgabe 1 (8 + 6 + 3 + 1 + 4 = 22 Punkte)

Betrachte im Folgenden ein ideales Gas mit festgehaltener Teilchenzahl N im Rahmen der Thermodynamik.

- Berechne mit Hilfe des 2. Hauptsatzes die Abhängigkeit der Entropie von der Energie E bei festgehaltenem Volumen V . Betrachte dazu einen Prozess, bei dem Wärme zugeführt und das Volumen konstant gehalten wird. Die Zustandsgleichungen des idealen Gases kannst Du bei Bedarf verwenden.
- Berechne mit Hilfe des 2. Hauptsatzes die Abhängigkeit der Entropie vom Volumen V bei festgehaltener Energie E . Betrachte dazu einen Prozess, bei dem das Volumen verändert und die Energie konstant gehalten wird. Die Zustandsgleichungen des idealen Gases kannst Du bei Bedarf verwenden.
- Zeige mit Hilfe Deiner Ergebnisse aus (a) und (b) das aus der Vorlesung bekannte Ergebnis

$$S(E, V, N) = \frac{3Nk_B}{2} \ln(E) + Nk_B \ln(V) + c(N), \quad (1)$$

wobei $c(N)$ eine Funktion von N ist, d.h. nicht von E oder V abhängt.

- Was sind die natürlichen Zustandsvariablen des thermodynamischen Potentials E .
- Gib, ausgehend von $dE = T dS - P dV$, einen Ausdruck für die Temperatur T an, der eine Ableitung des thermodynamischen Potentials E enthält. Benutze diesen Ausdruck sowie Gleichung (1), um die kalorische Zustandsgleichung des idealen Gases abzuleiten.

Lösung 1(a)

2. Hauptsatz: $dS = dQ_{\text{qs}}/T$.

Energieabhängigkeit von S :

$$S(E, V, N) = \int dS = \int dQ_{\text{qs}} \frac{1}{T} = \int dE \frac{3Nk_B}{2E} = \frac{3Nk_B}{2} \ln(E) + c_1(V, N), \quad (2)$$

wobei der 1. Hauptsatz $dE = dW_{\text{qs}} + dQ_{\text{qs}}$ verwendet wurde, $dW_{\text{qs}} = 0$ aufgrund von $V = \text{const}$ sowie die kalorische Zustandsgleichung $E = 3Nk_B T/2$.

Lösung 1(b)

Volumenabhängigkeit von S :

$$S(E, V, N) = \int dS = \int dQ_{\text{qs}} \frac{1}{T} = \int dV \frac{P}{T} = \int dV \frac{Nk_B}{V} = Nk_B \ln(V) + c_2(E, N), \quad (3)$$

wobei der 1. Hauptsatz $dE = dW_{\text{qs}} + dQ_{\text{qs}}$ verwendet wurde, $dE = 0$, $dW_{\text{qs}} = -P dV$ sowie die thermische Zustandsgleichung $PV/T = Nk_B$.

Lösung 1(c)

Vergleich der Ergebnisse für S aus (a) und (b) liefert z.B. $c_1(V, N) = Nk_B \ln(V) + c(N)$. Damit ist Gleichung (1) gezeigt.

Lösung 1(d)

$E(S, V, N)$.

Lösung 1(e)

Man kann direkt

$$T = \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right)_{V, N} \quad (4)$$

ablesen.

Aus diesem Ausdruck folgt unmittelbar

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_{V, N} = \frac{3Nk_B}{2E}. \quad (5)$$

Dies entspricht der kalorischen Zustandsgleichung

$$E = \frac{3Nk_B T}{2}. \quad (6)$$

Aufgabe 2 (24 Punkte)

Betrachte ein klassisches ideales Gas, bestehend aus N Molekülen, die ein nicht-verschwindendes elektrisches Dipolmoment aufweisen, im Volumen V . Es liegt ein homogenes elektrisches Feld $\mathbf{E} = (0, 0, E)$ vor. Die Hamilton-Funktion für ein einzelnes Molekül lautet damit

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{d}, \quad (7)$$

wobei \mathbf{d} das Dipolmoment des Moleküls bezeichnet ($|\mathbf{d}| = \text{const}$ und gleich für alle Moleküle; die Richtung von \mathbf{d} ist nicht festgelegt, damit Teil der Freiheitsgrade des Systems und im Allgemeinen von Molekül zu Molekül verschieden). Berechne die Orientierungspolarisation des Gases $\mathbf{P} = (N/V)\bar{\mathbf{d}}$ als Funktion der Temperatur T .

