Theoretische Physik 5: Thermodynamik und Statistische Physik

WiSe 2022 / 2023 – Prof. Marc Wagner

Laurin Pannullo: pannullo@itp.uni-frankfurt.de
Marc Winstel: winstel@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 12

Abgabe am 27.01.2023. Besprechung in den Tutorien vom 30.01.-03.02.2023

Aufgabe 1 [*Nicht-relativistisches Bosegas*] (4+3+1=8 Pkt.)

Wir betrachten ein ideales Gas nicht-relativistischer Bosonen mit Spin 0 und 1-Teilchen-Energien $\epsilon_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}^2/2m$ in einem 3-dimensionalen Kastenpotential, welches in Kapitel 3.2.4 im Skript besprochen wird.

(i) Berechne den Logarithmus der großkanonischen Zustandssumme

$$\ln(Y(T,V,\mu)) = -\sum_{\mathbf{p}} \ln(1 - \mathrm{e}^{-\beta(\epsilon_{\mathbf{p}}-\mu)}), \tag{1}$$

indem du den Summanden für $\mathbf{p} = 0$ aus der Summe herausziehst und analog zu dem Vorgehen in den Kapiteln 3.2.3 und 3.2.4 von der Summe über $\mathbf{p}$ zu einem Integral übergehst. Forme dein Ergebnis so um, dass du den Polylogarithmus Li_ν (Gleichung (230) im Skript) identifizieren kannst. Berechne, ausgehend von $\ln Y$, den Druck P.

(ii) Berechne die innere Energie E, indem du Gleichung (202) aus dem Skript verwendest und von den Summen über $\mathbf{p}$ zu Integralen übergehst. Zeige, dass sich dein Ergebnis im Limes $\mathrm{e}^{\beta\mu} \ll 1$ auf $E = 3Nk_BT/2$ reduziert, also dem idealen Gas entspricht.

(iii) Wie lautet die allgemeine Beziehung zwischen Druck und innerer Energie bei nicht-relativistischen Gasen? Überprüfe exemplarisch diese Beziehung mit deinen Ergebnissen aus den Aufgaben (i) und (ii).

Aufgabe 2 [*Bose-Einstein-Kondensation im harmonischen Oszillatorpotential*] (1+3+1+2=7 Pkt.)

Im Skript wurde in der Diskussion der Bose-Einstein-Kondensation ein ideales Bosegas in einem unendlich tiefen Potentialtopf betrachtet. Ein solches Potential ist experimentell unter Umständen schwer realisierbar. Üblicher ist es zum Beispiel ein Wasserstoffatom, welches sich aufgrund seines ganzahligen Spins wie ein Boson verhält, in einer Atomfalle zu fixieren. Das Potential einer solchen Falle lässt sich näherungsweise durch das Potential eines harmonischen Oszillators beschreiben. Wir wollen nun untersuchen inwiefern sich dieses im Vergleich zur Vorlesung veränderte Potential auf die Bose-Einstein-Kondensation und die Energie des Gases auswirkt.

Wir betrachten daher ein ideales Bosegas im harmonischen Oszillatorpotential in 3 Dimensionen, d.h. der N-Teilchen Hamiltonoperator ist von der Form

$$H = \sum_{\nu=1}^{N} h(\nu)\,, \quad h(\nu) = \sum_{i=x,y,z} \left(\frac{\hat{p}_i^2}{2m} + \frac{m\omega \hat{x}_i^2}{2} \right). \tag{2}$$

(i) Welche 1-Teilchen Energien ergeben sich für dieses System? Stelle die großkanonische Zustandssumme $Y(T,V,\mu)$ sowie die Ausdrücke für die mittleren Besetzungszahlen der Zustände auf.
Hinweis: Die von dir angegeben Ergebnisse müssen keine geschlossenen Ausdrücke sein, d.h. es ist nicht notwendig die auftretenden Summen über die Quantenzahlen auszuführen.

(ii) Im Skript in Kapitel 3.2.4 wurde für das Bosegas im Kastenpotential ein kritisches chemisches Potential $\mu_c = 0$ identifiziert. Welchen Wert hat das kritische chemische Potential für das Gas im harmonischen Oszillatorpotential? Berechne analog zum Skript die mittlere Teilchenzahl N für $\mu < \mu_c$ und gib die kritische Temperatur T_c für die Bose-Einstein-Kondensation an.

Nimm in der Rechnung an, dass $k_B T \gg \hbar\omega$ (dies entspricht einer Falle mit makroskopischer räumlicher Ausdehnung) und somit die Energieeigenwerte hinreichend dicht zusammenliegen, sodass die Summen über die Quantenzahlen durch entsprechende Integrale über diese ersetzt werden können. Rechtfertige diese Annahme mithilfe des Ergebnisses für T_c.

(iii) Betrachte den Fall $\mu = \mu_c$ und gib den Prozentsatz der Teilchen im Grundzustand $\bar{n}_0/N$ als Funktion von T/T_c an. Vergleiche dein Ergebnis mit dem Ausdruck aus dem Skript für das Bosegas im Kastenpotential.

(iv) Berechne weiterhin die Energie

$$E = \sum_{\lambda} \varepsilon_\lambda \bar{n}_\lambda, \tag{3}$$

wobei λ für die auftretenden Quantenzahlen steht und ε_λ die jeweilige 1-Teilchenenergie ist. Wie unterscheidet sich der resultierende Ausdruck in seiner funktionalen Form von dem für das Bosegas im Kastenpotential (Gl. (241) im Skript)?
Hinweis: Ersetze wieder die Summe über die Quantenzahlen durch ein entsprechendes Integral.

Aufgabe 3 [*Bosegas in 2 Dimensionen*] `(3+2=5 Pkt.)`

In dieser Aufgabe untersuchen wir das ideale Bosegas im Kastenpotential in 2 statt 3 Raumdimensionen. Wir werden in dieser Untersuchung zeigen, dass es beim Bosegas in 2 Dimensionen nicht zu einer Bose-Einstein-Kondensation kommt, d.h. es gibt keine Anhäufung von Teilchen im Grundzustand und einen entsprechenden Phasenübergang.

(i) Berechne zunächst den Ensemblemittelwert der Teilchenzahl $N = \sum_{\mathbf{p}} \bar{n}_{\mathbf{p}}$ für $\epsilon_{\mathbf{p}} - \mu > 0$ im Stil des Kapitels 3.2.4 im Skript. Drücke N durch den Polylogarithmus Li_ν (Gleichung (230) im Skript) aus.

(ii) Studiere Kapitel 3.2.4 im Skript im Hinblick darauf, wie eine kritische Temperatur T_c bestimmt wird, ab der bei vorgegebener Teilchendichte N/V im dreidimensionalen Bosegas $\mu = 0$ wird. Für welche Temperatur T_c findet man $\mu \to 0^-$ bei nicht-verschwindendem N/V im 2-dimensionalen Fall? Was bedeutet dies für die Besetzungszahl $\bar{n}_0$ bei nicht-verschwindenden, kleinen Temperaturen? Diskutiere die qualitativen Unterschiede im Verhalten von $\bar{n}_0$ im Limes $T \to 0$.