Laurin Pannullo: pannullo@itp.uni-frankfurt.de
Marc Winstel: winstel@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 13

Abgabe am 03.02.2023. Besprechung in den Tutorien vom 06.02.-10.02.2023

Aufgabe 1 [*Ultra-relativistisches, masseloses Bosegas*] (3+1+3=7 Pkt.)

Wir betrachten nun das Bosegas im 3-dimensionalen Kastenpotential mit einer hoch-relativistischen Dispersionsrelation, d.h. Spin-0 Teilchen mit Einteilchenenergien

$$\epsilon_{\mathbf{p}} = |\mathbf{p}|c \tag{1}$$

und verschwindender Ruhemasse. Ein solches Gas ist sehr ähnlich zu einem Gas bestehend aus Photonen. Der essentielle Unterschied zu einem Photonengas besteht in der Vernachlässigung des Photonenspins (Photonen sind Spin-1 Teilchen). Die großkanonische Zustandssumme ist gegeben durch Gleichung (200) im Skript, sodass

$$\ln(Y(T,V,\mu)) = -\sum_{\mathbf{p}} \ln(1 - \mathrm{e}^{-\beta(\epsilon_{\mathbf{p}}-\mu)}). \tag{2}$$

Die Impulsquantisierung funktioniert analog zu nicht-relativistischen Teilchen (gezeigt werden kann dies erst in fortgeschrittenen Vorlesungen zur Quantenfeldtheorie), d.h. $p_j = (\pi\hbar/L_j)n_j$ (wobei L_j die Kantenlänge in x_j-Richtung bezeichnet). Aufgrund der verschwindenden Masse der Boseteilchen können beliebig viele Teilchen im Grundzustand $\epsilon_{\mathbf{p}} = 0$ ohne Energiekosten erzeugt werden. Die mittlere Teilchenzahl N ist somit nicht fixiert. Man kann zeigen, dass für ein solches Bosegas $\mu = 0$ gilt. Die mögliche, unendliche Besetzungszahl des Zustands $\epsilon = 0$ hat in diesem Fall keinen Einfluss auf physikalische Eigenschaften des Gases, da die masselosen Boseteilchen mit $\epsilon = 0$ keinen Beitrag liefern[1].

(i) Berechne $\ln(Y(T,V,\mu=0))$, indem du analog zu dem Vorgehen in Kapitel 3.2.3 und 3.2.4 von der Summe über $\mathbf{p}$ in Gl. (2) zu einem Integral übergehst[2] und diesen so umformst, dass du den Polylogarithmus Li_ν (Gleichung (230) im Skript) identifizieren kannst.

(ii) Berechne, ausgehend von $\ln(Y(T,V,\mu=0))$, den Druck P.

(iii) Berechne die Ensemblemittelwerte E und $N' = N - \bar{n}_0$, indem du Gleichung (202) aus dem Skript verwendest und von den Summen über $\mathbf{p}$ zu Integralen übergehst. Überprüfe mithilfe deines Ergebnis aus (ii) die Relation $P = E/3V$ aus dem Skript. Vergleiche mit den Ergebnissen für E

[1] Anschaulich formuliert: Man kann einen Raum voller Photonen mit $\epsilon = 0$ nicht von einem leeren Raum unterscheiden.

[2] Entsprechend der obigen Erläuterungen vernachlässigen wir hierbei, im Gegensatz zum nicht-relativistischen Fall im Skript, den Fall $\mathbf{p} = 0$ gänzlich.

und $N' = N - \bar{n}_0$ des nicht-relativistischen Bosegases (Gleichungen (241) und (236) im Skript). Diskutiere den Zusammenhang zwischen deinem Ergebnis und dem Stefan-Boltzmann-Gesetz.

Hinweis: Für die Berechnung von N tritt erneut das um Gleichung (234) im Skript beschriebene Problem des unendlichen Beitrags für $\mathbf{p} = 0$ und $\mu = 0$ auf. Dies umgehen wir, indem wir von vorneherein (analog zu dem Vorgehen im Skript) die mittlere Besetzungszahl des Zustandes $\mathbf{p} = 0$ herausziehen.

Aufgabe 2 [*Sommerfeld-Technik*] (2+2+2+1=7 Pkt.)

In dieser Aufgabe wenden wir die Sommerfeld-Technik an, um einige im Skript angegebene Formeln für das ideale Fermi-Gas herzuleiten.

Für $T = 0$ ist die Besetzungszahlfunktion für das ideale Fermi-Gas eine Stufenfunktion

$$\overline{n(\varepsilon, T=0)} = \Theta(\mu - \varepsilon). \tag{3}$$

Die Sommerfeld-Technik basiert darauf, dass die Differenz der Besetzungszahlfunktion und der Stufenfunktion

$$\eta(\beta\varepsilon - \beta\mu) = \overline{n(\varepsilon)} - \Theta(\mu - \varepsilon) \tag{4}$$

für kleine Temperaturen nur für Energien $\varepsilon \approx \mu$ signifikant von 0 abweicht. Dies ermöglicht es, Korrekturen zu speziellen Ergebnissen bei $T = 0$ aufgrund kleiner endlicher Temperaturen als Potenzreihe in T herzuleiten.