Hinweis: Da es sich in dieser Aufgabe um ein ideales Gas handelt, können Wechselwirkungen zwischen den Molekülen ignoriert werden. Des Weiteren sollen beim Lösen dieser Aufgabe die kinetischen Rotationsfreiheitsgrade vernachlässigt werden, d.h. beim Aufstellen der kanonischen

Zustandssumme ist über die Positionen und Impulse der Moleküle sowie gleichförmig über alle Dipolausrichtungen zu integrieren.

Hinweis: Je nachdem, welchen Rechenweg Du wählst, kann das folgende Integral hilfreich sein:

$$\int dx x e^{ax} = \frac{1}{a^2}(ax - 1)e^{ax} + \text{const.}$$

Lösung 2

Da die Moleküle nicht wechselwirken, reicht es aus, ein einzelnes Molekül zu betrachten.

Das elektrische Dipolmoment kann durch zwei Winkel (ϑ, φ) parametrisiert werden, $\mathbf{d} = d(\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)$.

Die kanonische Zustandssumme für ein Molekül lautet damit

$$Z = \# \int d^3p \int d^3r \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \exp\left(-\beta\left(\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - dE \cos \vartheta\right)\right), \quad (8)$$

wobei $\#$ ein irrelevanter Normierungsfaktor ist.

Im Ausdruck für das mittlere Dipolmoment treten der Normierungsfaktor und die Impuls- und Ortsintegrale im Zähler und im Nenner auf und kürzen sich damit. Es folgt

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{d}} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \exp\left(\beta|\mathbf{d}|E \cos \vartheta\right) \mathbf{d} = \\ &= \frac{1}{Z'} \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \exp\left(\beta|\mathbf{d}|E \cos \vartheta\right) |\mathbf{d}| \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

mit

$$Z' = \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \exp\left(\beta|\mathbf{d}|E \cos \vartheta\right). \quad (10)$$

$\bar{\mathbf{d}}_x = \bar{\mathbf{d}}_y = 0$ aufgrund des φ -Integrals.

Substitution $x = \cos \vartheta$. Damit $dx = (d \cos \vartheta / d\vartheta) d\vartheta = -\sin \vartheta d\vartheta$. Es folgt

$$Z' = 2\pi \int_{-1}^{+1} dx \exp\left(\beta|\mathbf{d}|Ex\right) = \frac{2\pi}{\beta|\mathbf{d}|E} \exp\left(\beta|\mathbf{d}|Ex\right) \Big|_{-1}^{+1} = \frac{4\pi}{\beta|\mathbf{d}|E} \sinh\left(\beta|\mathbf{d}|E\right). \quad (11)$$

und

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{d}}_z &= \frac{2\pi}{Z'} \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \exp\left(\beta|\mathbf{d}|E \cos \vartheta\right) |\mathbf{d}| \cos \vartheta = \frac{2\pi}{Z'} \int_{-1}^{+1} dx \exp\left(\beta|\mathbf{d}|Ex\right) |\mathbf{d}|x = \\
 &= \frac{2\pi|\mathbf{d}|}{Z'(\beta|\mathbf{d}|E)^2} (\beta|\mathbf{d}|Ex - 1) \exp\left(\beta|\mathbf{d}|Ex\right) \Big|_{-1}^{+1} = \\
 &= \frac{4\pi|\mathbf{d}|}{Z'(\beta|\mathbf{d}|E)^2} \left(\beta|\mathbf{d}|E \cosh(\beta|\mathbf{d}|E) - \sinh(\beta|\mathbf{d}|E)\right) = \frac{|\mathbf{d}|}{\beta|\mathbf{d}|E} \left(\beta|\mathbf{d}|E \coth(\beta|\mathbf{d}|E) - 1\right) = \\
 &= |\mathbf{d}| \coth(\beta|\mathbf{d}|E) - \frac{1}{\beta E}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Alternativ (und mathematisch wesentlich einfacher) kann $\bar{\mathbf{d}}_z$ auch über geeignetes Ableiten von Z' berechnet werden,

