Theoretische Physik 5: Thermodynamik und Statistische Physik

WiSe 2022 / 2023 – Prof. Marc Wagner

Laurin Pannullo: pannullo@itp.uni-frankfurt.de
Marc Winstel: winstel@itp.uni-frankfurt.de

Aufgabenblatt 6

Abgabe am 02.12.2022. Besprechung in den Tutorien vom 05.12-09.12.2022

Aufgabe 1 [*Verallgemeinerte Kräfte als Ableitungen der Energie*] (4 Pkt.)

In Kapitel 1.9.1 werden verallgemeinerte Kräfte X_j als Mittelwerte von Ableitungen der mikroskopischen Energieeigenwerten nach äußeren Parametern x_j definiert, d.h. es gilt

$$X_j = -\overline{\frac{\partial E_r(\mathbf{x})}{\partial x_j}}. \tag{1}$$

In dieser Gleichung kann prinzipiell die partielle Ableitung mit der Ensemblemittelung über die Energieeigenwerte vertauscht werden, d.h. es kann auch

$$X_j = -\frac{\partial E}{\partial x_j} \tag{2}$$

verwendet werden. Wird dies jedoch in naiver Weise getan, können offensichtlich falsche Ergebnisse entstehen. Für das ideale Gas kann das Einsetzen von $E = 3Nk_BT/2$ in Gleichung (2) fälschlicherweise dazu führen, dass man (mit $x_j = V$ und $X_j = P$) $P = 0$ erhält. Verwendung von $E = 3PV/2$ führt sogar zu dem offensichtlichen Widerspruch $P = -3P/2$.

Überlege dir, welcher konzeptioneller Fehler dieser naiven Verwendung von Gleichung (2) zugrunde liegt. Verwende anschließend den korrekten Ausdruck für den Ensemblemittelwert der Energie E, um die Beziehung $P = Nk_BT/V$ zu berechnen. Formuliere dann Gleichung (2) so, dass eindeutig ist, welcher Ausdruck für E zu verwenden ist.

Hinweis: Die Gleichungen aus Kapitel 1.7 sowie sorgfältiges Wiederholen der Konzepte in Kapitel 1.9 sind hierzu hilfreich.

Aufgabe 2 [*Zweiter Hauptsatz bei Expansion*] (2+1=3 Pkt.)

Wir betrachten ein ideales Gas mit Teilchenzahl N, Energie E und Volumen V_1. Das Volumen expandiert schlagartig und damit nicht-quasistatisch auf das größere Volumen V_2 bei gleichzeitiger thermischer Isolierung.

(i) Berechne die Entropieänderung des Systems mithilfe des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik. Nimm dazu an, dass N während des ganzen Prozesses konstant bleiben, und suche dir einen quasistatischen Weg, um $\mathrm{d}S$ zu integrieren.

(ii) Verifiziere Dein Ergebnis, indem du die Entropieänderung mit dem mikroskopisch hergeleiteten Ausdruck für die Entropie aus Gleichungen (34) und (36) im Skript bestimmst.

Aufgabe 3 [*Das ideale Gas im kanonischen Ensemble*] `(2+1+1+2+3=9 Pkt.)`

Wir betrachten das ideale Gas, bestehend aus N nichtrelativistischen Punktteilchen, im Volumen V bei Temperatur T im kanonischen Ensemble.

(i) Berechne die kanonische Zustandssumme des idealen Gases. Verwende dabei die klassische Beschreibung von Mikrozuständen.

(ii) Berechne mithilfe der kanonischen Zustandssumme $E(T)$ und $P(T)$.

(iii) Gehe von der bekannten mikrokanonischen Zustandssumme des idealen Gases (Gleichungen (33) und (34) im Skript) aus, und berechne aus dieser Zustandssumme $T(E)$ und $P(E)$. Vergleiche und diskutiere die Ergebnisse aus (ii) und (iii).

(iv) Leite die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung (Gleichung (105) im Skript) her, die die statistische Verteilung des Geschwindigkeitsbetrags $v = |\mathbf{v}|$ der idealen Gasteilchen im Gleichgewicht beschreibt. Verwende dabei erneut den kanonischen Formalismus und die klassische Beschreibung von Mikrozuständen.

(v) Betrachte die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung als Wahrscheinlichkeitsverteilung, indem du die Verteilung als Funktion der Geschwindigkeit v für zwei verschiedene inverse Temperaturen $\beta_2 < \beta_1$ skizzierst. Diskutiere den Fall $\beta \to 0$. Berechne anschließend die mittlere Geschwindigkeit und die Geschwindigkeit mit der höchsten Wahrscheinlichkeit. Wie lautet der Erwartungswert für v_x in der Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung?

Aufgabe 4 [*Kanonische Zustandssumme des Spinmodells*] `(3+1=4 Pkt.)`

Wir betrachten ein nicht-interagierendes Spinmodell wie es bereits in Aufgabe 4 auf Blatt 4 und Aufgabe 3 auf Blatt 5 betrachtet wurde. Das System besteht aus N Spins σ_i, welche nur mit einem externen Magnetfeld h interagieren. Dies ist der Spezialfall $J = 0$ des eindimensionalen Isingmodells, welches auf Übungsblatt 3 behandelt wurde. Das System hat die Hamiltonfunktion

$$H = -h \sum_{i=1}^{N} \sigma_i, \tag{3}$$

wobei die Spins die Werte $\sigma_i = \pm 1$ annehmen können.

(i) Berechne die kanonische Zustandssumme $Z(\beta, h)$ für dieses System.
Hinweis: Bedenke, dass im Gegensatz zu Aufgabe 3 die Zustandssumme eine diskrete Summe ist.

(ii) Berechne mithilfe der kanonischen Zustandssumme die Energie $E(\beta, h)$ und die Magnetisierung $M(\beta, h)$. Verifiziere, dass deine Ergebnisse den gegebenen Ausdrücken in Aufgabe 3 auf Blatt 5 entsprechen, welche mikrokanonisch berechnet wurden.