(i) Betrachte das Integral

$$\int_0^\infty \mathrm{d}\varepsilon\ f(\varepsilon)\,\overline{n(\varepsilon)} \tag{5}$$

und zeige, dass es sich für kleine Temperaturen als

$$\int_0^\mu \mathrm{d}\varepsilon\ f(\varepsilon) + \frac{1}{\beta}\int_{-\beta\mu}^\infty \mathrm{d}x\ \eta(x)\left(f(\mu) + f'(\mu)\frac{x}{\beta} + \frac{f''(\mu)}{2}\frac{x^2}{\beta^2} + \mathcal{O}\left((x/\beta)^3\right)\right) \tag{6}$$

schreiben lässt. Nimm bei dieser Herleitung an, dass die Funktion $f(\varepsilon)$ und ihre Ableitungen für $\varepsilon \approx \mu$ sich nur schwach verändern.

Hinweis: Es ist zweckmäßig das Integral so aufzuspalten, dass sich ein Integral über $f(\varepsilon)\,\eta(\beta\varepsilon - \beta\mu)$ ergibt.

(ii) Da wir kleine Temperaturen betrachten und somit $\mu \approx \varepsilon_F > 0$ gilt, woraus $\beta\mu \gg 1$ folgt, können wir die untere Grenze des zweiten Integrals in Gl. (6) mit $-\infty$ nähern. Zeige, dass daraus

$$\int_0^\infty \mathrm{d}\varepsilon\ f(\varepsilon)\overline{n(\varepsilon)} = \int_0^\mu \mathrm{d}\varepsilon\ f(\varepsilon) + \frac{\pi^2}{6\beta^2}f'(\mu) + \mathcal{O}\left(T^4\right) \tag{7}$$

folgt.

Hinweis: $\int_0^\infty \frac{x}{\exp(x)+1} = \pi^2/12$

Verwende dieses Ergebnis um die Relationen

$$1 = \int_0^{\mu} \mathrm{d}\varepsilon\ z(\varepsilon) + \frac{\pi^2}{6\beta^2} z'(\mu) \tag{8}$$

$$\frac{E}{N} = \int_0^{\mu} \mathrm{d}\varepsilon\ z(\varepsilon)\,\varepsilon + \frac{\pi^2}{6\beta^2} \big(\mu z'(\mu) + z(\mu)\big) \tag{9}$$

herzuleiten.

(iii) Wir wollen nun einen Ausdruck für das chemische Potential bis einschließlich der Ordnung $\mathcal{O}(T^2)$ herleiten. Benutze hierfür den Ausdruck in Gl. (8) um die Relation

$$\mu = \varepsilon_F - \frac{\pi^2}{6\beta^2} \frac{z'(\varepsilon_F)}{z(\varepsilon_F)} \tag{10}$$

zu erhalten.

Hinweis: Bedenke, dass der Wert von μ in der oberen Integralgrenze in Gl. (8) *nicht bekannt ist. Daher ist es zweckmäßig das Integral in ein Integral von* 0 *bis ε_F (der Wert dieses Integrals ist bekannt) und ein Integral von ε_F bis μ aufzuspalten. Für die Evaluation des zweiten Integrals ist der Mittelwertsatz der Integralrechnung nützlich. Da wir nur an den Korrekturen der Ordnung $\mathcal{O}(T^2)$ interessiert sind, kannst du μ in Ausdrücken dieser Ordnung in nullter Ordnung nähern (also durch das $T = 0$ Ergebnis, d.h. $\mu \approx \varepsilon_F$).*

(iv) Benutze das Ergebnis der Teilaufgabe (iii) um mit Gl. (9)

$$\frac{E}{N} = \frac{E_0}{N} + \frac{\pi^2}{6} \frac{z(\varepsilon_F)}{\beta^2} + \mathcal{O}(T^4) \tag{11}$$

herzuleiten, wobei E_0 die Energie des Gases bei $T = 0$ ist.

Hinweis: Gehe in der Berechnung des Integrals in Gl. (9) *wie in Teilaufgabe (iii) vor.*

Aufgabe 3 [*Richardsoneffekt / Strom aus Glühkathode*] `(6 Pkt.)`

Berechne die Stromdichte von aus einem Metall austretenden Elektronen bei Temperatur T. Behandele die Elektronen dabei als ideales Fermigas von nichtwechselwirkenden, nicht-relativistischen Spin-1/2 Teilchen. Um aus dem Metall auszutreten, müssen die Elektronen eine Potentialstufe der Höhe $\epsilon_F + V_0$ (siehe Gleichung (249) im Skript für die Definition von der Fermi-Energie ϵ_F) überwinden. Das Metall befinde sich im Bereich $z \leqslant 0$ (z bezeichnet eine der drei kartesischen Koordinaten) und die Stufe sei bei $z = 0$.

Hinweis: Aus Experimenten is bekannt, dass V_0 typischerweise einige eV beträgt, wobei 1*eV einer Temperatur von etwa* 11500*K entspricht. Daher kann man $V_0 \gg k_B T$ annehmen. Die Stromdichte der in z-Richtung austretenden Elektronen ist proportional zur Anzahl aller Elektronen im Metall, deren Impuls in z-Richtung groß genug ist, um die Potentialstufe zu überwinden.*