$$\bar{\mathbf{d}}_z = \frac{\partial}{\partial \beta E} \ln(Z') = |\mathbf{d}| \coth(\beta|\mathbf{d}|E) - \frac{1}{\beta E}. \tag{13}$$

Die Orientierungspolarisation ist gemäß Aufgabentext $\mathbf{P} = (N/V)\bar{\mathbf{d}}$.

Aufgabe 3 (3 + 8 + 6 + 5 = 22 Punkte)

Betrachte ein ideales nicht-relativistisches Quantengas ununterscheidbarer Teilchen mit Masse m und Spin s in einem kubischen Volumen $V = L^3$.

- (a) Welche 1-Teilchen-Zustände sind möglich? Gib zur Beantwortung dieser Frage präzise an, durch welche Quantenzahlen ein 1-Teilchen-Zustand eindeutig charakterisiert werden kann und welche Werte für diese Quantenzahlen zulässig sind.
- (b) Betrachte in dieser Teilaufgabe den Spezialfall von $N = 3$ Teilchen mit Spin $s = 1/2$. Gib den Entartungsgrad des Grundzustands an (Entartungsgrad = Anzahl linear unabhängiger Zustände mit Grundzustandsenergie). Gib eine physikalisch zulässige Grundzustandswellenfunktion ausgedrückt durch 1-Teilchen-Wellenfunktionen an (die Grundzustandswellenfunktion muss nicht normiert werden).
- (c) Erläutere das Konzept der Besetzungszahlen. Welche Werte können Besetzungszahlen in Abhängigkeit von s annehmen? Erkläre, warum die Angabe von Werten für sämtliche Besetzungszahlen einen Zustand eindeutig charakterisiert.
- (d) Betrachte erneut den Spezialfall aus Teilaufgabe (b) und gib eine Basis linear unabhängiger Zustände an, die den Raum der entarteten Grundzustände aufspannen.
Hinweis: Hier ist es nicht erforderlich Wellenfunktionen hinzuschreiben. Die Angabe der Besetzungszahlen für jeden der linear unabhängigen Zustände der Basis ist ausreichend.

Lösung 3(a)

Quantenzahlen sind die diskreten Impulskomponenten \mathbf{p} und die z -Komponente des Spins s_z .
Werte für \mathbf{p} :

$$\mathbf{p} = (\pi\hbar/L)\mathbf{n} \text{ mit } n_x, n_y, n_z = 1, 2, \dots, \infty.$$

$$s_z = -s, -s + 1, \dots, +s - 1, s.$$

Lösung 3(b)

Grundzustand für $N = 3$: Zwei Teilchen im 2-fach entarteten 1-Teilchen-Grundzustand mit $n_x = n_y = n_z = 1$, eines davon mit $s_z = -1/2$, das andere mit $s_z = +1/2$. Das dritte Teilchen befindet sich im 6-fach entarteten 1. angeregten 1-Teilchen-Zustand mit $n_x = n_y = 1, n_z = 2$ oder $n_x = n_z = 1, n_y = 2$ oder $n_y = n_z = 1, n_x = 2$ sowie mit $s_z = -1/2$ oder $s_z = +1/2$. Da die Teilchen nicht unterscheidbar sind, d.h. der Zustand vollständig antisymmetrisch unter Teilchenvertauschung sein muss, ist der Entartungsgrad des Grundzustands für $N = 3$ ebenfalls 6. Mögliche Grundzustands-Wellenfunktion für $N = 3$:

$$\psi(1, 2, 3) = \# \left(\begin{aligned} & +\varphi_{(\mathbf{q}_1, \downarrow)}(1)\varphi_{(\mathbf{q}_1, \uparrow)}(2)\varphi_{(\mathbf{q}_2, \downarrow)}(3) - \varphi_{(\mathbf{q}_1, \downarrow)}(3)\varphi_{(\mathbf{q}_1, \uparrow)}(2)\varphi_{(\mathbf{q}_2, \downarrow)}(1) \\ & +\varphi_{(\mathbf{q}_1, \downarrow)}(2)\varphi_{(\mathbf{q}_1, \uparrow)}(3)\varphi_{(\mathbf{q}_2, \downarrow)}(1) - \varphi_{(\mathbf{q}_1, \downarrow)}(2)\varphi_{(\mathbf{q}_1, \uparrow)}(1)\varphi_{(\mathbf{q}_2, \downarrow)}(3) \\ & +\varphi_{(\mathbf{q}_1, \downarrow)}(3)\varphi_{(\mathbf{q}_1, \uparrow)}(1)\varphi_{(\mathbf{q}_2, \downarrow)}(2) - \varphi_{(\mathbf{q}_1, \downarrow)}(1)\varphi_{(\mathbf{q}_1, \uparrow)}(3)\varphi_{(\mathbf{q}_2, \downarrow)}(2) \end{aligned} \right) \quad (14)$$

oder

$$\psi(1, 2, 3) = \# \sum_P \text{sign}(P)\varphi_{(\mathbf{q}_1, \downarrow)}(P(1))\varphi_{(\mathbf{q}_1, \uparrow)}(P(2))\varphi_{(\mathbf{q}_2, \downarrow)}(P(3)) \quad (15)$$

mit $\mathbf{q}_1 = (\pi\hbar/L)(1, 1, 1)$ und $\mathbf{q}_2 = (\pi\hbar/L)(1, 1, 2)$.

Lösung 3(c)

Für jeden möglichen 1-Teilchen-Zustand, charakterisiert durch \mathbf{p} und s_z (siehe Teilaufgabe (a)), gibt es eine Besetzungszahl $n_{(\mathbf{p}, s_z)}$. Diese Besetzungszahl gibt die Anzahl der Teilchen in diesem 1-Teilchen-Zustand an. Für Bosonen (ganzzahliger Spin) sind Werte $0, 1, \dots, \infty$ erlaubt, für Fermionen (halbzahliger Spin) sind Werte $0, 1$ erlaubt. In der Natur kommen nur entweder vollständig symmetrische (Bosonen) oder vollständig antisymmetrische (Fermionen) Zustände vor, d.h. die Teilchen können nicht unterschieden werden und bei Angabe von Werten für alle Besetzungszahlen gibt es nur eine Möglichkeit einen Zustand z.B. in Form einer Wellenfunktion zu notieren (bis auf eine physikalisch irrelevante Phase).

Lösung 3(d)

Verwende die oben definierten $\mathbf{q}_1 = (\pi\hbar/L)(1, 1, 1)$ und $\mathbf{q}_2 = (\pi\hbar/L)(1, 1, 2)$ sowie $\mathbf{q}_3 = (\pi\hbar/L)(2, 1, 1)$ und $\mathbf{q}_4 = (\pi\hbar/L)(1, 2, 1)$.

Es gibt 6 entartete Grundzustände:

- $n_{\mathbf{q}_1, \downarrow} = 1, n_{\mathbf{q}_1, \uparrow} = 1, n_{\mathbf{q}_2, \downarrow} = 1$, alle anderen Besetzungszahlen sind 0.
- $n_{\mathbf{q}_1, \downarrow} = 1, n_{\mathbf{q}_1, \uparrow} = 1, n_{\mathbf{q}_2, \uparrow} = 1$, alle anderen Besetzungszahlen sind 0.
- $n_{\mathbf{q}_1, \downarrow} = 1, n_{\mathbf{q}_1, \uparrow} = 1, n_{\mathbf{q}_3, \downarrow} = 1$, alle anderen Besetzungszahlen sind 0.
- $n_{\mathbf{q}_1, \downarrow} = 1, n_{\mathbf{q}_1, \uparrow} = 1, n_{\mathbf{q}_3, \uparrow} = 1$, alle anderen Besetzungszahlen sind 0.
- $n_{\mathbf{q}_1, \downarrow} = 1, n_{\mathbf{q}_1, \uparrow} = 1, n_{\mathbf{q}_4, \downarrow} = 1$, alle anderen Besetzungszahlen sind 0.
- $n_{\mathbf{q}_1, \downarrow} = 1, n_{\mathbf{q}_1, \uparrow} = 1, n_{\mathbf{q}_4, \uparrow} = 1$, alle anderen Besetzungszahlen sind 0.

Aufgabe 4 (4 + 6 + 7 = 17 Punkte)

Beantworte die folgenden Fragen in kurzen aber präzisen Worten und/oder mit einzelnen relevanten mathematischen Ausdrücken oder Gleichungen. Mehr als drei oder vier inhaltsreiche Sätze pro Teilaufgabe sind zur vollständigen und korrekten Beantwortung nicht erforderlich.

- (a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, N unterscheidbare Spins, beschrieben durch die Variablen $s_n, n = 1, \dots, N$, von denen jeder die Einstellmöglichkeit $s_n = +1$ oder $s_n = -1$ hat, so anzuordnen, dass die Magnetisierung $M = \lambda \sum_{n=1}^N s_n$ verschwindet (N ist eine gerade Zahl)?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man im Gleichgewicht die Magnetisierung $M = \lambda N$, wenn die Spins weder untereinander, noch mit äußeren Feldern wechselwirken?
- (b) Was versteht man unter Bose-Einstein-Kondensation? Diskutiere dabei insbesondere die mittlere Besetzungszahl des 1-Teilchen-Grundzustands (fertige dafür entweder eine saubere Skizze dieser Größe als Funktion der Temperatur an, oder schreibe eine entsprechende Gleichung nieder). Welche Ordnung hat der dabei auftretende Phasenübergang, wenn man diese mittlere Besetzungszahl als Ordnungsparameter sowie die heutzutage übliche Klassifizierung verwendet, und warum?
Hinweis: Beschränke Dich bei Deinen Erklärungen gegebenenfalls auf den Spezialfall eines nicht-relativistischen idealen Quantengases in einem kubischen Volumen (wie in der Vorlesung ausführlich besprochen). Verallgemeinerungen, wie in den Hausaufgaben gefragt, müssen hier nicht erläutert werden.
- (c) Was versteht man im Kontext “idealer Quantengase” unter quantenmechanischen Virialkoeffizienten und was sagen diese aus? Unter welchen Bedingungen besitzen diese Aussagen Gültigkeit? Inwiefern unterscheiden sie sich qualitativ für Fermionen und Bosonen und welche unterschiedlichen physikalischen Konsequenzen ergeben sich daraus (hier reicht es, ein Beispiel zu nennen)?

Lösung 4(a)

Anzahl der Möglichkeiten für $M = 0$:

$$\frac{N!}{(N/2)!(N/2)!} \quad \text{bzw.} \quad \binom{N}{N/2}. \quad (16)$$

Wahrscheinlichkeit für $M = \lambda N$:

$$\frac{1}{2^N}. \quad (17)$$

Lösung 4(b)

Für $T < T_c$, also unterhalb einer kritischen Temperatur, kommt es bei einem idealen Bose Gas zu einer Anhäufung der Teilchen im 1-Teilchen-Grundzustand, während alle weiteren 1-Teilchen-Zustände vergleichsweise dünn besetzt bleiben.

Saubere Skizze von \bar{n}_0/N als Funktion von N oder

$$\frac{\bar{n}_0}{N} = \begin{cases} 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} & \text{für } T \leq T_c \\ 0 & \text{für } T \geq T_c \end{cases}. \quad (18)$$

Da \bar{n}_0/N der übliche Ordnungsparameter ist und dieser im Phasenübergang stetig ist, aber eine unstetige Ableitung hat, ist der Phasenübergang von 2. Ordnung.

Lösung 4(c)

Die quantenmechanischen Virialkoeffizienten beschreiben Korrekturen zu den Zustandsgleichungen des idealen Gases $P = Nk_B T/V$ und $E = 3Nk_B T/2$. Diese Korrekturen sind proportional zu $1/vT^{3/2}$ (Angabe entsprechender Gleichungen aus der Vorlesung, z.B. Gleichungen (222) bis (225) oder Teile davon, ist ebenfalls ausreichend), d.h. gültig beziehungsweise gute Näherungen für hohe Temperaturen und geringe Dichten. Sie unterscheiden sich für Fermionen und Bosonen im Vorzeichen. Z.B. ist bei vorgegebenem T , V und N der Druck eines idealen Bose-Gas geringer als der eines idealen Fermi-Gases, wohingegen der Druck eines klassischen idealen Gases dazwischen liegt.

Aufgabe 5 (3 + 5 + 4 + 3 = 15 Punkte)

- (a) Beschreibe in kurzen präzisen Worten und durch Angabe geeigneter mathematischer Ausdrücke die Ehrenfest-Klassifizierung von Phasenübergängen.

- (b) Zeige unter Verwendung von $dG = -S dT + V dP$ (G bezeichnet das Gibbs-Potential) und der Duhem-Gibbs-Relation die Beziehung

$$s = \frac{S}{N} = -\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_P \quad (19)$$

(die Teilchenzahl N ist fest vorgegeben, d.h. unveränderlich).

- (c) Setze mit Hilfe von Gleichung (19) die spezifische Wärme c_P und das chemische Potential μ in Beziehung.
- (d) Welches charakteristische Verhalten muss die Observable c_P bei Temperaturveränderung aufweisen, wenn eine Phasengrenze überschritten wird und der zugeordnete Phasenübergang nach der Ehrenfest-Klassifizierung von 2. Ordnung ist? Begründe Deine Aussage.

Lösung 5(a)

Ein Phasenübergang ist von n -ter Ordnung, wenn

$$\left(\frac{\partial^m \mu_A}{\partial T^m}\right)_P = \left(\frac{\partial^m \mu_B}{\partial T^m}\right)_P \quad (20)$$

für $m = 0, \dots, n-1$ und

$$\left(\frac{\partial^n \mu_A}{\partial T^n}\right)_P \neq \left(\frac{\partial^n \mu_B}{\partial T^n}\right)_P, \quad (21)$$

d.h. die n -te partielle Ableitung von $\mu(T, P)$ nach T einen Sprung hat.

Lösung 5(b)

Aus dem angegebenen dG folgt

$$S = -\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_P. \quad (22)$$

Mit der Duhem-Gibbs-Relation $G = \mu N$ () erhält man

$$s = \frac{S}{N} = -\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_P. \quad (23)$$

Lösung 5(c)

Die spezifische Wärme ist, wie in der Vorlesung diskutiert,

$$c_P = \frac{C_P}{N} = \frac{T}{N} \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P. \quad (24)$$

Einsetzen der in Teilaufgabe (b) gezeigten Beziehung liefert

$$c_P = T \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_P = -T \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial T^2} \right)_P. \quad (25)$$

Lösung 5(d)

2. Ordnung nach Ehrenfest:

Die 2. Ableitung von μ muss am Phasenübergang unstetig sein, d.h. einen Sprung aufweisen. Gemäß dem Ergebnis aus Teilaufgabe (c) muss dieser Sprung auch in c_P sichtbar sein.